F 1130

REFERATIVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 1 ANUL 1969
IANUARIE — FEBRUARIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI — NUMĂRUL 1

IANUARIE — FEBRUARIE
1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici* ; Prof. Dr. Docent *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli* ; Prof. Dr. *S. Călin* ; Prof. *C. Dinculescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. dr. Docent *D. Dumitrescu*; Prof. *S. Gâdea*; Conf. Dr. *I. Grădișteanu* ; Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. Docent *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu* ; Prof. *St. Mantea* ; Prof. Dr. *N. Marinescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *R. Răduleț* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. Dr. Docent *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil:
Rector
Prof. Dr. ing. *George Bărănescu*
membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICĂ

Mariana Craiu, M. N. Roşculeţ

Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic 17

I. M. Miu

Sur les polynômes fonctionnels 27

GEOMETRIE

M. St. Botez

Asupra unei transformări birațional involutivă 41

N. Mirescu

Asupra unei simplificări a epurei Monge 49

FIZICĂ

Diana Moisil

Asupra determinării mărimilor elipsometrice în radiaţiile laser . . 57

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. C. Răducanu, Ecaterina Tucan

Dependenţa compoziţiei aliajului cobalt-fosfor în condiţiile de electroliză 65

REZISTENŢA MATERIALELOR

D. Voiculescu

Quelques applications de la théorie des distributions dans la résistance des matériaux 77

Gh. Rusiu

Deplasarea laterală a căii ferate sub acţiunea unei forţe laterale, mobile 97

TERMOTEHNICA

C. Stamatescu, Marieta Grigoriu, T. Duicu

Studiul randamentului exergetic al proceselor frigorifice reale, prin comprimare de vapori 107

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

N. Apostolescu

Combustion of Fuel at High Pressure 127

Резюме

М. Краю, М. Н. Рошкулец Д. К. 517.9

Вклад в изучение уравнений с частными производными параболического типа

В работе представлены интегральные формулы для решения уравнения (1.3), определенные в полубанде или бесконечной банде.

Дается решение типа Пуассона, которое в условии теоремы 1.71. определено так :

$$\mu(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta,t_1)}{(t-t_1)\frac{1}{2}m}\,d\zeta\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(\eta-\zeta)\eta}{(t-t_1)\frac{1}{2}m}\,d\eta$$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

И. М. Миу Д К. 512.3 : 517.5

Функциональные полиномы

Вводится понятие функционального полинома $P(\delta)$ в связи с функциональными линейными уравнениями, в которых δ имеет роль оператора.

Даются затем разные правила для различных действий с функциональными полиномами (итерации, разделения налево и направо. производные и т. д.)

Вводится понятие функционального полинома адъюнкта данного функционального полинома.

Адъюнктный функциональный полином вводится, исходя из условия, что функциональный полином разделится налево на функциональный бином первого порядка.

Устанавливаются четыре важные теоремы, относящиеся к функциональным адъюнктным полиномам в связи с их свойствами.

Излагаются затем несколько частных случаев функциональных адъюнктных уравнений, трактованных с помощью функциональных полиномов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

М. Ст. Ботез Д. К. 515 : 517

Относительно некоторого бирационально инволютивного преобразования

Пространственная кривая по теореме Кайлея — это пересечение одной моноидной поверхности с цилиндром.

В случае пространственной кривой третьего порядка моноидная поверхность является гиперболическим параболоидом, а цилиндр должен иметь общую производящую с ним.

Так как пересечение двух поверхностей в общем положении к декартовому реперу является довольно сложным, автор заменил пересечение выше указанных двух поверхностей, взаимным преобразованием точек моноида по отношению к квадрике.

Этот метод, по природе квадрики, по отношению к которой считается взаимность, ведет к различным классам кривых третьего порядка.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Summary

D.C. 517.9

M. Craiu, M. N. Roşculeţ

Contributions to the Study of Equations with Parabolic Type Partial Derivatives

Within the work integral formulae for the (1.3.) equation solutions are established, being defined in a halfband or in an infinite band. In conclusion one gives a Poisson type solution, which, in the conditions of the 1.71 theorem, is defined by.

$$\mu(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\zeta\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(\eta-\zeta)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\eta$$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. 512.3 : 517.5

I. M. Miu

Fonctional Polynoms

The concept of fonctional polynom P (δ) is introduced in connection with the linear functional equations, where δ has the role of operator.

— Various rules are then given for different operations with functional polynoms (iterations, left and right division, derivation etc.).

— The concept of an adjunct functional polynom of a given functional polynom is introduced.

The adjunct functional polynom is introduced starting from the condition that the functional polynom is divided to the left by a Ist order functional binomial.

Four important theorems are determined concerning the adjunct functional equations in connection with their properties.

Some particular cases of adjunct functional equations are then treated by means of functional polynoms.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

M. Şt. Botez D.C. 515 : 517

About an Involutive Birational Transformation.

A false curve is, according to Cayley's theorem, the intersection between a monoide and a cylinder.

In the case of a false curve, the monoide surface is o hyperbolic paraboloid, and the cylinder must hove a generatrix common with it As the intersection of two surfaces in an ordinary position against the cartesian guide mark is a little difficult, the author replace the two surfaces intersection by a mutual transformation of the monoide points in relation with a quadric.

This method, leads according the quadric disposition in relation with which the reciprocity is considered, — to the different categories of false cubics.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Н. Мирескy

Д. К. 515 624.04

Об упрощении эпюры монж

В этой работе исходят от эпюры, репер которой определен двумя конкурирующими плоскостями под углом 45°, без выражения второй плоскости в эпюре.

Получается одно изображение, если на ортогональной проекции фигуры представлены главные ее точки : пересечения со второй плоскостью ретера.

Анализируются основные задачи линейной геометрии.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Д. К. 535 :[537.5 621.375.9 : 681.2.089

Д. Мойсил

Определение элипсометрических величин в излучении лазер

Устанавливаются формулы для определения элипсометрических величин Ψ и Δ из показаний элипсометра в двух рабочих вариантах : стабильный компенсатор или стабильный поларизор, в случае когда компенсатор расположен между образцом и анализором.

Учитывается факт, что компенсатор не является пластинкой в четверть идеальной волны ($\delta \neq \pi/2$ и $T \neq 1$).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Д. К. 621.35 : 541.13 : 546.18 : 546.73/.74 : 669.245

И. С. Радукану, Е. Тукан

Зависимость состава сплава кобальт-фосфор от условий электролиза

Работа описывает условия, при которых можно получить сплавы кобальт-фосфор катодным осаждением.

Показывается зависимость состава, вида, строения сплавов и коэффициента полезного действия тока от состава электролита, от катодной плотности тока и от температуры, а также влияние концентрации фосфористой кислоты и температурыия поляризацию.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Д. К. 539.3/4 : 517.9 : 624.023.9 : 624.072.2

Д. Войкулеску

Некоторые возможности применения теории распределений в сопротивлении материалов

Выражением с помощью распределений, непрерывностей, встреченных в последнее время в практике в области сопротивления материалов, основывается применение теории распределений и матрицального расчета относительно прямой балки, круглой пластинки, нагруженной аксиально-симметрически вращательным дискам.

Используя операциальный расчет на основе соотвествия между теорией дистрибутивности, и операторами указывается практический метод для оелегчения расчета функций Крылова.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

N. Mirescu

D.C. 515 : 624.04

On A Monge Epure Simplification

Within this work one starts from an epure the component of which is determined by two concurrent planes under a 45° angle, the second plane being not expressed in the epure.

One obtains a single image if on the orthogonal projection of a figure its essential points are also represented, such as those of the intersection with the second plane of the component.

In this way, all the fundamental problems of linear geometry are treated.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. : 535 : 537.5 : 621.375.9 : 681.2.089

D. Moisil

On the Determination of Ellipsometric Quantities, in Laser Radiation.

The formulae for determining the ψ and Δ ellipsometric quantities in the ellipsometer indications, are established in two working variants : fixed compensator or fixed polarizer in case the compensator is situated between the sample and analyser. One should take into account the fact that the compensator is not an ideal wave plate ($\delta \neq \pi/2$ and $T \neq 1$).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. : 621.35 : 541.13 : 546.18 : 546.73/.74 : 669.245

I. C. Răducanu, E. Tucan

Dependence of the Cobalt-phosphorus Alloy Upon the Electrolysis Conditions

The works shows the conditions when the cobalt-phosphorus alloys may be obteined by cathode deposit.

The dependence of the alloy composition, aspect, structure and of the current efficiency on the electrolyte composition, cathode current density and temperature, as well as the influence of the phosphorous acid strenght and of the temperature on the polarization are also shown.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. : 539.3/.4 : 517.9 : 624.023.9 : 624.072.2

D. Voiculescu

Some Applications of the Theory of Distributions in the Strencth of Material

Expressing by means of distributions the discontinuities currently met in the practical application strength material, the author backs up the theory of distributions and of matricial calculation regarding the straight bar, the circular plate axially symmetrically loaded, the rotation disks. Then, by using the operational calculus on basis of the correspondence between the theory of distributions and operators the author indicates a recurrence method for the easy calculation of Krîlov functions.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Г. Русиу

Д. К. 539.3/4 : 625.03 : 625.143

Поперечное перемещение железной дороги под действием поперечной движущейся силы

В статье излагается метод расчета поперечного перемещения бесстыковых путей, считая рельс бесконечно длинной балкой, опирающейся на упруго-пластическое основание. Нагрузка состоит из сосредоточенной движущейся поперечной силы, распределенных моментов, пропорционалных с углом наклона касательной к упругой линии балки и осевой силы, вызванной несвободным температурным расширением.

Принимая поведение балласта подобным поведению идеально-пластического тела, можно выявить остаточные перемещения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Д. К. 621.1.01 : 621.56/.57 : 621.51

К. Стаматеску, М. Григориу, Т. Дуику

Изучение эксергетического полезного действия коэффициента реальных холодильных процессов со сжатием пара

В статье определяется и изучаетея условие изменения эксергетического полезного действия коэффициента реального холодильного процесса.

Для этого применяется эксергетический к.п.д. теоретического процесса, изученного и публикованного ранее автором, анализируется два фактора корректуры и изучается условия его изменения. Эти факторы корректуры зависят от холодильного агента, от качества термодинамического процесса и от качества обмена тепла.

Получаются оптимальные условия для поршневых и ротационных компрессоров, а-также для центробежных и осевых компрессоров

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Д. К. 621.43.05 : 662.61 : 541.22

Н. Апостолеску

Сгорание капли горючего на повышенных давлениях

Диффузное сгорание в Дизелях и в некоторых современных газотурбинных установках протекает на повышенных давлениях, которые превышают критическое давление горючего. Для описания капли горючего в этих условиях была выработана соответствующая физическая модель, основанная на неустановившемся ведении процессов. С её помощью были установлены расчетные соотношения для луча пламени и массовая скорость сгорания при сгорании капли в неограниченном или ограниченном объеме окислителем. Были исследованы также случаи, при которых капля замещена источником, постоянно подающим горючее. Установленные расчетные соотношения соответсвуют техническим целям.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. 539.3/.4 : 625.03 : 625.143

Gh. Rusiu

Lateral Displacement of the Railway Under the Action of Lateral, Movable Forces

A calculus method for the lateral displacement of the welded railway is presented, considering the rail as a beam of infinite lenght resting on an elastico-plastic medium loaded with a transverse, concentrated, movable force with distributed moments, proportional to the rotating angle of the distorted axis and with an axial force due to hindered dilatation.

Admitting the behaviour of the ballast as similar to that of body ideally plastic the remanent shiftings may be rendered evident.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. 621.1.01 : 621.56/.57 : 621.51

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

The Study of the Exergetic Efficiency of Real Refrigerating Processes by Vapours Compression.

The authors investigate, analyse and elaborate the variation conditions of the exergetic efficiency of a refrigerating process by a real vapours compression With that end in view they use the exergetic efficiency of the theoretical process, analysed by them beforhand. The authors determine the calculation relations of the correction factors and they examine the variation conditions of those correction factors too. These correction factors take in account the refrigeration agent described by the adiabatic exponent $\varkappa$ of the thermodynamic process quality marked by the m polytropic exponent by the gazodynamic process quality characterized by a pression loss coefficient and by the exchange heating quality marked by the ΔT_o and ΔT_c temperature differences.

It follows optimum conditions both for the processes realised by means of volume compressor as for those realised by centrifugal or axial compressors.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.C. 621.43.05 : 662.61 : 541.22

N. Apostolescu

Combustion of Fuel Drop at high Pressure

The diffusive combustion in Diesel engines and in certain modern gas turbine plants occurs at high pressures exceeding the fuel critical pressure. In order to describe the combustion of the fuel drop in these conditions, a physical adequate model has been conceived, based on the non-stationary treatment of the processes. By this means, calculation relations have been established for the flame radius and the mass burning rate in the case of drop combustion in unlimited or limited oxidizer volume. The continually supply of fuel has been also studied, case when the drop is substituted by a source. The determined calculation relations are adequate to technical purposes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Résumé

M. Craiu, M. N. Roşculeţ C.D. 517.9

Contributions à l'etude des équations à dérivées partielles de type parabolique

On établit dans le travail des formules intégrales pour les solutions de l'équation (1.3) définies par une demi-bande ou par une bande infinie. En conclusion on donne une solution de type Poisson qui, dans les conditions du théorème 1.71, este définie par :

$$\mu(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\zeta\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(\eta-\zeta)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\eta$$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

I. M. Miu C.D. 512.3 : 517.5

Polynômes fonctionnels

On introduit la notion de polynôme fonctionnel P (δ) en relation avec les équations fonctionnelles linéaires, où δ a le rôle d'opérateur.

On indique ensuite diverses régles pour des opérations variées à polynômes fonctionnels (itérations, division à gauche et à droite, dérivation, etc.).

On introduit la notion de polynôme fonctionnel adjoint d'un polynôme fonctionnel donné.

Le polynôme fonctionnel adjoint est introduit à partir de la condition que le polynôme fonctionnel se divise à gauche avec un binôme fonctionnel du I-er ordre.

On établit des théorèmes importants concernant les polynômes fonctionnels adjoints en connexion avec leurs propriétés.

On traite ensuite quelques cas particuliers d'équations fonctionnelles adointes au moyen des polynômes functionnels.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 515 : 517

M. St. Botez

La transformation birationnelle involutive.

Une courbe tordue est selon le théorème de Cayley l'intersection d'une superficie monoïde et d'un cylindre.

Dans le cas d'une cubique tordue, la superficie monoide est un paraboloïde hyperbolique et le cylindre doit y avoir une génératrice commune. Etant donné que l'intersection des deux superficies, en position générale quant au repère cartesien est un peu compliqué, l'auteur remplace l'intersection des deux superficies par une transformation réciproque des points du monoide par rapport à une quadrique.

Cette methode nous conduit, selon la nature de la quandrique par, rapport à laquelle on prend en consideration la reciprocité, — aux diverses classes de cubique tordues.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Zusammenfasung

M. Craiu, M. N. Roşculeţ D.K. 517.9

Beitrag zum Studium der Gleichungen mit Teilabgeleiteten vom parabolischen Typ.

In der Arbeit werden Integralformeln für die Lösungen der Gleichung (1.3) bestimmt, die auf einem Halbband, oder einem endlosen Band festgelegt werden. Zum Schluss wird eine Lösung vom Poisson-Typ gegeben, die unter den, in dem Theorem 1.71 vorhanfestgelegt wird.

$$\mu(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\zeta,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\zeta\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(\eta-\zeta)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}m}}\,d\eta$$

festgelegt wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

I. M. Miu D.K. 512.3 : 517.5

Funktionspolynome

Es wird der Begriff von Funktionspolynom P (δ) in Verbindung mit den linearen Funktionsgleichungen eingeführt, in denen δ die Rolle des Operators hat.

— Es werden darauf verschiedene Regeln für verschiedene Vorgänge mit Funktionspolynomen gegeben (Iterationen, Teilungen nach links und rechts, Ableitungen, usw.);

— es wird der Begriff von beigeordneten Funktionalpolynom eines gegebenen Funktionspolynom eingeführt.

Der beigeordnete Funktionspolynom wird, ausgehend von der Bedingung, dass der Funktionalpolynom sich links mit einem Funktionsbinom erster Ordnung teilt, eingeführt.

Es werden vier wichtige Theoreme, betreffend die Funktionalpolynome în Verbindung mit den Eigenschaften derselben bestimmt.

Darauf werden einige besondere Fälle beigeordneten Funktionsgleichungen erörtert die mittels Funktionspolynomen behandelt werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

M. St. Botez D.K. 515 : 517

Uber eine birational-involutive Umformung

Eine gekrümmte Kurve ist, nach dem Caylayschen Lehrsatz der Schnitt zwischen einer monoiden Oberfläche und einem Zylinder. Im Falle einer gekrümmter Kurve dritter Ordnung, ist die monoide Oberfläche ein hyperbolisches Paraboloid und der Zylinder muss mit dieser eine gemeinsame Eriengende haben. Da der Schnitt zweier Oberflächen in allgemeiner Lage gegenüber dem cartesischen Zeichensystem ziemlich kompliziert ist, ersezt der Verfasser den Schnitt dieser beider Oberflächen durch eine reziproke Umformung der Punke des Monoides im Vergleiche zu einer Fläche zweiter Ordnung.

Diese Methode führt, je nach der Natur der Fläche zweiter Ordnung im Vergleiche zu welcher die Resiprozität betrachtet wird zu verschiedenen Klassen gekrümmter Kurven dritter Ordnung.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

N. Mirescu

C.D. 515 : 624.04

Sur une simplification de l'epure Monge.

On part en ce travail d'une épure dont le repère est déterminé par deux plans concurrents sous un angle de 45° le second plan n'étant pas exprimé en épure.

On obtient une seule image si sur la projection orthogonale d'une figure on a representé aussi ses points essentiels de l'intersection avec le second plan du repère.

On a traité les problemes fondamentaux de la géométrie linéaire.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 535 : 537.5 : 621.375.9 : 681.2.089

D. Moisil

Sur la determinations des grandeurs ellipsometrique de la radiation Laser

On établit les formules pour déterminer les grandeurs elipsométriques ψ et Δ des indications de l'éllipsomètre, en deux variantes de travail : compensateur fixe ou polariseur fixe, au cas où le compensateur est situé entre l'échantillon et l'analyseur. On tient compte du fait que le compensateur n'est pas une lame quart d'onde idéale ($\delta \neq \pi/2$ et $T \neq 1$).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 621.35 : 541.13 : 546.18 : 546.73/.74 : 669.245

I. C. Răducanu, E. Tucan

Dependance de la composition de l'alliage cobalt-phosphore en condition d'electrolyse

Le travail présente les conditions où l'on peut obtenir des alliages de cobalt-phosphore par dépôt cathodique.

On y montre la dépendance de la composition, de l'aspect, de la structure des alliages et du rendement de courant de la composition de l'électrolyte, la densité du courant cathodique et la temperature, ainsi que l'influence de la concentration de l'acide phosphoreux et de la température sur la polarisation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 539.3/.4 : 517.9 : 624.023.9 : 624.072.2

D. Voiculescu

Quelques applications de la theorie des distributions a la resistance des materiaux.

En exprimant à l'aide des distributions les discontinutés couramment rencontrées dans les applications pratiques de la résistance des matériaux, l'auteur établit l'application de la théorie des distributions et du calcul matriciel relatifs à la barre droite, à la plaque circulaire chargée axialement symmétrique, et aux disques de rotation. Ensuite tout en l'utilisant le calcul opérationnel l'auteur indique une méthode de récurrence pour faciliter le calcul des fonctions Krîlov à partir de la correspondance entre la théorie des distributions et les opérateurs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

N. Mirescu D.K. 515 : 624.04

Über die Vereinfachung der Monge Epure.

In dieser Arbeit wird von einer Epure ausgegangen, deren Merkzeichen durch zwei, unter einem Winkel von 45° zusammenwirkenden Ebenen bestimmt wird, wobei die zweite Ebene nicht in der Epure ausgedrückt ist.

Es wird ein einziges Bild erzielt, wenn auf die ortogonale Projektion einer Abbildung auch ihre wesentlichen Punkte dargestellt sind ; der Schnittpunkt mit der zweiten Merkzeichenebene.

Es wurden Hauptfragen der liniaren Geometrie behandelt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D. Moisil D.K.535 : 537.5 : 621.375.9 : 681.2.089

Über die Bestimmung der ellipsometrischen Grössen in der Laserstrahlung.

Es werden die Formeln zur Bestimmung der ellipsometrischen Grössen ψ und Δ aus den Angaben des Ellipsometers in zwei Arbeitsvarianten festgelegt : fester Kompensator oder fester Polarisator für den Fall, in dem sich der Kompensator zwischem den Muster und Analysator befindet. Es wird von der Tatsache Rechnung getragen, dass der Kompensator keine ideale Viertelwellenlängenblättchen.

$$(\delta \neq \pi/2 \text{ und } T \neq 1.)$$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.K. 621.35 : 541.13 : 546.18 : 546.73/.74 : 669.245

I. C. Răducanu, E. Tucan

Die Abhängigkeit der Kobalt-Phosphorlegierung von den Elektrolysebedingungen.

In der Arbeit werden die Bedingungen angegeben, in denen die Kobalt-Phosphorlegierungen durch Katodenablagerung erzielt werden können.

Es wird die Abhängigkeit der Zusammensetzung, des Aussehens, der Struktur der Legierungen und der Stromleistung von der Elektrolyt-Zusammensetzung, katodischen Stromdichte unde Temperatur, sowie der Einfluss der phosphorigen Säure-Konzentration und der Temperatur auf die Polarisation angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D. Voiculescu D.K. 539.3/.4 : 517.9 : 624.023.9 : 624.072.2

Anwendungen derVerteilungstheorie in dem Materialwiderstand.

Indem man die in den praktischen Anwendungen des Materialwiderstands laufend begegnete Diskontinuität mit Hilfe der Verteilungen ausdrückt, wird die Anwendung der Verteilungstheorie und der metrischen Berechnung, betreffend die gerade Stange, die axial und symmetrisch beladene Kreisplatte und die Drehscheiben begründet.

Durch Anwendung der Operationsberechnung auf Grund der Zuordnung zwischen der Verteilungstheorie und den Operatoren wird dann eine Rekurrentmethode für eine leicht durchführbare Berechnung der Krîlov-Funktionen angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 539.3/.4 : 625.03 : 625.143

Gh. Rusiu

Deplacement lateral de la voie ferree sous l'action d'une force laterale, mobile

On présente une méthode de calcul du déplacement laterale de la voie ferrée soudée, en considérant le rail comme une poutre de longueur infinie appuyée sur un milieu élastoplastique et chargée d'une force transversale concentrée, mobile, à couples distribuies, proportionnels à angle de rotation de l'axe déformé et avec une force axiale due à la dilatation contre-carrée.

En admettant le compartement du ballast similaire à celui d'un corps idéal plastique, on peut mettre en évidence les déplacements rémanents.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 621.1.01 : 621.56/.57 : 621.51

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

L'étude du rendement exergétique du processus frigorifique réel à compression de la vapeur.

Dans l'ouvrage, les auteurs présenten une synthèse sur l'étude du rendement exergétique du processus frigorifique à compression de la vapeur, réel, pour en déduire la condition optime pour le calcul. Dans ce but on fait usage de l'expression de calcul du rendement exergétique théorique du processus, on introduit deux coefficients de correction de ce rendement théorique, on établit les relations de définition et de calcul de ces coefficients, et on fait leur étude. Les relations de calcul de ces coefficients, sout établies, en considérant, l'agent frigorifique caractérisé par le coefficient adiabatique $\varkappa$, la qualité du processus caractérisée par le coefficient polytropique m, la qualité du processus gazodynamique caractérisée par le coefficient de perte de pression σ et l'échange de chaleur, caractérisée par les écarts de température ΔT_o et ΔT_c.

L étude et les conclusions sont applicables à tous les cas réels.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

C.D. 621.43.05 : 662.61 : 541.22

N. Apostolescu

La combustion de la goutte de combustible à pression élevée.

La combustion diffusive dans les moteurs Diesel et dans certaines installations modernes de turbines à gaz découle à pression élevée, qui dépasse la pression critique du combustible. Dans le but de décrire la combustion de la goutte de combustible dans ces conditions, on a construit un modèle physiquement adéquat à base du traitement nonstationnaire des processus. On a établi par ce moyen des relations de calcul pour le rayon de la flamme et la vitesse massique de combustion dans le cas où la goutte brûle dans un volume non-limité ou limité d'oxydant. L'auteur a étudié aussi le cas où l'on substitue a la goutte une source qui fournit du combustible en continuellement. Les relations de calcul établies sont adéquates aux buts techniques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

Gh. Rusiu

D.K. 539.3/.4 : 625.03 : 625.143

Seitliche Verschiebung der Eisenbahn unter der Wirkung einer beweglichen Seitenkraft.

Es wird eine Berechnungsmethode der seitlichen Verschiebung der geschweissten Eisenbahn vorgeführt, wobei die Schiene als ein Träger von endloser Länge betrachtet wird, die sich auf ein elastisches Kunststoffmediun stützt, das mit einer konzentrierten, beweglichen Querkraft, mit verteilten Drehmomenten die proportional mit dem Drehwinkel der verzogenen Achse und mit einer Axialkraft zufolge der verhinderten Dehnung belastet ist.

Unter Zulassung des Ballastverthaltens als gleichartig mit dem des idealen Kunststoffkörpers können die remanenten Verschiebungen hervorgehoben werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

D.K. 621.1.01 : 621.56/.57 : 621.51

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

Uber den exergetischen Wirkungsgrad der realen Kompressions-Kaltdampfprozesse

In dieser Arbeit werden die Anderungsbedingungen des exergetischen Wirkungsgrades eines realen Kompressions-Kaltdampfprozesses bestimmt und untersucht. Zu diesem Zwecke haben die Verfasser, den exergetischen Wirkungsgrad des theoretischen Prozesses, und zwei Korrektionsfaktoren benutzt. Die Korrektionsfaktoren wurden als analytische Beziehungen, unter Berücksichtigung des vom adiabatischen Exponenten χ gekennzeichneten Kältenmittels, des vom polytrapen Exponenten m gekennzeichneten thermodynamischen Prozesses, des vom Druckverlustkoefizienten σ gekennzeichneten gasodynamischen Prozesses und des von den Temperaturgefälle ΔT_o und ΔT_c gekennzeichneten Wärmeaustausches, aufgestellt.

Die Ergebnisse sind ganz allgemein. Es werden anwendbare Nomogramme aufgestellt, die zur Wahl des optimalen Prozesses, dienen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

N. Apostolescu

D.K. 621.43.05 : 662.61 : 541.22

Verbrennung des Brennstofftropfens bei hohem Druck.

Die diffusive Verbrennung in den Diesel Motoren und in einigen modernen Anlagen mit Gasturbinen wird bei einem hohen Druck, der den kritischen Druck des Brennstoffs übertrifft, durchgeführt.

Um die Verbrennung des Brennstofftropfens unter diesen Bedingungen beschreiben zu können, wurde ein passendes physikalisches Modell ausgearbeitet, das sich auf die unstationäre Behandlung der Prozesse stützt. Mit seiner Hilfe wurden Berechnungsverhältnisse für den Flammenradius und die Massen-Verbrennungsgeschwindigkeit bestimmt und zwar für den Fall, in dem der Tropfen in einem unbegrenzten oder begrenzten Oxydiervolumen verbrennt.

Gleichzeitig wurde auch der Fall studiert, in dem der Tropfen durch eine Quelle ersetzt wird, die ununterbrochen Brennstoff liefert. Die festgelegten Berechnungsrelationen entsprechen den technischen Zwecken.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 1/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.9

CONTRIBUŢII LA STUDIUL ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE DE TIP PARABOLIC*

MARIANA CRAIU, N. ROŞCULEŢ

VIII. **Probleme la limită pentru ecuaţia :**

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \ldots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad m\text{-impar}.$$

1.1. În [1] am arătat că soluţia elementară a ecuaţiei

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \ldots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1}$$

cu m impar este dată de

$$v(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2m}}} \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \exp(-\eta_i^{2m}) \cos \dfrac{(x_i - \xi_i)\eta_i}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}} \, d\eta_i, & t - \tau > 0 \\ 0, \quad t - \tau \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul cînd $n=1$ deci de ecuaţia

$$E(u) = \frac{\partial_{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

rezultatele pentru $n>1$ transpunîndu-se cu uşurinţă.

1.2. Ecuaţia adjunctă ecuaţiei $E(u)$ este dată de

$$\mathcal{S}(u) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.4}$$

şi avem relaţia integrală

$$\iint_D [v E(u) - u \mathcal{S}(v)] \, dx \, dt =$$

$$= \int_C \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u}{\partial x^{2m-k-1}} \cdot \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \right] dt + uv dx \tag{1.5}$$

---

* Manuscris predat la redacţie la 12 mai 1968.

unde $D \subset R^2$, $C = Fr\ D$, funcţiile u, v avînd derivatele pînă la ordinul $2m$ continue în D.

Dacă $E(u) = 0$, $\mathcal{E}(v) = 0$

atunci relaţia (1.5) se scrie

$$\int_C \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u}{\partial x^{2m-k-1}} \cdot \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \right] dt + uv dx = 0 \tag{1.6}$$

1.3. Să considerăm integrala

$$F(t-\tau) = \frac{2}{\mu(m)} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}} \int_a^b \omega(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{\xi \eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta \tag{1.7}$$

cu $\omega(\xi)$ mărginită şi integrabilă $[a, b]$, $t > \tau$ şi

$$\mu(m) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{\xi \eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta \tag{1.8}$$

Tot în [1]* am arătat că

$$\lim_{t \to \tau +} F(t-\tau) = 0, \quad \text{dacă} \quad 0 < a < b.$$

$$\lim_{t \to \tau +} F(t-\tau) = \omega(0+), \quad \text{dacă} \quad a = 0, \quad b > 0$$

$$\lim_{t \to \tau +} F(t-\tau) = -\omega(-0) \quad \text{dacă} \quad a = 0, \quad b < 0 \tag{1.9}$$

$$\lim_{t \to \tau +} F(t-\tau) = \omega(+0) + \omega(-0), \quad \text{dacă} \quad a < 0, \quad b > 0$$

1.4. Să luăm în formula (1.6) pentru u, o soluţie a ecuaţiei (1.3) mărginită în D, pentru v soluţia elementară a ecuaţiei adjuncte în (ξ, τ), anume :

$$v(x, t; \xi, \tau) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta, \quad t > \tau \tag{1.10}$$

iar pentru D dreptunghiul $ABCD$, cu $A(t_1, a)$, $B(t_1, b)$, $C(t', b)$, $D(t', a)$, $a < b$, $t_1 < t < t'$ obţinem

$$\int_a^b uv \Big|_{t=t_1} d\xi + \int_b^a uv \Big|_{t=t'} d\xi + \int_{t'}^{t_1} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u}{\partial x^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \right]_{x=a} d\tau + \tag{1.11}$$

$$+ \int_{t_1}^{t'} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-1-k} u}{\partial x^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \right]_{x=b} d\tau = 0$$

Dacă facem ca $t' \to t+$ și ținem seamă de rezultatele enunțate la aliniatul 1.3 putem să enunțăm

Teorema 1.4.1. Avem relația integrală

$$u(x,t)\Big|_0 = \frac{1}{\mu(m)} \int_a^b \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\, d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi,\tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=a} d\tau + \tag{1.12}$$

$$+ \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi,\tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=b} d\tau$$

dacă $x \in (a, b)$ sau dacă $x \notin [a, b]$.

Dacă $x \in (a, b)$ relația integrală din teorema de mai sus dă valoarea funcției u în punctul (x, t) situat pe segmentul CD, cu ajutorul valorilor funcției u date pe segmentul de caracteristică AB și cu ajutorul funcției u și ale derivatelor sale parțiale $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $k = 1,2,...,2m-1$ date pe segmentele BC și AD.

Să considerăm acum punctul $(2a - x, t)$ simetricul punctului (x, t) față de punctul (a, t). Dacă $x \in (a, b)$ atunci $2a - x \notin [a, b]$.

În această ipoteză avem relația :

$$0 = \frac{1}{\mu(m)} \int_a^b \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\, d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \frac{\cos(2a - x - \xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta - \tag{1.13}$$

$$- \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi,\tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v(2a - x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=a} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi,\tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v(2a - x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=b} d\tau$$

1.5. În [1] am arătat că pentru orice α natural avem relația

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \xi)^\alpha \cdot v(x, t; \xi, \tau) = 0 \tag{1.14}$$

Demonstrăm

Lema 1.5.1. Avem relația

$$\lim_{x \to \infty} (x - \xi)^\alpha \frac{\partial^r v}{\partial x^r} = 0 \tag{1.15}$$

pentru orice α întreg $\geqslant 0$, r natural.

Demonstraţie a) Avem

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{m}}}\int_0^\infty \eta \exp(-\eta^{2m}) \sin\frac{(x-\xi)\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\, d\eta, \quad t > \tau, \tag{1.16}$$

sau, integrînd prin părţi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x-\xi}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\exp(-\eta^{2m})\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\cdot\frac{1}{x-\xi}\int_0^\infty\left[\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\,\frac{d}{d\eta}(\eta\exp(-\eta^{2m})\right]d\eta \tag{1.17}$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial v}{\partial x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\xi}\int_0^\infty\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\left[\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m}}}\,\frac{d}{d\eta}(\eta\exp(-\eta^{2m})\right]d\eta$$

deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

deoarece integrala este mărginită pentru orice x.

Prin derivări succesive în 1.16 sau 1.17 rezultă că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial^r v}{\partial x^r} = 0, \quad r = 0,1,2,\ldots \tag{1.18}$$

b) În [1] am arătat că soluţia elementară v verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} + \frac{1}{2m}\,\frac{x-\xi}{t-\tau}\,v = 0 \tag{1.19}$$

Derivînd această relaţie în raport cu x, obţinem

$$\frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} + \frac{1}{2m}\,\frac{v}{t-\tau} + \frac{1}{2m}\cdot\frac{x-\xi}{t-\tau}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

de unde rezultă că,

$$\lim_{x\to\infty}(x-\xi)\frac{\partial v}{\partial x} = -\lim_{x\to\infty} v - 2m(t-\tau)\lim_{x\to\infty}\frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} = 0$$

Derivînd relaţia (1.19) de r ori în raport cu x şi trecînd la limită obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(x-\xi)\frac{\partial^r v}{\partial x^r} = 0, \quad r = 0,1,2,\ldots \tag{1.20}$$

Dacă înmulțim relația (1.19) cu (x—ξ), o derivăm de r ori în raraport cu x și ținem seama de (1.18) și (1.20) obținem :

$$\lim_{x \to \infty} (x-\xi)^2 \frac{\partial^r v}{\partial x^r} = 0$$

În modul acesta putem obține relația (1.15) pentru orice α natural. Lema este demonstrată.

Relațiile 1.14 și 1.15 sînt adevărate și pentru $x \to -\infty$.

1.5. Dacă

$$\left| \frac{\partial^k u(\xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right| < A |\xi|^p + B$$

pentru $p \in N$ cînd $\xi \in [a, +\infty)$ atunci

$$\left. \frac{\partial^k u(\xi, \tau)}{\partial \xi^k} \cdot \frac{\partial^h v(2a-x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^h} \right|_{\xi=b} \to 0$$

cînd $b \to \infty$. Făcînd deci pe $b \to \infty$, 1.12 și 1.13 obținem

Teorema 1.5.1. Fie $u(x, t)$ o soluție a ecuației (1.3) care în semibanda $\mathfrak{B}$: $[a, +\infty) \times [t_1, t]$ satisface condițiile

$$\left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| < A |x|^p + B, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{1.21}$$

pentru p natural oricît de mare ; atunci pentru $(x, t) \in \mathfrak{B}$ au loc relațiile

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_a^\infty \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta - \tag{1.22}$$

$$- \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=a} d\tau$$

și

$$0 = \frac{1}{\mu(m)} \int_a^\infty \frac{u(\xi; t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^\infty \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(2a-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta - \tag{1.23}$$

$$- \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^t \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \cdot \frac{\partial^k v(2a-x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=a} d\tau$$

Deoarece pentru k impar avem

$$\left. \frac{\partial^k v(2a-x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=a} + \left. \frac{\partial^k v(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=a} = 0$$

iar pentru k par

$$\frac{\partial^k v(2a-x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi^k}\bigg|_{\xi=a} = \frac{\partial^k v(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi^k}\bigg|_{\xi=a}$$

putem să enunţăm

Teorema 1.5.2. Fie $u(x, t)$ o soluţie a ecuaţiei (1.3) care în semibanda $\mathfrak{B}:[a,+\infty)\times[t_1,t]$ satisface condiţiile (1.21); pentru $(x,t)\in\mathfrak{B}$ avem

$$u(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_0^{\infty}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\,d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\left[\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}+\right. \tag{1.24}$$

$$\left.+\cos\frac{(2a-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\right]d\eta-\frac{2}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^{2m-2k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-2k-1}}\,\frac{\partial^{2k}v}{\partial\xi^{2k}}\right]_{\xi=a}d\tau$$

şi

$$u(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_a^{\infty}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\,d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\left[\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}-\right. \tag{1.25}$$

$$\left.-\cos\frac{(2a-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\right]d\eta+\frac{2}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2m-2k}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-2k}}\,\frac{\partial^{k-1}v}{\partial\xi^{2k-1}}\right]_{\xi=a}d\tau$$

Demonstraţie. Prima formulă se obţine adunînd cele două relaţii din teorema precedentă. Formula (1.24) ne dă valorile soluţiei $u(x, t)$ în $\mathfrak{B}$ cu ajutorul valorilor ei pe semiaxa $[a,+\infty]$ şi ale derivatelor impare $u_{x^k}^{(2k)}$ pe segmentul $[t_1, t]$.

A doua formulă se obţine scăzînd relaţia (1.23)) din (1.22) şi ne dă valorile soluţiei $u(x, t)$ în $\mathfrak{B}$ cu ajutorul valorilor ei pe semiaxa $[a, +\infty)$ şi ale derivatelor pare $u_{x^k}^{(2k)}$ pe segmentul $[t_1, t]$.

1.6. Să considerăm acum şi punctul $(2b—x, t)$ simetricul punctului (x, t) faţă de punctul (b, t). Dacă (x, t) se găseşte pe segmentul CD atunci $(2b\text{-}x, t)$ este exterior acestui segment.

În această ipoteză avem relaţia

$$0=\frac{1}{\mu(m)}\int_a^{b}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\,d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(2b-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\,d\eta- \tag{1.26}$$

$$-\frac{1}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{\partial^{2m-k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-k-1}}\,\frac{\partial^k v(2b-x,t;\xi,\tau)}{\partial\xi^k}\right]_{\xi=a}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{\partial^{2m-k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-k-1}}\cdot\frac{\partial^k v(2b-x,t;\xi,\tau)}{\partial\xi^k}\right]_{\xi=b}d\tau$$

Relațiile (1.15) sînt adevărate și cînd $x \to -\infty$

Teorema 1.6.1. Fie $u(x, t)$ o soluție a ecuației (1.3) care în semibanda $\mathfrak{B}^* : (-\infty, b] \times [t_1, t]$ satisface condițiile

$$\left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| < A + B|x|^p, \quad k = 0.1, \ldots, 2m-1 \tag{1.27}$$

pentru p natural oricît de mare; pentru $(x, t) \in \mathfrak{B}^*$ au loc relațiile

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{b} \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta + \tag{1.28}$$

$$+ \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^{t} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=b} d\tau,$$

și

$$0 = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{b} \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(2b-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta + \tag{1.29}$$

$$+ \frac{1}{\mu(m)} \int_{t_1}^{t} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{\partial^{2m-k-1} u(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2m-k-1}} \frac{\partial^k v(2b-x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^k} \right]_{\xi=b} d\tau$$

Din acest rezultat deducem și:

Teorema 1.6.2. Fie $u(x, t)$ o soluție a ecuației (1.3) care în semibanda $\mathfrak{B}^*$ satisface condițiile (1.27); pentru $(x, t) \in \mathfrak{B}^*$ avem

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{b} \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \left[\cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} + \right. \tag{1.30}$$

$$\left. + \cos \frac{(2b-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} \right] d\eta + \frac{2}{\mu(m)} \int_{t_1}^{t} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^{2m-2k-1} u(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2m-2k-1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^{2k} v(2b-x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi^{2k}} \right]_{\xi=b} d\tau$$

şi

$$u(x,t)=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{b}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\left[\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{(2b-x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}\right]d\eta-\frac{2}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2m-2k}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-2k}}\cdot\right. \tag{1.31}$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^{2k-1}v(2b-x,t;\xi,\tau)}{\partial\xi^{2k-1}}\right]_{\xi=b}d\tau$$

1.7. În relaţia (1.12) să înlocuim dreptunghiul $ABCD$ cu dreptunghiul $ADC'B'$ unde $C'(2a\text{-}b, t)$, $B(2a\text{-}b, t_1)$.

În această situaţie $(x, t) \notin C'D$ şi relaţia (1.12) se scrie

$$0=\frac{1}{\mu(m)}\int_{2a-b}^{a}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2n}}}d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{\partial^{2m-k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-k-1}}\cdot\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\Big]_{\xi=a}d\tau- \tag{1.32}$$

$$-\frac{1}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{\partial^{2m-k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-k-1}}\cdot\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\right]_{\xi=2b-a}d\tau$$

iar dacă facem pe $b\to+\infty$ obţinem

$$0=\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{a}\frac{u(\xi,t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\mu(m)}\int_{t_1}^{t}\left[\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{\partial^{2m-k-1}u(\xi,\tau)}{\partial\xi^{2m-k-1}}\cdot\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\right]_{\xi=a}d\tau \tag{1.33}$$

iar dacă însumăm pe (1.22) cu (1.33) obţinem

Teorema 1.7.1. Fie $u(x, t)$ o soluţie a ecuaţiei (1.3) care în banda $\mathfrak{B}: (-\infty, +\infty)\times[t_1, t]$ satisface condiţiile

$$\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|<A+B|x|^p,\ k=0,1,\ldots,2m-1,\ A>0,\ B>0$$

pentru p natural oricît de mare. Pentru $(x, t) \in \mathfrak{B}$ are loc formula de tip Poisson

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi, t_1)}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta$$

unde am notat

$$\mu(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{(t-t_1)^{\frac{1}{2m}}} d\eta$$

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Marcel N. Roșculeț*, Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. III. Problema lui Cauchy pentru o clasă de ecuații cu derivate parțiale de ordin superior. Bul. Inst. polit. București, tom. XXIII, 1961, fas. IV.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

C.Z.: 512.3 : 517.5

SUR LES POLYNOMES FONCTIONNELS *

I. M. MIU

Dans ce qui suit nous étudierons les opérateurs qui se présentent sous forme de polynômes fonctionnels d'ordre n ainsi :

$$P(\delta) = a_0(M)\,\delta^n + a_1(M)\,\delta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(M)\,\delta^1 + a_n(M)\,\delta^0, \qquad (1)$$

où $a_i(M)$ sont fonctions de point M définies sur un domaine $\overline{D}$ conexe, et δ este un opérateur fonctionnel.

Soit $\theta(M)$ un certain argument functionnel. Pour chaque point $M \in \overline{D}_0$ nous faisons correspondre la suite des itérats consecvents :

$$M_1 = \theta(M), M_2 = \theta(M_1) = \theta_2(M), \ldots M_i = \theta(M_{i-1}) = \theta_i(M), \; i \in N.$$

Nous avons noté :

$$\delta^j f(M) = f(M_j) = f_j(M), \delta^0 f(M) = f(M) = f_0(M). \; j \in N.$$

où $f(M)$ est une fonction dans un certain espace.

Analogue si on conidère succesive les fonctions inverses des itérats quand elles existent, nous avons les itérats antécedentes :

$$M_{-1} = \theta_{-1}(M), \theta(\theta(M_{-1})) = M, M_{-i} = \theta_{-1}(M_{-i+1}) = \theta_{-i}(M),$$
$$\text{et: } \delta^{-j} f(M) = f(M_{-j}) = f_{-j}(M), \; i, j \in N.$$

CHAPITRE I

Opérations avec des polynômes fonctionnels

a) *Divisions de deux polynômes fonctionnels*

Soit les polynômes fonctionnels :

$$F(\delta) = a_0(M)\,\delta^n + a_1(M)\,\delta^{n-1} + \ldots + a_n(M)\,\delta^0$$
$$Q(\delta) = b_0(M)\,\delta^m + b_1(M)\,\delta^{m-1} + \ldots + b_m(M)\,\delta^0, \; m \leqslant n.$$

*Ouvrage reçu chez rédaction à 2 Mars 1968.

La division à droit entre ces polynômes est defini par la rélation :

$$\frac{F(\delta)}{[Q(\delta)]_d} = [S_1(\delta)]_g + \frac{R_1(\delta)}{[Q(\delta)]_d},$$

de telle sorte que nous avons : $F(\delta) \equiv S_1(\delta)\, Q(\delta) + R_1(\delta)$, d et s signifient droit et gauche.

Analogue, nous definissons la division à gauche par la rélation :

$$\frac{F(\delta)}{[Q(\delta)]_g} = [S_2(\delta)]_d + \frac{R_2(\delta)}{[Q(\delta)]_g},$$

de telle sorte qu'on a : $F(\delta) \equiv Q(\delta)\, S_2(\delta) + R_2(\delta)$

Les divisions se fait comme aux polynomes différentiels [6] et R_1, R_2 sont polynomes fonct. avec les ordres $< m$.

b) *Le plus grand commun diviseur à droit et à gauche de deux polynôme fonctionnels*

Le plus grand commun diviseur à droit $[F(\delta), Q(\delta)]_d$ des polynômes fonctionnels $F(\delta)$, $Q(\delta)$ se trouve analoque comme dans les cas des polynômes différéntiels [6].

Nous avons :

$$\frac{F(\delta)}{[Q(\delta)]_d} = [S_1(\delta)]_g + \frac{R_1(\delta)}{[Q(\delta)]_d},$$

où $F(\delta) = S_1(\delta)\, Q(\delta) + R_1(\delta)$.

De la rélation précédente on voit que $[F, Q]_d = [Q, R_1]_d$

On a :

$$\frac{Q(\delta)}{[R_1(\delta)]_d} = [S_2(\delta)]_g + \frac{R_2(\delta)}{[R_1(\delta)]_d},$$

où $Q(\delta) = S_2(\delta)\, R_1(\delta) + R_2(\delta)$,

et il résulte :

$$[F, Q]_d = [Q, R_1]_d = [R_1, R_2]_d$$

On continue de cette manière jusqu'on trouve une reste $R_f(\delta)$ (evéntuel même $Q(\delta)$) qu'il fasse la division exacte. Nous avons

$$[F, Q]_d = R_f(\delta).$$

Le plus grans commun diviseur à gauche $[F(\delta), Q(\delta)]_g$ des polynômes fonctionnels $F(\delta)$, $Q(\delta)$ se trouve analoguement avec cette différence que les divisions se font à gauche.

c) La dérivée d'un polynôme fonctionnel

Définition. On nomme la dérivé d'un polynôme fonctionnel donné par (1) l'expression :

$$P'(\delta) = n\, a_0\, \delta^{n-1} + (n-1)\, a_1\, \delta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, \delta^0$$

Soit les polynômes fonctionnels :

$$P_1(\delta) = a_0\delta^{n_1} + a_1\delta^{n_1-1} + \ldots + a_{n_1}\delta^0,\ P_2 = b_0\delta^{n_2} + b_1\delta^{n_2-1} + \ldots + b_{n_2}\delta^0,$$

. . . . . .

$$P_s(\delta) = l_0\delta^{n_s} + l_1\delta^{n_s-1} + \ldots + l_{n_s}\delta^0$$

où les coéfficients sont fonctions de point $M \xi \bar{D}$.

Nous avons les théorèmes suivants :

Théorème : La dérivée d'une somme de polynômes fonctionnels est égale avec la somme des dérivées de chaque polynôme.

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_s)' = P_1' + P_2' + \ldots + P_s'.$$

Théorème : La dérivée d'un produit de polynômes fonctionnels se fait ainsi :

$$[P_1 P_2 \ldots P_s] = P_1'(P_2)_1 \ldots (P_s)_1 + P_1 P_2'(P_3)_1 \ldots (P_s)_1 + \ldots$$

$$\ldots + P_1 P_2 \ldots P_{s-1}'(P_s)_1,$$

où nous avons :

$$(P_2)_1 = b_0^1\delta^{n_2} + b_1^1\delta^{n_2-1} + \ldots + b_{n_2}^1\delta^0, \text{ etc...}$$

Nous avons noté l'itération des coefficients ainsi :

$$b_j^1 = b_j(\theta(M)) = b_j(M_1),\ M_1 = \theta(M),\ b_j^i = b_j(M_i) = b_j^i(M).$$

Démonstration : Dans le cas des deux polynômes il faut démontrer

$$(P_1 P_2)' = P_1'(P_2)_1 + P_1 P_2'.$$

On a :

$$(P_1 P_2)' = \sum_{j=0}^{n_1}\left(a_j\delta^{n_1-j}\sum_{i=0}^{n_2} b_i\delta^{n_2-i}\right)' = \sum_{j=0}^{n_1}\left(a_j\sum_{i=0}^{n_2} b_i^{n_1-j}\delta^{n_1+n_2-i-j}\right)' =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2}(n_1 + n_2 - i - j)\, a_j\, b_i^{n_1-j}\delta^{n_1+n_2-i-j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2}[(n_1 - j)\, a_j\delta^{n_1-j-1}\, b_i^1\delta^{n_2-i} + (n_2 - i)\, a_j\delta^{n_1-j} b_i\delta^{n_2-i-1}]$$

$$(P_1 P_2)' = P_1'(P_2)_1 + P_1 P_2'$$

Pour trois polynômes nous avons

$$(P_1 P_2 P_3)' = P_1'(P_2 P_3)_1 + P_1(P_2 P_3)' = P_1'(P_2)_1(P_3)_1 +$$

$$+ P_1 P_2'(P_3)_1' + P_1 P_2 P_3'.$$

Pour un produit de s polynômes la démonstration se fait par induction complet.

d) *Régles d'itération*

Dans ce qui va suivre nous notons :

Avec $P^{(k)}$, $k \in Z$, l'itération d'ordre k d'un polynôme.

Avec $(P)_r$, $r \in Z$, l'itération d'ordre r des coefficients de polynôme P c'est-a-dire :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \delta^{n-i}\right)_r = \sum_{i=0}^{n} a_i^r \delta^{n-i}$$

Nous avons les régles :

L'itération d'un terme de polynôme fonctionnel se fait en itérant ainsi

$$(a\,\delta^j)^k = a^k\,\delta^{j+k}$$

l'itération d'un somme de polynôme fonctionnels en nombre finit se fait en itérant chaque polynôme :

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_s)^{(p)} = P_1^{(p)} + p_2^{(p)} + \ldots + p_s^{(p)}$$

l'itération d'un produit de polynômes fonctionnels se fait ainsi :

$$[P_1\,P_2 \ldots P_s]^{(p)} = (P_1)_{p_1}^{(p-p_1)}\,(P_2)_{p_2}^{(p_1-p_2)} \ldots (P_{s-1})_{p_{s-1}}^{(p_{s-2}-p_{s-1})}\,P_s^{(p_{s-1})},$$

$$p_1, p_2, \ldots p_s \in Z.$$

Démonstration. Pour le produit des deux polynômes il faut démontrer :

$$(P_1\,P_2)^{(p)} = (P_1)_{p_1}^{(p-p_1)}\,P_2^{(p_1)} \tag{2}$$

On a

$$(P_1\,P_2)^{(p)} = \left(\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} a_i\,b_j^{n_1-i}\,\delta^{n_1+n_2-i-j}\right)^{(p)} = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} a_i^p\,\binom{p+n_1-1}{j}\,\delta^{p+n_1+n_2-i-j}$$

En partant de deuxième membre de (2) on a :

$$(P_1)_{p_1}^{p-p_1}\,P_2^{(p_1)} = \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i\,\delta^{n_1-i}\right)_{p_1}^{(p-p_1)}\left(\sum_{j=0}^{n_2} b_j\,\delta^{n_2-j}\right)^{(p_1)} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i^p\,\delta^{p+n_1-p_1-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2} b_j^{p_1}\,\delta^{n_2+p_1-j}\right) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} a_i^p\,b_j^{p+n_1-i}\,\delta^{p+n_1+n_2-i-j}.$$

Dans le cas général on a :

$$(P_1\,P_2 \ldots P_s)^{(p)} = (P_1)_{p_1}^{(p-p_1)}\,(P_2\,P_3 \ldots P_s)^{(p_1)} = (P_1)_{p_1}^{(p-p_1)}\,(P_2)_{p_2}^{(p_1-p_2)}\,(P_3\,P_4 \ldots P_s)^{(p_2)} =$$

$$= (P_1)_{p_1}^{(p-p_1)}\,(P_2)_{p_2}^{(p_1-p_2)} \ldots (P_{s-1})^{(p_{s-2}-p_{s-1})}\,P^{(p_{s-1})}.$$

CHAPITRE II

Polynômes fonctionnels adjoints

a) *Définitions du polynôme fonctionnel adjoint*

Soit le polynôme fonctionnel :

$$P(\delta) = \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + a_2 \delta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\delta^1 + a_n \delta^0, \qquad (1^*)$$

où $a_i = a_i(M)$, $M \in \overline{D}$.

Popovici [7] met l'équation fonctionnele linéaire d'ordre n sous forme d'un produit de facteurs fonctionnels de premier ordre.

Dans ce qui suit nous allons mettre le polynôme fonctionnel (1*) sous forme de produit de facteurs fonctionnel de premier ordre, ainsi

$$P(\delta) = (\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)(\delta^1 - \lambda_2 \delta^0) \ldots (\delta^1 - \lambda_n \delta^0)$$

Si nous pouvons déterminer les fonctions λ_j, la résolution d'équation functionnelle $P(\delta)f = 0$ se réduit à résolutions d'équations fonctionnelles de prémier ordre.

— On divise à droit le polynôme (1*) par $\delta^1 - \lambda\delta^0$.

Nous trouvons les coefficients b_j et le reste à droit R_d par division ou par identification. On a :

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \lambda^{n-1} + a_1 \\ b_2 &= \lambda^{n-1}\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-2} + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} &= \lambda^{n-1}\lambda^{n-2}\ldots\lambda^1 + a_1\lambda^{n-2}\lambda^{n-3}\ldots\lambda^1 + \ldots + a_{n-2}\lambda^1 + a_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$R_d = \lambda^{n-1}\lambda^{n-2}\ldots\lambda^1\lambda + a_1\lambda^{n-2}\lambda^{n-3}\ldots\lambda^1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

La condition que la division se fait exacte est :

$$R_d = \lambda^{n-1}\lambda^{n-2}\ldots\lambda^1\lambda + a_1\lambda^{n-2}\lambda^{n-3}\ldots\lambda^1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

L'équation (4) en λ a été nommée l'équation déterminante.

Nous donnons l'interpretation d'équation (4) comme la condition que la division à droit du polynôme $P(\delta)$ par $\delta^1 - \lambda\delta^0$ se fasse exacte.

On procede analoque comme à la définition des équations différentielles linéaires adjoint et comme aux polynômes différentiels adjoints à droit et à gauche [6], [9].

En tenant compte de cette remarque, nous pouvons nommer le polynôme fonctionnel $P(\delta)$ son propre adjoint à droit et l'équation (4) l'équation fonctionnelle déterminante à droit de l'équation $P(\delta)f = 0$.

Le polynôme $P(\delta)$ se nomme le polynôme associé de l'équation (4). Si λ est une solution de l'équation (4) il résulte :

$$P(\delta) = (\delta^{n-1} + b_1\delta^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\delta^0)(\delta^1 - \lambda\delta^0)$$

— On divise à gauche le polynôme (1*) par $\delta^1 - \mu\delta^0$ et on a analogue:

$$P(\delta) = (\delta^1 - \mu\delta^0)(\delta^{n-1} + c_1\delta^{n-2} + c_2\delta^{n-3} + \ldots + c_{n-1}\delta^0) + R_g \qquad (5)$$

Les coéfficient et le reste R_g sont :

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \mu^{-1} + a_1^{-1} \\
c_2 &= \mu^{-1}\mu^{-2} + a_1^{-2}\mu^{-1} + a_2^{-1} \\
c_3 &= \mu^{-1}\mu^{-2}\mu^{-3} + a_1^{-3}\mu^{-1}\mu^{-2} + a_2^{-2}\mu^{-1} + a_3^{-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n-1} &= \mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n+1} + a_1^{-n+1}\mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n+2} + \ldots + \\
&\quad \ldots + a_{n-2}^{-2}\mu^{-1} + a_{n-1}^{-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$R_g = \mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n} + a_1^{-n}\mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n+1} + a_2^{-n+1}\mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}^{-2}\mu^{-1} + a_n^{-1}.$$

En itérant le reste n fois, la condition que la division se fait exacte est :

$$R_g^{(n)} = \mu^{n-1}\mu^{n-2}\ldots\mu + a_1\mu^{n-1}\mu^{n-2}\ldots\mu^1 + a_2^1\mu^{n-1}\mu^{n-2}\ldots\mu^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}^{n-2}\mu^{n-1} + a_n^{n-1} = 0 \qquad (7)$$

Cette équation est connue [3] sous le nom de deuxième équation déterminante de l'équation fonctionnelle $P(\delta)f = 0$.

La condition (7) peut s'écrire aussi sous la forme

$$R_g^{(1)} = \mu\mu^{-1}\ldots\mu^{-n+1} + a_1^{-n+1}\mu\mu^{-1}\mu^{-2}\ldots\mu^{-n+2} + a_2^{-n+2}\mu\mu^{-1}\ldots\mu^{-n+3} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}^{-1}\mu + a_n = 0 \qquad (8)$$

D'après ce qui précède, il résulte :

— Que le polynôme functionnel $P(\delta)$ a une équation déterminante à droit (4) et réciproque, étant donné l'équation (4) on peut lui écrire son polynôme associé.

— Analogue, on peut considerer l'équation fonctionnele (8) comme l'équation déterminante à droit du polynôme associé :

$$\overline{P(\delta)} = \delta^{-n} + a_1^{-n+1}\delta^{-n+1} + a_2^{-n+2}\delta^{-n+2} + \ldots + a_{n-1}^{-1}\delta^{-1} + a_n\delta^0 \qquad (9)$$

Nous disons que le polynôme fonctionnel (9) est le polynôme adjoint du polynôme fonctionnel $P(\delta)$ et il peut aussi s'écrire :

$$\overline{P(\delta)} = (\delta)^{-n} + (a_1\delta)^{-n+1} + (a_2\delta)^{-n+2} + \ldots + (a_{n-1}\delta)^{-1} + (a_n\delta)^0 \qquad (9^*)$$

Le polynôme fonctionnel adjoint (9*) nous nous rappelle,([6], [9],)le polynôme différentiel adjoint.

Si μ est une solution de l'équation (8) il résulte :

$$\overline{P(\delta)} = (\delta^{-n+1} + \varphi_1 \delta^{-n+2} + \varphi_2 \delta^{-n+3} + \ldots + \varphi_{n-1} \delta^0)(\delta^{-1} - \mu \delta^0) \quad (10)$$

Les coefficients peuvent être déterminés par identification ou par division à droit du $\overline{P(\delta)}$ par $\delta^{-1} - \mu\delta^0$. On a :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \mu^{-n+1} + a_1^{-n+1} \\
\varphi_2 &= \mu^{-n+1}\mu^{-n+2} + a_1^{-n+1}\mu^{-n+2} + a_2^{-n+2} \\
\varphi_3 &= \mu^{-n+1}\mu^{-n+2}\mu^{-n+3} + a_1^{-n+1}\mu^{-n+2}\mu^{-n+3} + \\
&\quad + a_2\mu^{-n+2}\mu^{-n+3} + a_3^{-n+3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1} &= \mu^{-n+1}\mu^{-n+2}\ldots\mu^{-1} + a_1^{-n+1}\mu^{-n+2}\ldots\mu^{-1} + \ldots + \\
&\quad \ldots + a_{n-2}^{-2}\mu^{-1} + a_{n-1}^{-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Parfois est convenable d'utiliser comme polynôme adjoint le polynôme qui résulte de $\overline{P(\delta)}$ par n itérations, c'est-à-dire :

$$A(P) = [\overline{P(\delta)}]^{(n)} = (a_n \delta)^n + (a_{n-1}\delta)^{n-1} + \ldots + (a_1\delta)^1 + \delta^0 \quad (9')$$

b) *Théorèmes concernant le polynôme fonctionnel adjoint*

Théorème I. Le polynôme fonctionnel adjoint d'une somme de polynômes fonctionnels en nombre fini, est egal avec la somme des polynômes adjoints des termes.

Théorème II. Le polynôme fonctionnel adjoint d'un produit de polynômes fonctionnels en nombre fini, est egal avec le produit des polynomes adjoints en ordre inverse :

$$\overline{P_1(\delta)\ P_2(\delta)\ldots P_m(\delta)} = \overline{P_m(\delta)}\ \overline{P_{m-1}(\delta)}\ldots\overline{P_2(\delta)}\ \overline{P_1(\delta)}.$$

Démonstration : Soit μ une solution de l'équation déterminante à gauche (7). La solution μ satisfait les rélations (5), (10).

$$\left.\begin{aligned}
P(\delta) &= (\delta^1 - \mu\delta^0)(\delta^{n-1} + c_1\delta^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\delta^0) \\
\overline{P(\delta)} &= (\delta^{-n+1} + \varphi_1\delta^{-n+2} + \ldots + \varphi_{n-1}\delta^0)(\delta^{-1} - \mu\delta^0)
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Les coefficients c_j, φ_j sont donnés par (6) et (11). Dans les rélations (12) on a :

$$\delta^{-1} - \mu\delta^0 = \overline{\delta^1 - \mu\delta^0} \quad (13)$$

$$S(\delta) = \delta^{-n+1} + \varphi_1\delta^{-n+2} + \ldots + \varphi_{n-1}\delta^0 = \overline{P_1(\delta)}, \quad (14)$$

ou

$$P_1(d) = \delta^{n-1} + c_1\delta^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\delta^0 \quad (15)$$

La rélation (13) est évidente. Pour démontrer la rélation (14) on observe que les indices d'itération du polynôme $S(\delta)$ satisfont les conditions du polynôme adjoint du $P_1(\delta)$ donné par (15).

De relations (3) et (11) on a :

$$c_j = \mu^{-1}\mu^{-2}\dots\mu^{-j} + a_1^{-j}\mu^{-1}\mu^{-2}\dots\mu^{-j+1} + a_2^{-j+1}\mu^{-1}\mu^{-2}\dots\mu^{-j+2} + \dots$$

$$\dots + a_{j-1}^{-2}\mu^{-1} + a_j^{-1}$$

$$\varphi_j = \mu^{-n+1}\mu^{-n+2}\dots\mu^{-n+j} + a_1^{-n+1}\mu^{-n+2}\dots\mu^{-n+j} + a_2^{-n+2}\mu^{-n+3}\dots\mu^{-n+j} + \dots$$

$$\dots + a_{j-1}^{-n+j-1}\mu^{-n+j} + a_j^{-n+j}.$$

De là, resulte :

$$\varphi_j = (c_j)^{-(n-1)+j} \tag{16}$$

En tenant compte de (16) les relations (12) peuvent s'écrire :

$$P(\delta) = (\delta^1 - \mu\delta^0)P_1(\delta),\quad \overline{P(\delta)} = \overline{P_1(\delta)}\,\overline{(\delta^1 - \mu\delta^0)}$$

et de là, résulte :

$$\overline{(\delta^1 - \mu\delta^0)P_1(\delta)} = \overline{P_1(\delta)}\,\overline{(\delta^1 - \mu\delta^0)} \tag{17}$$

Soit un polynôme P(δ) sous forme de produit de facteurs fonctionnels de premier ordre :

$$P(\delta) = E_1E_2E_3\dots E_n,\ \text{où}\ E_j = \delta^1 - \mu_j\delta^0.$$

En appliquant de proche en proche le résultat on a :

$$\overline{P(\delta)} = \overline{E_n}\,\overline{E_1E_2\dots E_n} = \overline{E_n}\,\overline{E_{n-1}}\,\overline{E_1E_2\dots E_{n-2}} = \dots = \overline{E_n}\,\overline{E_{n-1}}\dots\overline{E_1}.$$

Donc on aura :

$$\overline{E_1E_2\dots E_n} = \overline{E_n}\,\overline{E_{n-1}}\dots\overline{E_2}\,\overline{E_1} \tag{18}$$

Nous mettons: $S_1(\delta) = E_1E_2\dots E_i$, $S_2(\delta) = E_{i+1}E_{i+2}\dots E_n$,

et de la rélation (18) on obtient :

$$\overline{S_1(\delta)S_2(\delta)} = \overline{S_2(\delta)}\,\overline{S_1(\delta)}$$

Théorème III. L'adjoint de l'adjoint d'un polynôme est égal avec ce polynôme : $\overline{\overline{P(\delta)}} = P(\delta)$.

Démonstration : Soit le polynôme functionnel $P(\delta)$ dont lui notons avec $\overline{P(\delta)}$ son polynôme adjoint et avec $\overline{\overline{P(\delta)}}$ le polynôme adjoint du $\overline{P(\delta)}$.

Nous avons (voir (18)) : $\overline{P(\delta)} = \overline{E}_n\overline{E}_{n-1}\dots\overline{E}_2\overline{E}_1$.

Si dans cette relation nous appliquons encore une fois la propriété énoncée dans le théorème II on aura :

$$\overline{\overline{P(\delta)}} = \overline{\overline{E_n}\,\overline{E_{n-1}}\dots\overline{E_2}\,\overline{E_1}} = \overline{\overline{E_1}}\,\overline{\overline{E^2}}\dots\overline{\overline{E_n}}$$

En tenant compte que $\overline{\overline{E}}_j = E_j$ on obtient :

$$\overline{\overline{P(\delta)}} = E_1 E_2 \dots E_n = P(\delta).$$

Théorème IV. Soit l'équation fonctionnelle $P(\delta)f = 0$ d'ordre n.

Si l'on connaissent $p < n-1$ solutions fonctionnel linéaire independentes de l'équation adjointe $\overline{P(\delta)}\varphi = 0$ dans un éspace vectoriel, l'ordre de l'équation $P(\delta)f = 0$ peut être réduite avec p unités.

En cas que l'équation fonctionelle obtenue par la réduction de l'ordre de l'équation $P(\delta)f = 0$, peut être résolue, aussi peut être resolue au moins formel, l'équation données $P(\delta)f = 0$.

Si l'on conaissent $n-1$ solutions fonctionnel linéaire indépendente de l'équation adjointe $\overline{P(\delta)}\varphi = 0$ dans un espace vectoriel, on peut déterminer, au moins formel, la solution générale de l'équation $P(\delta)f = 0$.

Démonstration : Dans le théorème et dans ce qui suit, nous supposerons qu'on peut déterminer au moins formel la solution générale pour l'équation fonctionnel linéaire d'ordre I, [7].

En cas quand l'argument fonctionnel $\theta(M)$ est une fraction rationnelle, le probléme a été étudié complétement par Fatou et Julia [2], [4]. Soit l'équation fonctionnelle et sa équation adjointe

$$P(\delta) f = E_1 E_2 \dots E_n f = 0 ; \quad \overline{P(\delta)}\,\varphi = \overline{E_n}\,\overline{E_{n-1}} \dots \overline{E_2}\,\overline{E_1}\,\varphi = 0,$$

avec $E_j = \delta^1 - \mu_j \delta^0$, $\overline{E_j} = \delta^{-1} - \mu_j \delta^0$

Si $\varphi_1(M), \varphi_2(M), \dots \varphi_p(M)$, sont p solutions fonctionnel linéaire indépendentes de l'équation adjointe $\overline{P(\delta)}\varphi = 0$ on a

$$\overline{E}_n \overline{E}_{n-1} \dots \overline{E}_2 \overline{E}_1 \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots p$$

Comme $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ sont fonctionnel linéaire indépendentes, il résulte :

$$\overline{E}_1 \varphi_1 = 0, \quad \overline{E}_2 \overline{E}_1 \varphi_2 = 0, \dots, \overline{E}_p \overline{E}_{p-1} \dots \overline{E}_1 \varphi_p = 0 \tag{19}$$

De la première équation (19) on a :

$$\mu_1 = \frac{\varphi_1^{-1}}{\varphi_1}$$

Nous posons

$$(\delta^{-1} - \mu_1 \delta^0)\varphi_2 = \left(\delta^{-1} - \frac{\varphi_1^{-1}}{\varphi_1}\delta^0\right)\varphi_2 = F_2$$

et la deuxième équation (19) donne :

$$\mu_2 = \frac{F_2^{-1}}{F_2}$$

Aussi posons :

$$(\delta^{-1}-\mu_2\delta^0)(\delta^{-1}-\mu_1\delta^0)\varphi_3=\left(\delta^{-1}-\frac{F_2^{-1}}{F_2}\delta^0\right)\left(\delta^{-1}-\frac{\varphi_1^{-1}}{\varphi_1}\delta^\circ\right)\varphi_3=F_3$$

et on obtient :

$$\mu_3=\frac{F_3^{-1}}{F_3}$$

De même manière on obtient : $\mu_4=\dfrac{F_4^{-1}}{F_4}$, ... $\mu_p=\dfrac{F_p^{-1}}{F_p}$

où:

$$F_j=(\delta^{-1}-\mu_{j-1}\delta^0)\ (\delta^{-1}-\mu_{j-2}\delta^0)\ldots(\delta^{-1}-\mu_1\delta^0)\varphi_j.$$

Nous divisions le polynôme fonctionnel $P(\delta)$ à gauche par :

$$E_1E_2\ldots E_p=\prod_{j=1}^{p}(\delta^1-\mu_j\delta^0)$$

et on obtient un polynôme fonctionnel d'ordre n-p. Dans le cas $p=n$-1 on peut déterminer toutes les fonctions $\mu_1, \mu_2,\ldots\mu_n$ et donc tout les facteurs de premier ordre du polynôme $P(\delta)$.

Observations.

1° Nous faisons la remarque que Lancaster O. [5], a trouvé l'équation adjointe seulement pour l'équation linéaire aux différences finies. L'équation adjointe de Lancaster pour l'équation linéaires aux différences finies différe de notre équation adjointe, parce qu'il a défini cette équation par une autre condition.

2° Dans ce qui précède on a vu que pour le polynôme fonctionnel :

$$P(\delta)=\delta^n+a_1\delta^{n-1}+a_2\delta^{n-2}+\ldots+a_n\delta^0$$

nous avons définie son adjoint par le polynôme :

$$\overline{P(\delta)}=\delta^{-n}+(a_1\delta)^{-n+1}+(a_2\delta)^{-n+2}+\ldots+(a_n\delta)^0$$

ou par le polynôme

$$A(P)=[\overline{P(\delta)}]^{(n)}=(a_n\delta)^n+(a_{n-1}\delta)^{n-1}+\ldots+(a_1\delta)^1+\delta^0$$

Les polynômes $P(\delta)$, $\overline{P(\delta)}$, $A(P)$, peuvent s'écrire comme produit de facteurs fonctionnels ainsi :

$$P(\delta)=\prod_{j=1}^{n}(\delta^1-\mu_j\delta^0),\quad \overline{P(\delta)}=\prod_{i=n}^{1}(\delta^{-1}-\mu_i\delta^0),$$

$$A(P)=(\delta^0-\mu_1^n\delta^1)(\delta^0-\mu_2^{n-1}\delta^1)\ldots(\delta^0-\mu_n^1\delta^1).$$

On remarque l'analogie entre le polynôme adjoint d'un polynôme fonctionnel et le polynôme différentiel.

Dans le cas d'un polynôme différentiel :

$$P(D) = D^n + A_1(x)\,D^{n-1} + \ldots + A_n(x)\,D^0,$$

$$\left(\text{où } D^i = \frac{d^i}{dx^i},\ D^i y = \frac{d^i y}{dx^i},\ D^0 y = y\right),$$

son adjoint est :

$$\overline{P(D)} = D^n - (A_1 D)^{n-1} + (A_2 D)^{n-2} + \ldots + (-1)^n (A_n D)^0,$$

où nous avons noté :

$$(A D)^m = A D^m + C_m^1 \frac{dA}{dx} D^{m-1} + \ldots + C_m^m \frac{d^m A}{dx^m} D^0,\ (A_n D)^0 = A_n D^0.$$

Si le polynôme différentiel se présente comme produit

$$P(D) = \prod_{j=1}^{n} (D^1 - q_j(x)\,D^0)$$

son adjoint est :

$$\overline{P(D)} = \prod_{i=n}^{1} (D^1 + q_j(x)\,D^0)$$

On fait la remarque que pour obtenir le polynôme adjoint pour le polynôme différentiel, et aussi pour le polynôme fonctionnel, nous avons donné une nouvelle définition fondée par la condition que le polynôme respectif soit divisible à gauche par un polynôme différentiel respectif fonctionnel de premier ordre.

3° Les conditions que le polynôme soit auto-adjoint sont :

$$a_n^n = 1,\ a_{n-1}^{n-1} = a_1,\ a_{n-2}^{n-2} = a_2, \ldots a_1^1 = a_{n-1},\ \text{ou}\ a_i^i = a_{n-i}^n.$$

4° Nous pouvons étudier aussi des polynômes de plusieurs arguments fonctionnels ainsi :

$$P(\delta, \nu) = \sum\sum a_{ij}\,\delta^i \nu^j,\ \text{où}\ (\delta^i \nu^j) f \varphi = f^i \varphi^j$$

Analogue on peut considérer un système de polynômes fonctionnels.

5° On peut étudier aussi les systèmes de polynômes adjoints à gauche ou à droit d'un polynôme fonctionnel en utilisant la nouvelle définition.

Par exemple, pour obtenir un système adjoint à droit où a gauche d'un polynôme fonctionnel $P(\delta)$ nous procédons ainsi :

On divise à droit (où a gauche) le polynôme $P(\delta)$ d'ordre n avec un polynôme d'ordre $p<n$ et on identifie le reste avec zéro. Les équations fonctionnelles qu'on obtiennent par cette identification forment le système fonctionnel adjoint à droit (où à gauche) de $P(\delta)$.

CHAPITRE III

Différents cas particuliers d'équations fonctionnelles linéaires

On peut enoncer un certain nombre de théorèmes relatif à différents cas particuliers d'équations fonctionnelles linéaires analogues avec les théorèmes étudiés dans [6] pour les polynômes différentiels. À l'encontre de polynômes différentiels, si un polynôme fonctionnel $P(\delta)$ admet un facteur à droit (ou à gauche) de première ordre, avec l'ordre de multiplicité>1, ce polynôme et le plus grand commun diviseur á droit (où à gauche) de $P(\delta)$, $P'(\delta)$ n'ont pas un facteur commun à droit (où à gauche) que dans les cas particuliers. Par exemple nous avons le cas d'exceptions pour :

$$P(\delta) = (\delta^1 - \mu_1 \delta^0)^{\alpha_1} (\delta^1 - \mu_2 \delta^0)^{\alpha_2} \dots (\delta^1 - \mu_p \delta^0)^{\alpha_p}$$

— à droit : $\alpha_p > 1$ si μ_p este une constante itérative,

— à gauche : $\alpha_1 > 1$ şi μ_1 est une constante itérative.

Dans ce deux cas nous pouvons appliquer la méthode du plus grande commun diviseur (voir [6]).

Théorème. Si un polynôme fonctionnel admet à droit et à gauche facteurs fonctionnels de première ordre, avec l'ordre de multiplicité >1, il résulte :

1° Le polynôme fonctionnel étant donné sous forme (1*) on peut lui mettre en évidence ces facteurs.

2° Pour l'équation fonctionnelle qui corresponde à ce polynôme, on peut déterminer, au moins formel, dans un espace vectoriel, les solutions particulières fonctionnel linéaires independantes, pour les facteurs à droit de premier ordre avec l'ordre de multiplicité >1.

3° Le problème est analogue comme à 2° pour les facteurs à gauche de premier ordre avec l'ordre de multiplicité >1.

4° L'ordre de l'équation fonctionnelle qui corresponde à ce polynôme peut être reduit avec la somme des ordre de multiplicité qui sont à droit et à gauche.

5° Si le polynôme fonctionnel a des facteurs de premier ordre seulement à droit ou seulement à gauche, avec l'ordre de multiplicité >1, le théorème s'applique aussi seulement pour ces facteurs.

Démonstration : Considérons le cas quand le polynôme admet à gauche un facteur fonctionnel de premier ordre, avec l'ordre de multiplicité >1.

Nous nottons pour éviter la confusion par :
suite s'il est >2.

Nous prendrons l'ordre de multiplicité$=2$, et on le détermine enscuite s'il est >2.

Nous nottons pour éviter la confusion par :
a^k l'itération de k fois de $a(M)$,
$(a)^k$ la puissance h de $a(M)$.
On a :

$$P(\delta) = (\delta^1 - \lambda \delta^0)^2 (\delta^{n-2} + A_1 \delta^{n-3} + A_2 \delta^{n-4} + \dots + A_{n-2} \delta^0)$$

En identifiant les deux membres on aura :

$$\left.\begin{aligned}
&A^2 - (\lambda^1 + \lambda) = a_1 \\
&A_2^2 - (\lambda^1 + \lambda) A_1^1 + (\lambda)^2 = a_2 \\
&A_3^2 - (\lambda^1 + \lambda) A_2^1 + (\lambda)^2 A_1 = a_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&A_{n-2}^2 - (\lambda^1 + \lambda) A_{n-3}^1 + (\lambda)^2 A_{n-4} = a_{n-2} \\
&\quad - (\lambda^1 + \lambda) A_{n-2}^1 + (\lambda)^2 A_{n-3} = a_{n-1} \\
&(\lambda)^2 A_{n-2} = a_n .
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

On a formé un système de $n+1$ équations fonctionnelles avec n fonctions inconnues $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, \lambda$.

Par éliminations et itérations succesives on obtient une équation algébrique qui donne la fonction λ. Nous nous proposons de déterminer le nombre k d'itérations du système (20) pour obtenir par elimination l'équation en λ.

On aura : $kn+n$ équations fonctionnelles avec l'inconues A_i, A_i^1 .. ... A_i^{k+2}, λ, $\lambda^1 \ldots \lambda^{k+1}$, donc en tout $(n-2)(k+3)+k+2$ inconnues.

Il faut : $kn + n = [(n-2)(k+3) + k + 2] + 1$, d'où $k = 2n - 3$.

Avec la valeur trouvée $\lambda = \lambda_1$ on divise à gauche le polnôme fonctionnel $P(\delta)$ succesivement par $(\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)^2$, $(\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)^3$, ... $(\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)^{p_1}$, jusque la division se fait exacte avec $(\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)^{p_1}$ et ne se divise pas par $(\delta^1 - \lambda_2 \delta^0)^{p_1+1}$.

Avec le quotient obtenu on procéde de même manière et on trouve le facteur $(\delta^1 - \lambda_2 \delta^0)^{p_2}$, $p_2 > 1$; et ainsi de suite.

On a :

$$P(\delta) = (\delta^1 - \lambda_1 \delta^0)^{p_1} (\delta^1 - \lambda_2 \delta^0)^{p_2} \ldots (\delta^1 - \lambda_i \delta^0)^{p_i} Q(\delta), \text{ où } p_1, p_2, \ldots p_i > 1.$$

Il résulte que l'équation $P(\delta) f = 0$ se reduit à l'équation $Q(\delta) f = 0$ et le polynôme adjoint de $P(\delta)$ est :

$$\overline{P(\delta)} = \overline{Q(\delta)} (\delta^{-1} - \lambda_i \delta^0)^{p_i} (\delta^{-1} - \lambda_{i-1} \delta^0)^{p_{i-1}} \ldots (\delta^{-1} - \lambda_1 \delta^0)^{p_1} \qquad (21)$$

De la rélation (21) il résulte qu'on peut déterminer pour l'équation $\overline{P(\delta)} \varphi = 0$, dans un espace vectoriel au moins formel, les solutions particulières, fonctionnel linéaire indépendentes, qui correspondent aux facteurs à droit que nous avons trouvés.

Pour déterminer les facteurs fonctionnels à droit de premier ordre, avec l'ordre de multiplicité >1, nous procédons analogue. Une autre méthodes est la suivante :

On détermine à gauche de $\overline{P(\delta)}$ (ou de $Q(\delta)$) les facteurs $(\delta^{-1} - \mu_1 \delta^0)^{\alpha_1}$, $(\delta^{-1} - \mu_2 \delta^0)^{\alpha_2}, \ldots (\delta^{-1} - \mu_j \delta^0)^{\alpha_j}$, et ensuite on revient à $\overline{\overline{P(\delta)}} = P(\delta)$ (ou à $\overline{\overline{Q(\delta)}} = Q(\delta)$).

Observations

1° Le problème qui se pose pour déterminer les facteurs fonctionnels de premier ordre, avec l'ordre de multiplicité >1 se reduit à un problème de résolution d'une équation algébrique.

2° Dans le cas quand les coefficients des facteurs sont constants ou constants itératives, on peut appliquer la méthode du plus grand comun diviseur de $P(\delta)$ et $P'(\delta)$ analogue comme en [6])

3° Aussi on peut énoncer des théorèmes analogues comme les théorèmes des polynômes différentiels [6], mais il faut tenir compte que les constants peuvent être constants itératives.

4° On peut étudier aussi la mise en evidence des facteurs fonctionnels à droit et à gauche d'un ordre quelquonque d'un polynôme fonctionnel $P(\delta)$ quand ces facteurs ont leurs ordre de multiplicité >1.

5° Relatif aux polynômes fonctionnels, on peut traiter divers problèmes.

Ainsi on peut étudier les facteurs communs des plusieurs polynômes fonctionnels etc.

La chaire de mathématique IV
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

LITTERATURE

1. *Bădescu, R.* — Introducere în studiul ec. funcţionale, Alternativa Fredolm — Ed. Tehnică 1959.

2. *Fatou, P.* — Sur les équations fonct. Bul. Soc. Mat. de France, Paris. T. 47, 1919.

3. *Ghermănescu, M.* — Ecuaţii funcţionale. Ed. Acad. Rep. Pop. Române, 1960.

4. *Iullia, G.* — Sur l'it. d. fonct. rat. Journal d. mat. pures et apl. VIII-e série T. I. 1918.

5. *Lancaster, O.* — Orthogonal Polynomials Defined by Difference Equation. Amer. J. Math., 63, 185—207 (1941).

6. *Miu, I. M.* — Contributions sur l'étude d. polynomes diff. Bul. Inst. Pol. Bucureşti, Tom. XXX — 1958, nr. 3.

7. *Popovici, C.* — Sur le parallélisme entre les eq. diff. et les eq. fonctionnelles C. R. Sci. Paris, 188, 763, 765 (1929).

8. *Popovici, C* — Les eq. fonc. et leurs parallélisme avec les éq. diff. Bul. Sci. Math. 35, 213—224, 232—247 (1929).

9. *Miu, I. M.* — Asupra ec. dif. adjuncte. Bul. inst. pol. Bucureşti, 1967, nr. 1.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969 Numărul 1

GEOMETRIE

C. Z.: 515 : 517 6

ASUPRA UNEI TRANSFORMĂRI BIRAȚIONAL INVOLUTIVĂ

MIHAIL ȘT. BOTEZ

Se cunosc mai multe posibilități de a obține o cubică strîmbă, care constau fie într-o generare proiectivă [1], fie mai cu seamă ca intersecție între două conuri de gradul al doilea ce au în comun o generatoare în lungul căreia nu au același plan tangent [2], la care se adaugă cazul intersecției unui hiperbolid cu o pînză cu un con de gradul al doilea ce au împreună o generatoare comună.

O altă metodă de a obține curbe strîmbe este aceia a suprafețelor monoide ale lui Cayley [3], a cărui teoremă se enunță: *„Orice curbă strîmbă este intersecția unei suprafețe monoide cu un cilindru"*.

Prin suprafață monoid, Cayley înțelege suprafața reprezentată printr-o ecuație de forma:

$$z = \theta(x, y)$$

unde θ este o funcție rațională de x și y.

În cazul cînd curba strîmbă căutată este o cubică, suprafața monoid este o cuadrică.

În ceia ce urmează, după ce se stabilește suprafața monoid, se găsește un mod de transformare pe această suprafață, care conduce la o cubică strîmbă situată pe suprafața monoid.

În acest mod, condiția de intersecție a două suprafețe pentru obținerea curbei strîmbe este înlăturată, ceia ce constituie un mod de generare a unei cubice strîmbe.

1. — Fie prin urmare două cuadrice ce au o generatoare comună ale căror ecuații se pot aduce la forma:

$$P x + Q y = 0; \quad P' x + Q' y = 0 \tag{1}$$

care împreună reprezintă cubica strîmbă, iar P, Q, P' și Q' sînt polinoame întregi de gradul întîi în x, y și z.

Dacă se aplică suprafețelor (1) o transformare omografică, ecuațiile de mai înainte devin:

$$R y - S x = 0; \quad R t - S z = 0 \tag{2}$$

---

* Comunicare susținută la sesiunea științifică a Universității din Craiova — 1968.

unde R și S sînt polinoame de gradul întîi în x, y și z, iar pentru t se poate lua $t=1$.

Din (2) rezultă :

$$\frac{R}{S}=\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$$

Făcînd $t=1$, sistemul (2) se poate scrie :

$$\begin{aligned} x &= zy \\ Ry - Sx &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

În acest caz suprafața monoid este paraboloidul hiperbolic dat de prima ecuație din (3) ; iar a doua ecuație reprezintă un cilindru de gradul al doilea.

2. — Fie un punct M situat pe parabolidul (3) și generatoarele g_1 și g_2 concurente în M. Dacă se consideră reciprocul lui M în raport cu o cuadrică de alt gen, se obține o transformare punctuală a generatoarei g_1 în reciproca ei în raport cu cuadrica considerată. Numim această cuadrică, *bază a transformării.*

Ecuațiile generatoarelor parabolidului hiperbolic :

$$(P):\ x=zy$$

sînt :

$$(g_1)\begin{cases} y=r \\ x=rz \end{cases} \qquad g_2\begin{cases} z=s \\ x=sy \end{cases} \tag{4}$$

În acest caz, punctul $M=g_1\cap g_2$, are coordonatele : rs, r, s, care verifică ecuațiile (4).

Considerăm ca bază una din cuadricele :

$$(K):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}+\frac{z^2}{\varepsilon c^2}=1;\ (\varepsilon=\pm 1) \tag{5}$$

unde a, b, c pot fi diferite între ele sau nu.

Dacă se consideră pe g_1 reciprocul M' al punctului M în raport cu cuadrica (K), se obține o transformare a punctelor M în reciprocele lor M' în raport cu cuadrica bază.

Pentruca reciprocitatea propusă $M(x, y, z)\leftrightarrow M'(x', y', z')$ să existe trebuie îndeplinită condiția

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{\varepsilon b^2}+\frac{zz'}{\varepsilon c^2}=1 \tag{6}$$

Dacă M și N sînt puncte curente pe generatoarele din sistemul g_1 și sistemul g_2, coordonatele lor vor fi : $r\alpha$, r, α și $s\beta$, β, s, unde α și β sînt parametri.

Dacă $M\in g_1$, atunci coordonatele sale sînt rs, r și s, iar un punct oarecare $M'\in g_1$ va avea coordonatele : $r\alpha$, r, α.

Presupunînd că M' este reciprocul lui M în raport cu (K), între coordonatele lor există relația :

$$\frac{r^2 \alpha s}{a^2} + \frac{r^2}{\varepsilon b^2} + \frac{\alpha s}{\varepsilon c^2} = 1. \tag{7}$$

din care rezultă :

$$\alpha = \frac{\lambda}{s}\left(\frac{\varepsilon b^2 - r^2}{\varepsilon \mu r^2 + 1}\right)$$

unde: $\lambda = \frac{c^2}{b^2}$ și $\mu = \frac{c^2}{a^2}$, sînt constante pozitive iar $\varepsilon = \pm 1$.

Prim urmare punctul M' (x' y' z') reciprocul punctului M în raport cu una din cuadricele (K) are coordonatele :

$$\begin{aligned} x' &= r\frac{\lambda}{s}\left(\frac{\varepsilon b^2 - r^2}{\varepsilon \mu r^2 + 1}\right) \\ y' &= r \\ z' &= \frac{\lambda}{s}\left(\frac{\varepsilon b^2 - r^2}{\varepsilon \mu r^2 + 1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Dacă r și s sînt coordonatele punctului M pe cuadrica (P), iar r' și s' coordonatele reciprocului său, rezultă că :

$$r = r' \text{ și } ss' = \lambda \frac{\varepsilon b^2 - r^2}{\varepsilon \mu r^2 + 1} \tag{9}$$

din care rezultă că *reciprocitatea stabilită este involutivă.*

Deci se poate enunța :

Teorema 1. *Reciprocitatea care pune în corespondență punctele unui parabolid hiperbolic în raport cu o cuadrică oarecare de tipul (5), este o transformare birațional involutivă.*

Se observă că în această transformare generatoarele g_1 sînt unite. Pe fiecare generatoare din sistemul g_1 are loc o involuție a punctelor reciproce în raport cu una oarecare din cuadricele (K) ale cărei puncte unite sînt punctele de intersecție cu cuadrica bază.

Dacă $s = s'$, a doua din relațiile (9) devine :

$$s^2 = \lambda\left(\frac{\varepsilon b^2 - r^2}{\varepsilon \mu r^2 + 1}\right) \tag{10}$$

Punînd condiția $s = 0$, pentru $\varepsilon = \pm 1$ se obține pentru $r = b$, punctul $A(b, 0, 0)$ de tangență al generatoarei cu cuadrica (K); iar pentru $r = -b$, se obține punctul $B(-b, 0, 0)$.

Dacă $s=\infty$, considerînd coordonatele omogene, pentru $r=i\frac{1}{\mu}$ se obține punctul de tangență $A_\infty\left(0,0,1,i\frac{1}{\mu}\right)$, iar pentru $r=-i\frac{1}{\mu}$ se obține punctul de tangență $B_\infty\left(0,0,1,-\frac{i}{\mu}\right)$

De unde rezultă :

Teorema 2. *Corespondența între punctele unui paraboloid și reciprocele lor în raport cu o oarecare cuadrică (K), prezintă involuții degenerate în lungul a patru generatoare.*

Considerînd s constant și r variabil în ecuațiile (8), iar pentru simplificare $\varepsilon=+1$, se obțin ecuațiile parametrice ale unei cubice strîmbe, astfel încît se poate enunța :

Teorema 3. *Transformînd prin reciprocitate punctele unei generatoare ale unei suprafețe monoid de gradul al doilea în raport cu una din cuadricele (K) se obține o cubică strîmbă.*

Cubica (Γ) :

$$x=r\frac{\lambda}{s}\left(\frac{b^2-r^2}{\mu r^2+1}\right);\ y=r;\ z=\frac{\lambda}{s}\left(\frac{b^2-r^2}{\mu r^2+1}\right) \tag{11}$$

are ca unisecante generatoarele g_1 și ca bisecante generatoarele g_2.

Dacă se consideră s ca parametru, atunci ecuația (11) reprezintă un fascicol de cubice ale cărui puncte bază sînt : A, B, A_∞, și B_∞.

Scriind [4] ecuația (11) sub forma parametrică canonică :

$$x=\frac{f_1(r)}{f_0(r)};\ y=\frac{f_2(r)}{f_0(r)};\ z=\frac{f_3(r)}{f_0(r)}$$

unde $f_i(r)$ cu $i=0, 1, 2, 3$, sînt funcții de gradul al treilea, se obțin punctele de la infinit din ecuația $f_0(r)=0$, care în cazul de față este :

$$\mu r^2+1=0\ ;\ \left(\mu=\frac{c^2}{b^2}\right)$$

de unde rezultă că punctele de la infinit corespund valorilor :

$$r=\infty;\ i\frac{c}{b};\ -i\frac{c}{b}$$

Secționînd cubica (11) cu planul S_∞ se obțin punctele corespunzătoare valorilor lui r de mai înainte, adică punctele bază A_∞ și B_∞, precum și singurul punct real ce corespunde valorii $r=\infty$.

În acest caz [4], cubica de mai înainte este o elipsă strîmbă.

Dacă $\varepsilon=-1$, cubica (8) avînd trei rădăcini reale la ∞ este o hiperbolă strîmbă.

3. — Să considerăm drept cuadrică de bază a reciprocității o sferă, adică : $\lambda=\mu=1$, atunci cubica (Γ) are ecuațiile parametrice :

$$x=r\frac{(1-r^2)}{s(1+r^2)}\,;\quad y=r\,;\quad z=\frac{1-r^2}{s\,(1+r^2)} \tag{12}$$

care avînd două puncte improprii situate pe cercul imaginar $r^2+1=0$, este o *cubică strîmbă circulară.*

Dacă această cubică este proiectată din punctul umproriu real corespunzător valorii $r=\infty$ se obține un cilindru eliptic ale cărui generatoare au ecuațiile parametrice următoare :

$$x=\frac{r(1-r^2)-\gamma}{s(1+r^2)}\,;\quad y=r+\frac{\gamma}{1+r^2}\,;\quad z=\frac{1-r^2}{s(1+r^2)} \tag{13}$$

unde γ este un parametru.

Ecuația cilindrului se obține eliminînd r și γ între ecuațiile (13). Observînd că :

$$x\,s+y=\frac{2\,r}{1+r^2}\,;\quad z\,s=\frac{1-r^2}{1+r^2} \tag{14}$$

între care eliminînd pe r, se obține ecuația :

$$(x\,s+y)^2+z^2\,s^2-1=0$$

care se mai poate scrie sub forma :

$$F(x\,y\,z\,s)=s^2(x^2+z^2)+2\,s\,x\,y+y^2-1=0 \tag{15}$$

Considerînd s parametru, ecuația (15) reprezintă o serie pătratică de cilindri circulari, cu cercurile directoare cuprinse în planul (xz).

Deoarece $F_{ss}\neq 0$, seria de cilindri (15) admite o înfășurătoare prin eliminarea parametrului s între $F=0$ și $F_s=0$, obținîndu-se astfel ecuația :

$$y^2z^2-x^2-z^2=0 \tag{16}$$

Aceasta este o suprafață riglată ale cărei generatoare sînt :

$$x=mz\,;\quad y=\pm\sqrt{1+m^2}$$

după cum se observă imediat.

Dacă suprafața (16) se exprimă parametric :

$$x=u\,;\quad y=v\,;\quad z=\frac{u}{\pm\sqrt{v^2-1}}\,,$$

se constată că suprafața înfășurătoare a seriei de cilindri (10) este irațională.

Cum cilindrii (15) sînt de revoluție cu axa perpendiculară pe planul [xz], avem satisfăcută teorema lui Cremona, după care : *o cubică strîmbă circulară aparține unei cuadrice unice de revoluție.*

(S-a considerat în ecuația (12), $s=s_0$ dat, din care a rezultat cubica unică corespunzătoare).

4. — Dacă s și r sînt coordonate pe paraboloidul *(P)* : $x=zy$, iar între aceste coordonate se presupune că există relația :

$$s = 1 - r^2$$

atunci ecuațiile (12), devin :

$$x = \frac{r}{1+r^2}\,;\quad y = r\,;\quad z = \frac{1}{1+r^2} \tag{17}$$

Se poate imediat constata că această curbă este situată pe paraboloidul *(P)*.

Deoarece la două valori opuse ale parametrului r, se obțin două puncte ale curbei cu coordonatele : $\pm x$; $\pm y$; z, rezultă că axa z este axă de simetrie. Proiectînd cubica (17) pe planul [yz] se obține cubica rațională :

$$y^2 z - z - 1 = 0,$$

cunoscută sub numele de *versieră*, și al cărui cerc fundamental are diametrul egal cu unitatea.

Ecuațiile (17) sînt îndeaproape comparabile cu ecuațiile :

$$x = \frac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2}\,;\quad y = ky\,;\quad z = \frac{2\alpha}{1+\lambda^2} \tag{18}$$

care reprezintă curba strîmbă circulară numită *oropteră*, și unde α și k sînt două lungimi date.

Pentru :

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ și } k = 1$$

se obțin ecuațiile parametrice (17).

Scriind :

$$x = \frac{2r}{2(1+r^2)}$$

din ecuațiile (17) rezultă că această oropteră aparține cilindrului circular drept :

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4} \tag{19}$$

Din cele ce preced rezultă că transformarea involutivă folosită conduce direct la cubice de diferite clase, cînd este aplicată unui monoid.

Observare. Deoarece sistemul de generatoare concurente în M este secțiunea cu planul tangent în acest punct la apraboloid, transformarea se poate extinde și la curba de secțiune cu un plan oarecare.

Catedra de matematici III
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. G. *Vrănceanu*, Geometrie Analitică, Proectivă și Diferențială. Edit. Didactică și Ped. București 1962.
2. C. *Juel...*, Einleitung in die Teorie der Ebenen Elementarkurwen driter u. vierter Ord. Mém. de l'Ac. Roy. des Sci. Danemark 7 sér. T.XI.1914.
3. *H. Laurent*, Traité D'Analyse T. IV. Edit. Gauthier-Villars. Paris
4. *Gino Loria*, Curve sghembe speciali T. 1. Edit. Zanichelli-Bologna. pg. 70—196.
5. *Gino Loria*, Curve piane speciali. Vol. I. pg. 92, Edit. Ulrico Hoepli. Milano, 1930.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

C.Z.: 515 : 624.04.

ASUPRA UNEI SIMPLIFICĂRI A EPUREI MONGE *

NICOLAE MIRESCU

Obţinerea unei epure mai simplă în Geometria Descriptivă este o problemă mereu actuală deoarece simplificarea construcţiilor geometrice conduce şi la exactitatea rezultatului ce se urmăreşte. Deasemeni se realizează şi o economie grafică.

În două studii făcute de Mihail Botez [1] şi [2] s-a ocupat de o epură cu o singură proiecţie pe care noi o vom nota cu „B". Autorul s-a folosit de un plan orizontal, ca plan al epurei şi de proecţia ortogonală a unui punct ce aparţine unei figuri plane proiectată în planul bisectorului întîi.

În ceea ce urmează îmi propun să rezolv probleme fundamentale de reprezentare, incidenţă şi adevărată mărime a unei figuri, dată prin epura de mai sus.

1. Reprezentarea dreptei şi puncte importante pe dreaptă (fig. 1)

Fie dreapta dată prin urma sa u şi punctul γ^* (autorul numeşte punct central, punctul în care dreapta intersectează bisectorul întîi).

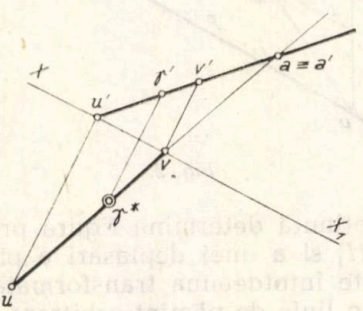


Fig. 1.

* Comunicare susţinută la sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Cluj, 10—12 oct. 1968.

Vrem să arătăm că cu aceste elemente se poate transforma epura „B" în epură Monge. Pentru aceasta se poate lua o poziție a planului vertical arbitrară, și luînd drept linie de pămînt dreapta XX_1 avem imediat că intersecția dintre XX_1 și imaginea dreptei $u\gamma^*$ este proiecția orizontală a urmei dreptei pe planul vertical ales, iar perpendiculara dusă prin u pe XX_1 este proiecția verticală (u') a urmei orizontale (u) a acestei drepte. Cum punctul γ^* are proiecția sa verticală simetrică în raport cu XX_1, se obține imediat proiecția verticală a dreptei $u'\,v'$ și prin aceasta imaginea sa obișnuită.

Punctul de intersecție dintre cele două proiecții $a \equiv a'$ este tocmai punctul unit al celor două proiecții ale dreptei din spațiu, care sînt corespondent afine.

Observare

Se observă că deplasarea punctului urmă pe proiecția dreptei, corespunde unei translații a planului orizontal, iar deplasarea punctului central în lungul proiecției drepte corespunde unei schimbări generale de plan vertical din care face parte și translația acestuia [4].

2. **Planul**

a) *Imaginea unui plan* (fig. 2)

Imaginea unui plan poate fi dată prin urma sa P și proiecția γ^* a unui punct situat pe dreapta de intersecție dintre plan și bisectorul întîi, care este punctul central al planului.

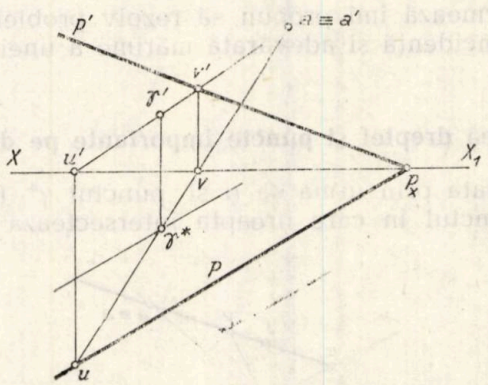


Fig. 2.

Imaginea astfel obținută determină figura proiectată în afara unei translații a planului $[H]$ și a unei deplasări a planului $[V]$. Cu aceste restricții epura „B" este întotdeauna transformată într-o epură Monge.

Astfel, dacă se ia o linie de pămînt arbitrară XX_1, dreapta $u\gamma^*$ care unește punctul central al unei drepte conținută în plan cu un punct u al urmei P a planului, este proiecția ortogonală a unei drepte a planului.

Proiecția verticală este $u'\gamma'$ a cărei urmă verticală este punctul (v, v').

Avînd două din punctele urmei verticale a planului P_x și v' rezultă că urma sa verticală este $P_x\ P'$.

Din cele de mai sus rezultă că *pentru a obține o epură Monge unică* dintr-o epură „*B*", este necesar să se cunoască linia XX_1.

b) *Poziţiile particulare ale unui plan* (fig. 3-a, b, c).

Poziţiile particulare ale unui plan faţă de planul tablou'ui ·

— plan paralel cu planul tabloului ;

— plan secant, făcînd un unghi oarecare ;

— plan perpendicular pe planul de proiecţie.

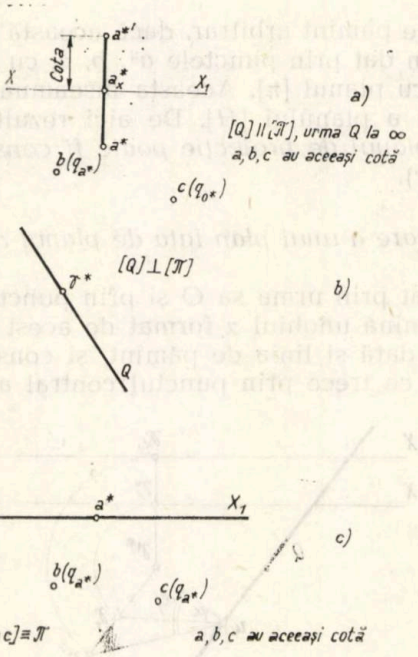


Fig. 3.

Plan paralel cu planul de proiecţie (fig. 3, a).

Un plan paralel cu planul de proiecţie este complet determinat dacă se cunosc proiecţiile a^* b c a trei puncte necoliniare care au aceiași cotă.

Într-adevăr punctul de incidenţă al dreptei de intersecţie a planului cu planul de proiecţie, arată că urma acestui plan este la ∞.

Pentru a preciza această situație a planului astfel determinat, se notează lîngă proiecția orizontală a punctelor b și c cota q_a^* a punctului a^* luat ca punct principal.

Cum toate punctele unui astfel de plan au aceiași cotă, cota punctului a_a^* în raport cu un plan vertical arbitrar, exprimă cota planului considerat.

Plan perpendicular pe planul de proiecție (fig. 3, b)

Dacă punctul γ^* este situat pe urma planului înseamnă că proiecția ortogonală a unui punct central este situat pe urma planului, iar planul respectiv este $\perp$ pe planul de proiecție ($[Q] \perp [\pi]$).

Observare

Luînd linia de pămînt arbitrar, dacă această linie se ia incidentă cu a^*, atunci un plan dat prin punctele a^*, b, c, cu urma $[Q]$ la ∞, $b\,(q_a^*)$, $c(q_a^*)$, coincide cu planul $[\pi]$. Aceasta înseamnă că s-a operat în prealabil o translație a planului $[H]$. De aici rezultă observarea că *orice plan paralel cu planul de proiecție poate fi considerat în epură identic cu acesta* (fig. 3, c).

Poziția oarecare a unui plan față de planul de proiecție (fig. 4).

Fie planul dat prin urma sa Q și prin punctul γ^*.

Putem determina unghiul α format de acest plan cu planul de proiecție, dacă este dată și linia de pămînt, și considerînd dreapta de cea mai mare pantă, ce trece prin punctul central al planului.

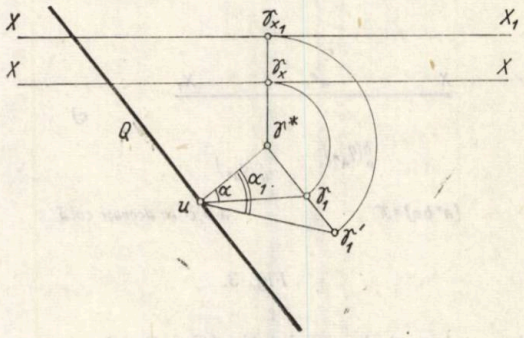


Fig. 4.

Dacă se cunoaște numai direcția liniei XX_1, putîndu-se lua arbitrar ca linie XX_1 orice dreaptă paralelă cu aceasta, *atunci unghiul este nedeterminat.* Această nedeterminare rezultă din translația planului $[V]$ paralel cu el însuși, care modifică și poziția planului bisector B_1. Dacă

însă se cunoaşte depărtarea punctului central al planului, (fig. 5), oricare ar fi linia de pământ, luată tangentă cercului, descris din punctul central al planului cu raza cît depărtarea acestui punct, se obţine un acelaşi unghi, deoarece în această transformare de reper cota punctului central este invariabilă şi egală cu raza cercului de mai înainte.

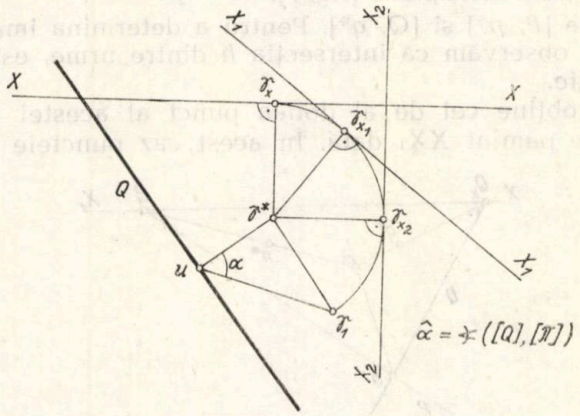


Fig. 5.

Remarcăm că în cazul acestei epure există un singur fel de linie de cea mai mare pantă. Dacă se rabate această linie de cea mai mare pantă în jurul urmei planului său proiectant $u\gamma^*$ se obţine $\Delta\gamma^*$, u, γ_1^* al cărui unghi α este egal cu unghiul dintre $[Q]$ şi $[\pi]$.

3. **Probleme de incidenţă** (fig. 6)

a) *Pentru rezolvarea problemelor de incidenţă* trebuie să se considere numai cazul corespondenţei unice între o epură „*B*" şi una Monge. Adică trebuie să fie cunoscută linia de pământ XX_1. Cu această condiţie un punct M se găseşte pe o dreaptă Δ, dacă este intersecţia acesteia cu o altă dreaptă ($u_1\gamma_1^*$) astfel încît, dreapta punctelor lor

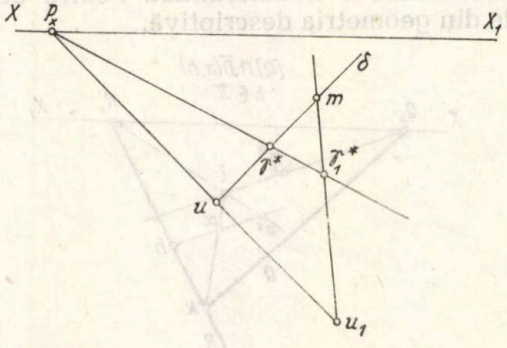


Fig. 6.

centrale $\gamma^*\gamma_1^*$, să fie concurentă cu dreapta $u\,u_1$ ce unește urmele lor în același punct P_x situat pe linia XX_1.

b) *O dreaptă aparține unui plan dacă urma sa este incidentă cu urma planului* și punctul său central aparține liniei centrale a planului.

c) *Intersecția a două plane* (fig. 7).

Fie planele $[P, p^*]$ și $[Q, q^*]$. Pentru a determina imaginea dreptei de intersecție, observăm că intersecția h dintre urme, este urma dreptei de intersecție.

Pentru a obține cel de al doilea punct al acestei drepte, considerăm linia de pământ XX_1 dată. În acest caz punctele de intersecție

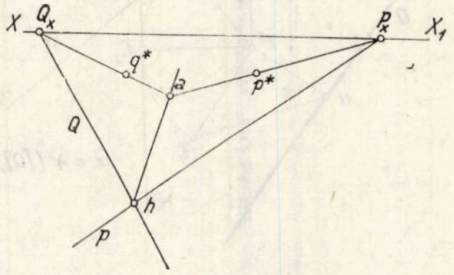


Fig. 7.

ale urmelor planelor cu această linie, P_x și Q_x, aparțin dreptei după care planele date intersectează bisectorul întîi.

Prin urmare, punctul a în care P_x p^* este concurent cu Q_x q^* este cel de al doilea punct al dreptei căutate.

Dacă linia XX_1 este arbitrară, problema este nedeterminată rezultînd un fascicol de drepte, ca drepte de intersecție, avînd ca suport punctul de intersecție al urmelor.

d) *Intersecția dintre o dreaptă și un plan* (fig. 8).

Fie planul $[Qq^*]$ și dreapta $[ha^*]$ a cărui punct de intersecție cu planul considerat urmează a fi determinat. Pentru aceasta vom folosi procedee generale din geometria descriptivă.

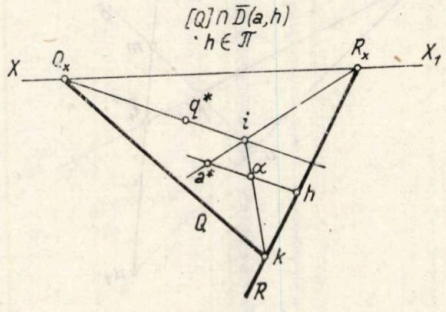


Fig. 8

Prin urmare din h se duce urma $[R]$ a unui plan ce conține această dreaptă, adică punctul central al dreptei este punct central și pentru acest plan $[R]$.

Considerînd linia de pămînt dată, determinăm dreptele $R_x a^*$ și $Q_x q^*$, a căror intersecție i determină, împreună cu intersecția k dintre $[R]$ și $[Q]$, proiecția dreptei după care cele două plane se intersectează.

Punctul de intersecție α dintre i k și h a^* este punctul căutat.

4. Probleme metrice

Se observă că în epura simplificată metoda schimbării de plan nu are sens, iar metoda rotației care implică numai existența unui ax perpendicular pe planul de proiecție, poate fi întrebuințată în cazuri cu totul excepționale.

Rămîne ca singura metodă necesară, cu remarca făcută de la început ca linia de pămînt să fie dată, numai metoda rabaterii.

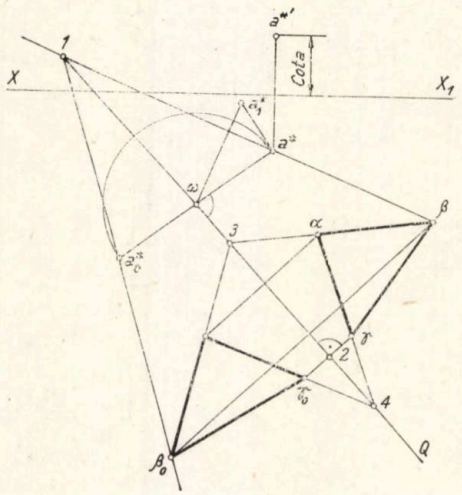


Fig. 9.

Astfel, în figura 9 este executată rabatarea unui triunghi conținut într-un plan $[Q]$ (construcțiile necesare sînt îndeaproape asemănătoare a celei din epura Monge).

*

* *

Din cele arătate se poate vedea că se poate recurge la epura „B" ori de cîte ori construcțiile sînt în număr prea mare.

Catedra de geometrie descriptivă și desen (I)
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Botez St. Mihail,* Contribuţie pentru o simplificare a sistemului Monge, într-un caz special. Revista ştiinţifică „V. Adamache" Iaşi, V.XXXII — 1964, pag. 18.

2. *Botez St. Mihail,* Sur une simplification de l'epure Monge, Bul. Inst. politehnic Bucureşti. Tomul XXI — fascicola 4, 1959.

3. *Botez Şt. Mihail,* Geometrie descriptivă. Editura didactică şi pedagogică, 1965.

4. *Mirescu Nicolae,* Asupra deplasărilor de speţa întîia în epura cu diedrul fundamental nul. Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti. Tomul XXVI — fascicola 3 — 1964.

5. *Mirescu Nicolae, Nicoară Gheorghe,* Geometrie descriptivă. Editura didactică şi pedagogică, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

FIZICĂ

C.Z. : 535 : 537.5 : 621.375.9 :681.2.089

ASUPRA DETERMINĂRII MĂRIMILOR ELIPSOMETRICE ÎN RADIAȚIILE LASER *

DIANA MOISIL

Creșterea preciziei măsurătorilor elipsometrice prin efectuarea observațiilor cu ajutorul radiației laser, nu este posibilă decît în măsura în care se folosesc formule exacte pentru calculul mărimilor elipsometrice ψ și Δ.

Avantajele oferite de utilizarea radiației laser, cum ar fi monocromaticitatea, paralelismul razelor, sau intensitatea luminoasă relativ mare sînt în bună măsură micșorate de faptul că reflexiile multiple pe fețele compensatorului devin supărătoare tocmai datorită excepționalei monocromaticități și coerențe a radiației [1]. Ca urmare a acestor reflexii multiple în interiorul lamei sfert undă, utilizată drept compensator, la ieșirea din aceasta amplitudinea undei electrice care oscilează după axa lentă diferă de amplitudinea undei electrice care oscilează după axa rapidă. Raportul T intre aceste amplitudini prezintă variații față de unitate, care pot ajunge pînă la 10% [2], ele fiind cu atît mai ample cu cît monocromaticitatea și coerența sînt mai bune.

Prezența factorului $T \neq 1$ determină apariția unor discrepanțe între citirile mărimilor elipsometrice efectuate în diferite cadrane, fapt semnalat pentru prima dată de McCrackin [3]. Recent au apărut cîteva lucrări [1], [4], [5], în care se dau formulele exacte pentru determinarea mărimilor ψ și Δ, în cazul în care compensatorul prezintă un raport $T \neq 1$ și introduce o diferență de fază δ diferită de $\frac{\pi}{2}$. În lucrările menționate, piesele componente ale elipsometrului sînt dispuse astfel: sursă, polarizor, compensator, suprafață reflectătoare, analizor, detector. În cazul în care piesele componente ale elipsometrului sînt astfel aranjate încît compensatorul este situat între suprafața reflectătoare și analizor (figura 1), formulele diferă de cele obținute în cazul primului montaj.

* Manuscris predat la redacție la 25 iulie 1968.

În prezenta lucrare se stabilesc formulele pentru montajul din fig. 1, în cele două variante de lucru : compensator fix și polarizor mobil, respectiv polarizor fix și compensator mobil. În ultima parte a lucrării se compară formulele astfel stabilite.

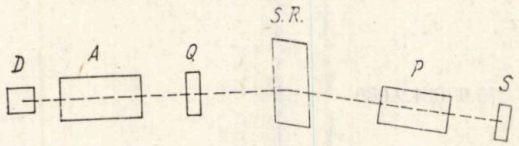


Fig. 1

Punerea problemei

Pentru fixarea ideilor se iau azimuturile de la planul de incidență, pozitive în sens trigonometric (fig. 2). Prin p s-a notat planul de incidență, prin s planul de suprafață, iar prin P și Q — azimuturile polarizorului, respectiv compensatorului (axa rapidă). Lumina liniar polarizată emergentă din polarizor are componentele $E_p = E \cos P$ după

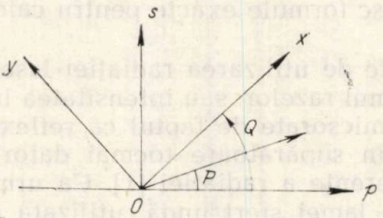


Fig. 2.

planul de incidență și $E_s = E \sin P$ după normala la planul de incidență. În urma reflexiei pe eșantion, aceste componente devin :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p &= E'_p e^{i\delta_p} = \tilde{c}_p E_p \\ \tilde{E}_s &= E'_s e^{i\delta_s} = \tilde{c}_s E_s \end{aligned} \tag{1}$$

cu $\tilde{c}_p$ și $\tilde{c}_s$ constante complexe.

Mărimile măsurate experimental în elipsometrie, ψ și Δ sînt definite prin ecuația fundamentală a elipsometriei :

$$\operatorname{tg} \psi \, e^{i\Delta} = \frac{\tilde{E}_p}{E_p} \cdot \frac{E_s}{\tilde{E}_s}$$

Se observă că raportul $\tilde{E}_p/\tilde{E}_s$ diferă de E_p/E_s prin factorul $\operatorname{tg} \psi \cdot e^{i\Delta}$.

După trecerea luminii prin lama Q, componenta după axa lentă va fi întîrziată cu δ în raport cu componenta după axa repede, iar amplitudinile după cele două axe vor diferi cu un factor T. Evident, pen-

tru calcul, înainte de intrarea luminii în compensator, componentele vectorului electric din planul de incidență și cea normală la acest plan trebuiesc proiectate pe direcțiile axelor lentă și rapidă ale lamei ; este așadar necesar să se aplice o matrice de rotație. Avînd în vedere că la trecerea luminii prin diferitele piese componente ale elipsometrului, starea de polarizare a acesteia este modificată după cum s-a arătat, se poate scrie :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Te^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos Q & \sin Q \\ -\sin Q & \cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\psi\, e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix} \tag{3}$$

în care $\widetilde{E}_x$ și $\widetilde{E}_y$ sînt componentele după axele rapidă și lentă la ieșirea din compensator. Dacă se notează

$$\cos P \cos Q = k_1 \qquad \sin P \cos Q = k_3$$

$$\sin P \sin Q = k_2 \qquad \cos P \sin Q = k_4$$

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{E}_x = k_1 \operatorname{tg}\psi \cos\Delta + k_2 + i\, k_1 \operatorname{tg}\psi \sin\Delta = E_x\, e^{i\varphi_x} \\ &\widetilde{E}_y = T\left\{k_3 \cos\delta - k_4 \operatorname{tg}\psi \cos(\Delta-\delta) - \right. \\ &\left. -i\left[k_3 \sin\delta + k_4 \operatorname{tg}\psi \sin(\Delta-\delta)\right]\right\} = E_y\, e^{i\varphi_y} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pentru a se obține extincția este necesar ca lumina care iese din compensator să fie liniar polarizată, deci $\varphi_x = \varphi_y$. Această condiție conduce la următoarea ecuație :

$$k_1 k_4 \operatorname{tg}^2\psi \sin\delta - \left[k_2 k_4 \sin(\Delta-\delta) + k_1 k_3 \sin(\Delta+\delta)\right] \operatorname{tg}\psi - k_2 k_3 \sin\delta = 0 \tag{5}$$

Compensator fix. Dacă extincția se realizează numai prin rotirea analizorului și a polarizorului, se fixează de preferință compensatorul cu azimutul la $\pm\frac{\pi}{4}$ față de planul de incidență. Atunci :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_3 \sin\Delta \cos\delta \pm k_3 \sqrt{\sin^2\Delta \cos^2\delta + \sin^2\delta}}{k_4 \sin\delta} \tag{6}$$

Deoarece δ diferă puțin de $\frac{\pi}{2}$ vom recurge la aproximații. Dezvoltînd radicalul în serie :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_3 \sin\Delta \cos\delta \pm k_3 \left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta \cos^2\Delta\right)}{k_4 \sin\delta} \tag{7}$$

Relații mai simple se obțin dacă se neglijează termenul în $\cos^2 \delta$ față de $\sin^2 \delta$, întrucît primul termen diferă de cel de al doilea cu aproximativ trei ordine de mărime. În această aproximație :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k_3 \sin \Delta \cos \delta + k_3 \sin \delta}{k_4 \sin \delta} \tag{8a}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k_3 \sin \Delta \cos \delta - k_3 \sin \delta}{k_4 \sin \delta} \tag{8b}$$

În cazul ideal, în care $\delta = \frac{\pi}{2}$, se obțin valorile binecunoscute : $\psi = \pm P$.

Lumina liniar polarizată, după direcția D (fig. 3), este stinsă de analizor. Dacă se ia axa oy ca origine pentru citirea azimutului anali-

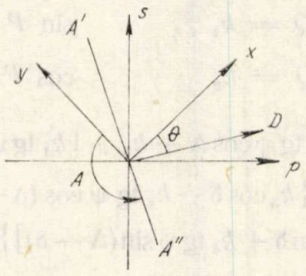


Fig. 3.

zorului, (a se vedea procedeul de lucru din [7], [8]), atunci rezultă : $\operatorname{tg} A = -E_y/E_x$. Luînd numai raportul părților imaginare

$$\operatorname{tg} A = \frac{T\,[k_3 \sin \delta + k_4 \operatorname{tg} \psi \sin (\Delta - \delta)]}{k_1 \operatorname{tg} \psi \sin \Delta} \tag{9}$$

De aici :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k_3 T \sin \delta}{k_1 \operatorname{tg} A \sin \Delta - k_4 T \sin (\Delta - \delta)} \tag{10}$$

Din compararea relațiilor (8a) și (10) se obține :

$$k_4 T \sin^2 \delta \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} + (2 k_4 T \cos \delta - k_1 \operatorname{tg} A) \sin \delta \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} + \tag{11}$$

$$(k_4 T - 2 k_1 \operatorname{tg} A \cos \delta) \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} - k_1 \operatorname{tg} A \sin \delta = 0$$

Dacă $Q = +\frac{\pi}{4}$, iar în particular $\delta = \frac{\pi}{2}$ și $T \neq 1$, $A = \frac{\Delta}{2}$. Prin compararea

relațiilor (8b) și (10) rezultă :

$$k_1 \operatorname{tg} A \sin\delta \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} + (k_4 T - 2 k_1 \operatorname{tg} A \cos\delta) \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} + \\ + (k_1 \operatorname{tg} A - 2 k_4 T \cos\delta) \sin\delta \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} + k_4 T \sin^2\delta = 0 \tag{12}$$

Punînd și de data aceasta $Q = \frac{\pi}{4}$ se obține (pentru $\delta = \frac{\pi}{2}$ și $T = 1$):

$$A = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2}.$$

Se observă că în cazul în care compensatorul este fixat cu azimutul la $+\frac{\pi}{4}$ față de planul de incidență, există două seturi de valori pentru pozițiile analizorului și polarizorului. Se definesc astfel cadranele în care se găsește analizorul la extincție [3]. Dacă $Q = -\frac{\pi}{4}$, din (11) rezultă în cazul ideal $A = -\frac{\Delta}{2}$ iar din (12), $A = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2}$ Astfel, în timp ce polarizorul nu poate avea decît două poziții la extincție, pentru cele două situații în care se găsește compensatorul, analizorul se va găsi de fiecare dată în alt cadran.

Deoarece calculele cu ajutorul relațiilor (11), (12) sînt greoaie, vom stabili o altă pereche de ecuații, în care se utilizează citirile din ambele cadrane. Notînd cu indicii 1 și 2 citirile în cadrane diferite, din ecuațiile (6) :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2 \operatorname{tg} P_1 \operatorname{tg} P_2 \sin\Delta}{(\operatorname{tg} P_1 + \operatorname{tg} P_2) \operatorname{tg}\delta} \tag{13}$$

iar din ecuația (10), prin eliminarea tg ψ :

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta - \dfrac{\operatorname{tg} P_1 \operatorname{tg} A_2 - \operatorname{tg} P_2 \operatorname{tg} A_1}{T(\operatorname{tg} P_1 - \operatorname{tg} P_2)}} \tag{14}$$

Prin acest procedeu se evită astfel rezolvarea ecuațiilor (11), (12).

Polarizor fix. Se fixează polarizorul astfel încît azimutul lui să fie de $\pm\frac{\pi}{4}$. Din relația (5), pentru $P = +\frac{\pi}{4}$, rezultă :

$$\sin 2Q \sin\delta \operatorname{tg}^2\psi - 2(\sin\Delta\cos\delta + \cos\Delta\cos 2Q\sin\delta)\operatorname{tg}\psi - \sin 2Q\sin\delta = 0 \tag{15}$$

sau :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{-\sin 2Q\sin\delta}{\sin\Delta\cos\delta + \cos\Delta\cos 2Q\sin\delta} \tag{16}$$

Dacă $P=-\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2Q \sin\delta}{\sin\Delta\cos\delta + \cos\Delta\cos 2Q\sin\delta} \tag{17}$$

pentru cazul ideal, în care $\delta = \frac{\pi}{2}$ se obține relația cunoscută [6]:

$\operatorname{tg} 2\psi \cos\Delta = \operatorname{tg} 2Q$

Ca și în situația compensatorului fix, se obține cea de a doua ecuație în ψ și Δ punînd condiția ca analizorul să fie perpendicular pe direcția D (fig. 4). De data aceasta însă relațiile obținute vor fi mai simple dacă se ia ca origine pentru analizor axa x. Atunci $\operatorname{tg} A = -E_x/E_y$, iar, pentru $P=\pm\frac{\pi}{4}$:

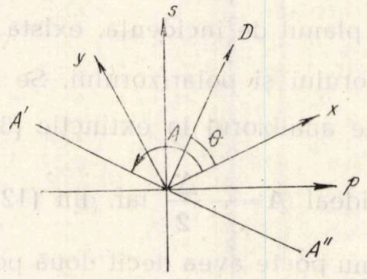


Fig. 4.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{T\operatorname{tg} A\sin\delta}{\pm\operatorname{tg} A\operatorname{tg} Q\sin(\Delta-\delta)\pm\sin\Delta} \tag{18}$$

Dacă și în acest caz recurgem la citirile efectuate în două cadrane, din (17) se obține:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sin 2(Q_2-Q_1)}{\sin 2Q_1 - \sin 2Q_2}\cdot\operatorname{tg}\delta \tag{19}$$

Acestei relații i se poate reproșa însă sensibilitatea mai redusă, pentru valori ale lui δ în jur de $\frac{\pi}{2}$. Tot din (17) se poate obține și următoarea relație:

$$\operatorname{tg} 2\psi\cos\Delta = \frac{\sin 2Q_1 - \sin 2Q_2}{\cos 2Q_1 - \cos 2Q_2} \tag{20}$$

Aplicînd (18) pentru citirile din două cadrane :

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta - \dfrac{\operatorname{tg}A_2 - \operatorname{tg}A_1}{T\operatorname{tg}A_1\operatorname{tg}A_2(\operatorname{tg}Q_1 - \operatorname{tg}Q_2)}} \tag{21}$$

Cum era de așteptat sînt dificil de obținut expresiile explicite pentru ambele mărimi care interesează.

Discuție

În cazul în care se lucrează cu un laser (de exemplu He—Ne), lumina emisă de acesta fiind liniar polarizată, s-ar părea că este preferabilă metoda polarizorului fix, deoarece este puțin probabil ca un laser, montat în locul polarizorului, să poată fi rotit fără nici un inconvenient. Menținînd polarizorul fix, rămîn totuși dificultățile semnalate de Holmes [5] în privința determinării semnelor. Evident, și în acest caz, atît compensatorul, cît și elipsometrul se pot calibra cu ajutorul unui eșantion cu proprietăți cunoscute, de exemplu o prismă de reflexie totală.

Menținerea imobilă a laserului nu exclude însă folosirea metodei polarizorului mobil și a compensatorului fix. Într-adevăr, deși emisia laser este liniar polarizată, această stare de polarizare poate fi ușor distrusă introducînd între laser și polarizor o foiță birefringentă, convenabil orientată, astfel ca din aceasta să emeargă o lumină pe cît posibil circular polarizată. Reducerea intensității luminoase prin introducerea acestei foițe este desigur neesențială. Așadar și în cazul utilizării surselor laser pentru studiul elipsometric, alegerea uneia dintre metode sau a celeilalte rămîne doar o chestiune de gust. În fapt, metoda compensatorului fix este mai comodă deoarece permite calibrarea dispozitivului fără nici o dificultate.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Oldham, W. G.*, Ellipsometry using a retardation plate as compensator : In : Jour. Opt. Soc. Am. 57, 1967, p. 617—624.

2. *Holmes, D. A.*, Exact theory of retardation plates ; In : Jour. Opt. Soc. Am. 1964, p. 1115—1120.

3. *McCrackin și alții*, Measurement of the thickness and refractive index of very thin films and the optical properties of surfaces by ellipsometry ; In : Jour. Res. Natl. Bur. Sdt. 67 A, 1963, p. 363—377.

4. *Archer, R. J. și Shank, C. V.*, Ellipsometry with non-ideal compensator ; In Jour Opt. Soc. Am. 57, 1967, p. 191—194.

5. *Holmes, D. A.*, Formulas for using wave plates in ellipsometry; In Jour. Opt. Soc. Am. 57, 1967, p. 466—472.

6. *Born, M. și Wolf, E.*, Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford, London, 1964, p. 26.

7. *Cristescu, C. și Moisil, D.*, Ellipsometric effects on double thin layers; În: Bul. Inst. Pol. Gheorghe Gheorghiu-Dej, XXX, nr. 2/1968.

8. *Andreeva, V. V.*, Izmerenie tolșcin tonkih plionok na metalah opticeskim poliarizaționim metodom; In: Trudî Inst. Fiz. Chim. 6, 1957, p. 79—98.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 621.35:541.13:546.18:546.73/74:669.245

DEPENDENȚA COMPOZIȚIEI ALIAJULUI COBALT-FOSFOR DE CONDIȚIILE DE ELECTROLIZĂ *

I. C. RĂDUCANU
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

ECATERINA TUCAN
Institutul de Fizică Atomică,
București

Aliajele de nichel-fosfor [1, 2] și cobalt-fosfor [2, 3, 4], obținute pe cale electrolitică se disting printr-o mare rezistență la coroziune. Straturile galvanice, formate din aceste aliaje, cu grosimi care depășesc 10 μ sînt practic lipsite de pori, ceea ce explică stabilitatea ridicată la coroziune a acestor acoperiri.

Aliajele de nichel-fosfor și cobalt-fosfor posedă o duritate înaltă [3, 4, 5], mai mare decît a metalelor respective pure; duritate care crește cu mărirea conținutului de fosfor. Duritatea acestor aliaje poate fi mărită, de 2—2,5 ori, prin prelucrare termică ulterioară la temperatura de 400°C [2].

Datorită acestor proprietăți aceste aliaje pot primi unele aplicații la temperatură înaltă și anume: la construcția turbinelor cu gaz a motoarelor cu reacție (rachete) și, în multe alte domenii.

Depunerile electrolitice de cobalt-fosfor și nichel fosfor sînt utilizate, după o durificare la 250—500° [6], la acoperirea segmenților de piston. Datorită rezistenței ridicate la uzură prin frecare, aliajele nichel-fosfor sînt utilizate pentru acoperirea unor suprafețe în industria constructoare de mașini, întrucît aceste aliaje nu au un coeficient de frecare redus [2]. Depunerile electrolitice magnetice de cobalt-fosfor și cobalt-nichel-fosfor prezintă un interes deosebit în domeniul calculatoarelor: acestea sînt utilizate pentru dispozitive memoratoare montate în mașinile de calcul, înlocuind astfel miezurile feritice [7].

Printr-o alegere corectă a condițiilor de depunere electrolitică domeniul forței coercitive, în aliajele de cobalt-fosfor [4, 5, 8] poate fi extins de la 50 Oersted pînă la 800 Oersted, acoperind astfel un inter-

* Manuscris predat la redacție la 5 martie 1968.

val mult mai mare decît aliajele cobalt-nichel (200—300 Oersted). Forța coercitivă crește cu creșterea conținutului de fosfor în depunere, iar acesta poate fi mărit prin creșterea concentrației acidului fosforos în electrolit [2].

Aliajele cobalt-fosfor sînt folosite pentru îmbunătățirea modelului și funcționării calculatoarelor digitale.

De asemenea aliajele cobalt-fosfor și nichel-fosfor mai sînt folosite și ca strat intermediar la acoperirea unor obiecte cu un metal prețios pentru a împiedica difuzia metalului prețios în metalul de bază [9].

Grosimea maximă a stratului de cobalt-fosfor și nichel-fosfor este de aproximativ 1—2 mm. La grosimi mai mari, din cauza tensiunilor interne din strat (tensiuni care sînt de același ordin de mărime ca și în cazul depunerii metalelor separat) acestea se pot fisura spontan.

Aspectul suprafeței (culoarea și gradul de reflexie a luminii) aliajelor de nichel-fosfor și cobalt-fosfor depinde de densitatea de curent catodică folosită și de conținutul de fosfor.

Astfel la un conținut de 1—3% P, aspectul exterior este mat; la 5% P semilucios, iar la un conținut de 10—15% P lucios. Coeficientul de reflexie este cu puțin mai scăzut decît al metalelor pure: 45—50% [2].

Aliajele cobalt-fosfor, ca și cele de nichel-fosfor, pot fi obținute prin procedee electrochimice, dar și prin procedee chimice. Procedeul electrolitic prezintă avantajul unei viteze mari a procesului, întrucît se folosesc densități mari de curent: 5—40 A/dm^2.

În lucrarea de față s-a cercetat în amănunt corelația dintre compoziția aliajului cobalt-fosfor și condițiile de depunere catodică a acestui aliaj.

Partea experimentală

Au fost efectuate numeroase determinări experimentale privind condițiile de depunere catodică a aliajului cobalt-fosfor pornind de la $CoCl_2.6H_2O$, H_3PO_4 și H_3PO_3 de puritate înaltă (p.a.).

S-a studiat influența concentrației sării de cobalt, concentrației acidului fosforos, densității de curent catodice și temperaturii asupra compoziției și aspectului aliajului, randamentului de curent și structurii aliajului. Deoarece aceste aliaje au tendința de a forma depozite mai fin granulate, decît metalele pure, ele sînt obținute ca depuneri lucioase fără utilizarea unor agenți de adaus.

În toate determinările experimentale pH-ul a fost menținut la valoarea 0,5—1, iar temperatura constantă cu o precizie de $\mp$ 0,2°C, folosindu-se un termostat cu o baie de parafină întrucît, obținerea acestui aliaj are loc la temperaturi mari (75—90°C). Electrolitul a fost agitat mecanic; s-au folosit anozi din cobalt de puritate mare (99,99%) cu o suprafață dublă față de suprafața catodului. Drept catozi s-au folosit plăcuțe din cupru de următoarele dimensiuni: $10\times40\times0{,}2$ mm.

Asupra aliajelor obținute au fost efectuate următoarele determinări :

1. Calitatea depunerii catodice de cobalt-fosfor s-a apreciat prin examinarea aspectului exterior vizual și prin cercetarea structurii cu ajutorul microscopului metalografic.

2. Viteza de depunere a aliajului s-a determinat din grosimea medie a stratului măsurată cu ajutorul minimetrului.

3. Analiza compoziției chimice a aliajului depus electrolitic s-a făcut prin metoda spectrofotometrică cu spectrofotometrul VSU-1, Zeiss. Aliajele au fost dizolvate în HNO_3 1 : 1.

a) Conținutul de cobalt a fost determinat cu ajutorul sării disodice a acidului 1-nitrozo-2naftol-3,6 disulfonic. Prin măsurarea extincției la $\lambda = 420$ mμ și cu ajutorul curbei de calibrare, trasată la același λ cu o soluție standard de cobalt, s-a calculat procentul de cobalt.

b) Conținutul de fosfor în aliajele depuse, s-a determinat cu molibdat de sodiu și extracția complexului cu amestec de *n*-butanol-cloroform 20/80.

Prin măsurarea extincției la $\lambda = 310$ mμ și cu ajutorul curbei etalon s-a calculat procentul de fosfor din aliaje. Din analiza spectrografică în arc a aliajelor cobalt-fosfor și a sării pure de cobalt, s-a pus în evidență prezența fosforului prin apariția liniilor corespunzătoare acestuia ($\lambda'_1 = 2534{,}01$ Å, $\lambda'_2 = 2535{,}65$, Å).

4. Randamentul de curent s-a calculat în funcție de compoziția chimică și greutatea aliajului depus, făcîndu-se ipoteza că la depunerea unui atom-gram de fosfor se consumă o cantitate de electricitate de $3 \times 26{,}8$ Ah [1].

Cantitatea teoretică de electricitate s-a calculat cu expresia

$$q_t = 2 \times 26{,}8 \frac{a}{A_{Co}} + 3 \times 26{,}8 \frac{b}{A_P}, \; Ah$$

în care :

a, *b* — reprezintă cantitatea de cobalt și respectiv de fosfor în aliajul dat ;

A_{Co}, A_P — reprezintă greutățile atomice respective.

Rezultate experimentale

I. *Influența concentrației sării de cobalt*

S-au menținut constante : concentrația

H_3PO_4 . . . . . 75 g/l

H_3PO_3 . . . . . 7 g/l

temperatura 75°C

Tabela 1

Densit. crt. A/dm²	Nr. crt.	Conc. $CoCl_2.6H_2O$ g/l	Compoziția aliajului		Rand. de crt. %	Aspectul depunerii
			Co, %	P, %		
5	1	45	89,8	10,2	6,1	lucioasă, cu mici pete
	2	60	90,4	9,6	8,0	luci asă, cu zone mate
	3	75	91,1	8,9	11,4	lucioase, cu pete negre
10	4	45	89,2	10,8	14,3	lucioasă, cu pete negre
	5	60	89,5	10,5	34,6	luciu foarte uniform
	6	75	90,3	9,7	57,9	semilucioasă, în zone
20	7	45	89,9	10,1	42,0	luciu uniform cu pittinguri
	8	60	90,1	9,9	51,0	depunere lucioasă
	9	75	91,5	8,5	63,2	luciu neuniform pitting
30	10	45	91,0	9,0	52,7	lucioasă, pitting
	11	60	91,3	8,7	58,2	foarte lucioasă, cu pitting
	12	75	92,1	7,9	65,8	pătată, cu dendrite.
40	13	45	91,9	8,1	57,2	mată, cu dendrite
	14	60	92,2	7,8	61,0	lucioasă, pete negre
	15	75	93,4	6,6	67,3	pătată, cu dendrite

Concluzii :

— creșterea concentrației sării de cobalt în electrolit duce la mărirea procentului de cobalt în aliaj și la scăderea procentului de fosfor din aliaj, la densitate de curent constantă ;

— ridicarea densității de curent duce la mărirea randamentului de curent în toate cazurile ;

— la o concentrație medie a $CoCl_2.6H_2O$ (60 g/l) în toate cazurile s-au obținut depuneri lucioase, în special pentru densități de curent de 10—30 A/dm².

Observații : au fost efectuate încercări folosind electroliți mai concentrați în $CoCl_2.6H_2O$ (160—220 g/l) și s-a constatat că procentul de fosfor în aliaj, pentru densități de curent de 5—40 A/dm², este mult mai scăzut : 3—4 %.

II. *Influența concentrației acidului fosforos*

Acidul fosforos este sursa de fosfor în procesul de depunere catodică a aliajelor cobalt-fosfor [2].

S-au menținut constante: concentrația

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . 60 g/l

H_3PO_4 . . . . . 75 g/l

temperatura = 75°C

Tabela 2

Densit. crt. A/dm²	Nr. crt.	Conc. H_3PO_3 g/l	Compoz. aliajului		Rand. de crt. %	Aspectul depunerii
			Co, %	P, %		
5	1	4	91,3	8,7	10,2	lucioasă, cu zone pătate
	2	7	90,4	9,6	8,0	lucioasă, cu zone mate
	3	10	89,7	10,3	3,9	lucioasă, cu pete
10	4	4	90,8	9,2	42,3	luciu uniform
	5	7	89,5	10,5	34,6	luciu foarte uniform
	6	10	88,3	11,7	30,1	luciu foarte uniform
20	7	4	92,1	7,9	63,0	luciu, cu zone mate
	8	7	90,1	9,9	51,0	depunere lucioasă
	9	10	89,2	10,8	42,5	depunere lucioasă
30	10	4	92,9	7,1	61,9	mată, cu dendrite
	11	7	91,3	8,7	58,2	foarte lucioasă, cu pitting și dendrite
	12	10	90,8	9,2	51,6	f. lucioasă, cu pitting și dendrite
40	13	4	94,1	5,9	57,4	mată cu dendrite
	14	7	92,2	7,8	61,0	lucioasă, cu dendrite
	15	10	91,8	8,2	60,5	mată cu dendrite

Concluzii :

— cele mai bune depuneri, din punct de vedere al luciului s-au obținut la conc. de 10 g/l H_3PO_3 și densitățile de curent de 10—30 A/dm², cînd conținutul în fosfor atinge 11,7% ;
— creșterea concentrației H_3PO_3 în continuare nu este indicată din cauza formării unor depuneri dendritice, buretoase ;
— scăderea concentrației în H_3PO_3 duce la formarea unor depozite cu procent mic de fosfor, închise la culoare ;
— la densit. de crt. 5—30 A/dm² randamentul de curent scade cu creșterea conținutului în H_3PO_3 de la 4 la 7 g/l ; la 40 A/dm² randamentul de curent, funcție de concentrația H_3PO_3 crește sensibil și apoi practic rămîne constant.

III *Influența densității de curent și a conținutului în acid fosforos asupra compoziției aliajului*

Au fost menținute constante : concentrația

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 60 g/l
H_3PO_4 . . . . . 75 g/l
temperatura = 75°C

Tabela 3

Conc. H_3PO_3 g/l	Nr crt	Densit. crt. A/dm²	Compoziția aliajului		Aspectul depunerii
			Co, %	P, %	
4,0	1	5	91,3	8,7	luciu neuniform
	2	10	90,8	9,2	foarte lucioasă, uniform
	3	20	92,1	7,9	luciu neuniform
	4	30	92,9	7,1	mată, cu dendride
	5	40	94,1	5,9	mată, cu dendride
7,0	6	5	90,4	9,6	luciu cu zone mate
	7	10	89,5	10,5	foarte lucioasă
	8	20	90,1	9,9	foarte lucioasă
	9	30	91,3	8,7	foarte lucioasă
	10	40	92,3	7,8	luciu pătat, neuniform
10,0	11	5	89,6	10,3	luciu neuniform
	12	10	88,3	11,7	foarte lucioasă
	13	20	89,2	10,8	foarte lucioasă
	14	30	90,8	9,2	foarte lucioasă, cu dendrite
	15	40	91,8	8,2	mată, cu dendrite

Concluzii :

— la creșterea densității de curent, pentru o concentrație constantă a H_3PO_3, conținutul de fosfor scade ;

— densitățile de curent, cele mai favorabile sînt 10—30 A/dm² pentru un domeniu mai larg al concentrației în acid fosforos (4—10 g/l).

IV. *Influența temperaturii asupra compoziției aliajului și a randamentului de curent*

Determinările au fost efectuate cu următorul electrolit, a cărui compoziție se apropie de cea optimă :

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 60 g/l

H_3PO_4 . . . . . 75 g/l

H_3PO_3 . . . . . 7 g/l

Caracteristic pentru procesul de obținere electrolitică a aliajelor de cobalt-fosfor este folosirea unor temperaturi ridicate : 75—90°C. (Încercările efectuate la temperaturi mai mici — 60°C — au condus la obținerea unor depuneri spongioase, neaderente).

Tabela 4

Densit. crt A/dm²	Nr. crt	Temp. °C	Compoziția aliajului		Rand. crt. %	Aspectul depunerii
			Co, %	P, %		
5	1	75	90,4	9,6	8,0	luciu neuniform
	2	90	90,1	9,9	7,4	luciu neuniform
10	3	75	89,5	10,5	34,6	foarte lucioasă
	4	90	88,5	11,5	29,8	foarte lucioasă
20	5	75	90,1	9,9	51,0	foarte lucioasă
	6	90	89,3	10,7	43,5	foarte lucioasă
30	7	75	91,3	8,7	58,2	foarte lucioasă, cu dendrite
	8	90	90,7	9,3	55,1	foarte lucioasă, cu dendrite
40	9	75	92,2	7,8	61,0	luciu neuniform, pitting
	10	90	92,0	8,0	59,9	luciu neuniform, pitting

Concluzii :

— creșterea temperaturii conduce la mărirea conținutului de fosfor în aliaj, pentru aceeași densitate de curent
— din punct de vedere al aspectului exterior al stratului depus nu se constată o deosebire netă la creșterea temperaturii.
— randamentul de curent scade cu creșterea temperaturii.

V. *Cercetări microfotografice*

Aliajele de cobalt-fosfor obținute la densități relativ mici (5—10 A/dm²) se caracterizează printr-o structură lamelară sau columnară, cu granule sferice bine limitate, orientate pe o anumită direcție (Fig. 1).

Cu creșterea densității de curent (20 A/dm²), orientarea se menține, structura devenind mai fin granulată (Fig. 2).

La densități de curent ridicate (30—40 A/dm²) orientarea se distruge, iar structura devine mai omogenă (Fig. 3).

O particularitate a depunerilor electrolitice de cobalt-fosfor este tendința de formare la marginile catozilor a unor depuneri sferice, ramificate, formate dintr-un depozit metalic extrem de lucios. Această tendință de formare a dendritelor este favorizată de creșterea densității de curent (Fig. 4).

VI. *Curbele de polarizație catodică și anodică*

Pentru trasarea curbelor de polarizație, la obținerea electrolitică a aliajului cobalt-fosfor, s-au folosit doi electroliți cu ajutorul cărora s-a studiat influența concentrației acidului fosforos și a temperaturii.

Ambele soluții au avut aceeași activitate a ionului H^+ (pH=0,5—1) Temperatura a fost menținută constantă cu o precizie de $\mp$ 0,2°C ; s-a lucrat la temperaturile de 75° și 90°C.

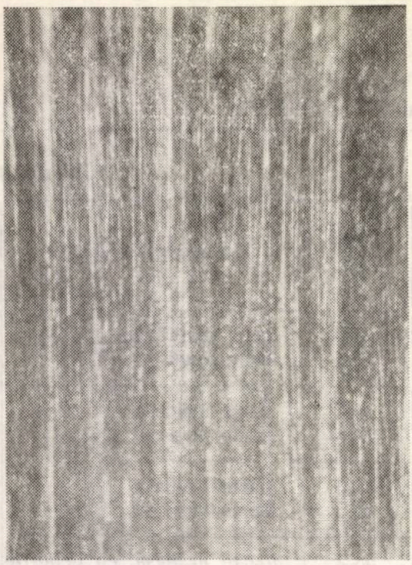


Fig. 1. Aliaj Co-P, cu 8,9% P depus catodic din următorul electrolit:

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 75 g/l
H_3PO_4 . . . . . 75 g/l
H_3PO_3 . . . . . 7 g/l
Densit. crt. . . . . 5 A/dm²
Temp. . . . . 75°C
Mărire: 80×

Fig. 2. Aliaj Co-P, cu 8,7% P depus catodic din următorul electrolit:

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 60 g/l
H_3PO_4 . . . . . 75 g/l
H_3PO_3 . . . . . 7 g/l
Densit. crt. . . . . 20 A/dm²
Temp. . . . . 75°C
Mărire: 1200×

Fig. 3. Aliaj Co-P, cu 8,2% depus catodic din următorul electrolit:

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 60 g/l
H_3PO_4 . . . . . 75 g/l
H_3PO_3 . . . . . 10 g/l
Densit. crt. . . . . 40 A/dm²
Temp. . . . . 75°C
Mărire: 1200×

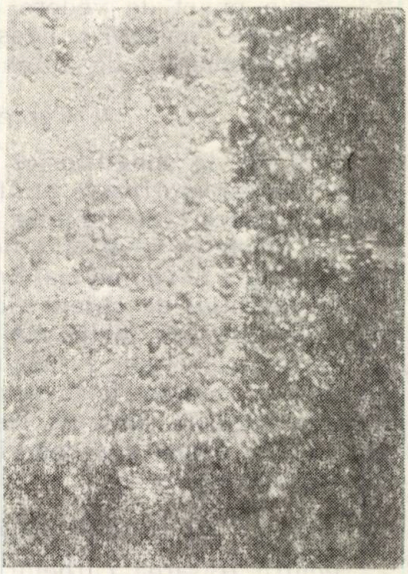


Fig. 4. Aliaj Co-P, depus catodic din următorul electrolit:

$CoCl_2.6H_2O$ . . . . . 45 g/l
H_3PO_4 . . . . . 75 g/l
H_3PO_3 . . . . . 7 g/l
Densit. crt. . . . . 40 A/dm²
Temp. . . . . 75°C
Mărire: 80×

Tabela 5

Compoziția	Electrolitul g/l	
	A	C
$CoCl_2 \cdot 6H_2O$	60	60
H_3PO_4	75	75
H_3PO_3	4	10

S-a folosit o celulă clasică de polarizare, în formă de „H" care avea compartimentele separate printr-o diafragmă din porțelan poros. Toate soluțiile au fost prelucrate inițial prin barbotare de hidrogen (ob-

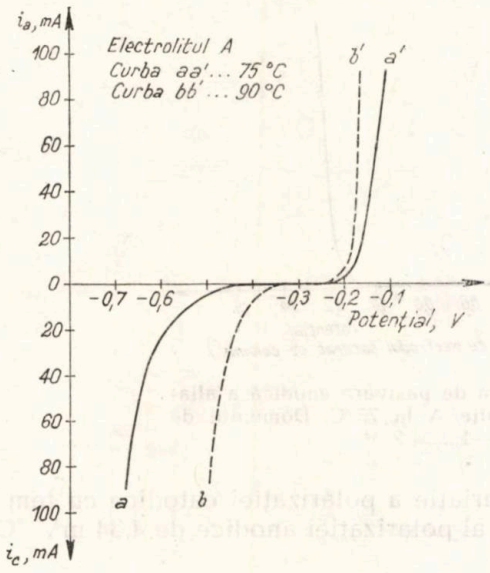


Fig. 5. Curbele de polarizație catodică (a, b) și anodică (a', b') la depunerea catodică și respectiv dizolvarea anodică a aliajului cobalt-fosfor în electrolitul A la două temperaturi (75°C și 90°C)

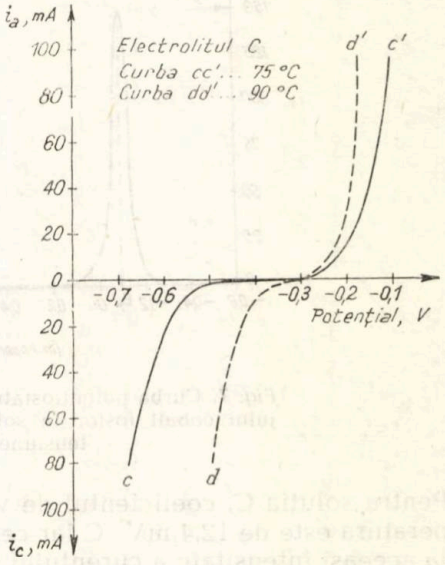


Fig. 6. Curbele de polarizație catodică (c, d,) și anodică (c', d') la depunerea catodică și dizolvarea anodică a aliajului cobalt-fosfor în electrolitul C la două temperaturi (75°C, 90°C)

ținut electrolitic : I=2 A, timp de 20—30 minute) care a fost supus unei purificări avansate într-o instalație clasică.

Curbele de polarizație catodică și anodică, precum și curba de pasivare au fost trasate potențiostatic [10]. S-a utilizat un potențiostat model PS_2 (Forschungs-institut Meinsberg" cu următoarele caracteristici : curentul ∓ 250 mA, domeniu de tensiune ∓ 2 V, constanta de timp 10^{-6} sec).

Drept electrod de lucru a servit un electrod de platin lucios (0,8×1,1 cm) pe care în prealabil a fost depus un strat de cobalt de 5 μ [11]. Ca electrod de comparație s-a folosit electrodul de calomel saturat.

Rezultatele determinărilor sînt prezentate în diagramele din fig. 5-7 și sînt în deplin acord cu indicațiile teoretice și anume: cu creșterea temperaturii atît polarizația catodică cît și polarizația anodică scade în cele două soluții studiate. Pentru soluția A, coeficientul de variație a polarizației catodice cu temperatura $\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta T}\right)$ este de 11,6 mV/°C iar cel al polarizației anodice este de 3,56 mV/°C la intensitatea de 80 mA.

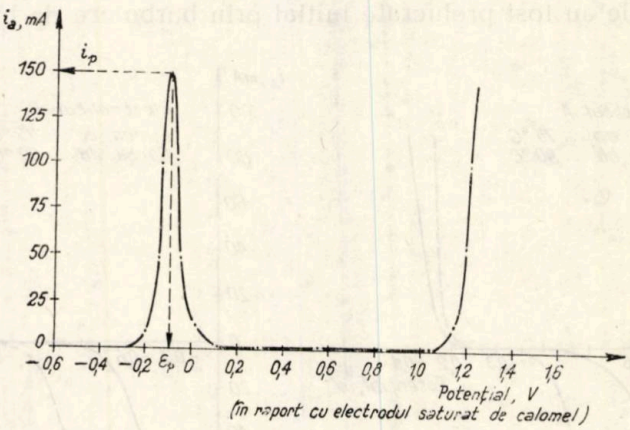


Fig. 7. Curba potențiostatică de pasivare anodică a aliajului cobalt fosfor în soluție A la 75°C. Domeniul de tensiune —1.....+2 V

Pentru soluția C, coeficientul de variație a polarizației catodice cu temperatura este de 12,4 mV/°C iar cel al polarizației anodice de 4,34 mV/°C la aceeași intensitate a curentului.

Atît pentru curbele catodice cît și pentru cele anodice raportul $\Delta\eta/\Delta i$ (variația polarizației la variația curentului) scade cînd se trece de la temperatura de 75°C la 90°C. După cum rezultă și din diagrame raportul $\Delta\eta/\Delta i$ este mai mare pentru procesul catodic, în ambele soluții.

A fost trasată potențiostatic curba de pasivare anodică (—1...+2 V) a aliajului cobalt-fosfor obținut din soluția A, la 75°C după ce în prealabil electrodul a fost supus unei prepolarizări catodice (Fig. 7).

Din această curbă se deduc următoarele concluzii: 1) pentru acest aliaj intensitatea critică de pasivare (i_p) este de aproximativ 150 mA corespunzătoare unui potențial critic de pasivare (ε_p) de 0,1 volți; 2) domeniul de pasivare, în care intensitatea de dizolvare în stare de pasivare are valori foarte mici (165—170 μA), este cuprins între potențialele +0,2 V și aproximativ +1,0 V, în raport cu electrodul de calomel saturat.

Concluzii finale :

1) Aliajele de cobalt-fosfor pot fi obținute cu rezultate bune din electrolitul de compoziția următoare :

$CoCl_2.6H_2O$	45—75 g/l
H_3PO_4	75 g/l
H_3PO_3	4—10 g/l

Condițiile de lucru :

— densitatea de curent 10—30 A/dm²
— pH=0,5—1
— temperatura 75—90°C.

2) Conținutul de cobalt în aliaj crește cu creșterea concentrației de clorură de cobalt în electrolit și cu mărirea densității de curent catodice.

3) Conținutul de fosfor în aliaj, care conferă luciul depozitului, crește cu mărirea concentrației acidului fosforos în electrolit și cu scăderea densității de curent catodice.

4) Randamentele de curent la depunerea catodică a aliajului cobalt-fosfor au valori medii și scad cu creșterea conținutului de fosfor din aliaj însă cresc cu mărirea densității de curent.

5) Au fost efectuate cercetări microfotografice din care se deduce că structura granulară, oarecum orientată la densități de curent medii, devine extrem de fin granulată și omogenă la densități de curent ridicate.

6) Din curbele de polarizație catodică și anodică, trasate potențiostatic, s-a constatat că atît procesele catodice cît și procesele anodice sînt însoțite de o polarizație însemnată. Prin calcularea coeficienților de variație a polarizației cu temperatura s-a pus în evidență o scădere mai accentuată a polarizației catodice, în comparație cu cea anodică, o dată cu creșterea temperaturii.

BIBLIOGRAFIE

1. *Atanasiu I., Călușaru A., Popescu M.* — Revista de Chimie nr. 1, 8—13 (1958).
2. *Fedotiev N. P., Bibicov N. N., Veaceslavov P. M., Grilihes S. Ea.,* — Electroliticeschie splavî, Moskva 1962, 234—241.
3. *Brenner A.* — Electrodeposition of alloys. Principles and practice. Vol. I, II, New York, 1963.
4. *Brenner A., Couch D., Williams E.* — J. Research Natt. Bur. Standards 44, 109—122 (1950) ; Plating, (1950), 37, 1.
5. *Brenner A., Burkhead P., Seegmiller E.* — J. Research Natt. Bur. Standard 46, 126—131 (1951).
6. *Goetze Friederic, Goetzewerke* — Patent German 898.838 Dec. 3 (1953, cl. 48a, 1404).
7. *Tsu I., Cappell R. J.* — Plating 10, (1965).
8. *Zentner V.* — Plating 9, 868—879 (1965).
9. *Dürrwächter E.* — Patent German, 1059.738, June 8 (1959-cl 48b) (cf. C.A. 55, 10289h).
10. *Rechnitz A. Garry* — Controlled potential analysis. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1963.
11. *Bertorelli E.* — Tratatto di Galvanotecnica, Milano, 1960, p. 761.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

REZISTENŢA MATERIALELOR

C.Z. : 539.3/4:517.9:624.023.9:624.072.2

QUELQUES APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS DANS LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

DUMITRU VOICULESCU

Le problème de l'intégration de l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée aux systèmes élastiques dont l'état d'efforts et de déformations dépend d'un seul paramètre, a acquis une solution très générale par l'application de la méthode connue des paramètres initiaux. Ainsi, connaissant les paramètres initiaux, (la flèche, la rotation, le moment de flexion et l'effort tranchant) à l'une des extrémités, d'une poutre droite, cette méthode donne la possibilité d'écrire dans n'importe quelle section de la poutre les expressions de ces paramètres. Dans le cas où sur la poutre agissent des charges concentrées ou des moments concentrés, ceux-ci peuvent être considérés comme discontinuités de l'effort tranchant respectif du moment de flexion et par conséquent introduit dans les expressions générales des paramètres.

Dans le cas où les paramètres initiaux sont inconnus, ceux-ci peuvent être déterminés par condition à l'autre extrémité de la poutre considérée, indifféremment si la poutre est statiquement déterminée ou statiquement non-déterminée.

L'utilisation des notions de la théorie des distributions ouvre de nouvelles voies à cette méthode. En ce qui suit, nous nous proposons de présenter une méthode pour déterminer facilement les fonctions Krilov par l'utilisation de certaines notions de la théorie des distributions et du calcul opérationnel.

On sait que la notion de *distribution* a été introduite pour généraliser la notion classique de fonction, concernant surtout la mesure *delta* introduite par Dirac et définie de cette manière :

$$x < 0 \text{ et } x > 0 \ldots \delta(x) = 0 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

* Ouvrage reçu à la rédaction le 7 September 1968.

La propriété de *filtration* de la mesure $\delta(x)$, définie par la relation

$$\int_0^x f(\xi)\,\delta(x-\xi)\cdot d\xi = f(x) \tag{2}$$

où $f(x)$ est une fonction continue, a suggéré le fondement de la théorie des distributions sur la notion de produit de *convolution* de deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$. Ce produit noté en général avec $f * g$ est défini par l'intégrale de Duhamel :

$$f * g = \int_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \tag{3}$$

Les produits de convolution sont des fonctions continues. On montre que l'ensemble des fonctions continues forme par rapport aux opérations „somme" et „produit de convolution" un *anneau comutatif* : $(f * g = g * f)$ sans élément unité (il n'existe pas une fonction continue $u(x)$ de sorte que $f * u = f$).

On peut passer de l'anneau de produits de convolutions à un *corps*, si l'on introduit la notion de *quotient de convolution*.

$$c = \frac{f}{g} \tag{4}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues, et $g(x)$ n'est pas identiquement nulle. La relation (4) est équivalente à

$$f = c * g \tag{5}$$

On montre que toute fonction continue peut être écrite comme un quotient de convolution, mais pas tout quotient de convolution est une fonction continue. Les quotients de convolution qui ne sont pas des fonctions continues s'appellent *distributions*. Par exemple la mesure $\delta(x)$ de Dirac est une distribution parce que la relation (2), qui peut être écrite sous la forme

$$f * \delta = f \tag{6}$$

définie $\delta(x)$ et tant que le quotient de convolution

$$\delta = \frac{f}{f} \tag{7}$$

La mesure $\delta(x)$ ne peut pas être une fonction continue parce que l'anneau des produits de convolutions n'a pas d'élément unité pour satisfaire la relation (6).

Dans l'ensemble des quotients de convolution on envisage aussi d'autres distributions outre $\delta(x)$ par exemple : $\delta'(x)$, $\delta''(x)$,..., $\delta^{(n)}_{(x)}$,... qui peuvent être considérées formellement comme „dérivées" de divers ordres de la distribution $\delta(x)$. Ces distributions ont des propriétés de

filtration semblable aux (6) respectivement (2). Ainsi, la distribution $\delta^{(n)}(x)$ jouit de la propriété :

$$f * \delta^{(n)} = f^{(n)} + f_{(0)}^{(n-1)} \cdot \delta + f_{(0)}^{(n-2)} \cdot \delta' + \ldots + f_{(0)} \cdot \delta^{(n-1)} \tag{8}$$

où $f(o)$, $f'(o)$ ... sont les valeurs de la fonction $f(x)$ et des dérivées de différents ordres dans l'origine.

Si on met en correspondance la relation (8) à la relation fondamentale du calcul operationnel

$$s^n f = f^{(n)} + f_{(0)}^{(n-1)} \cdot 1 + f_{(0)}^{(n-2)} \cdot s + f_{(0)}^{(n-3)} \cdot s^2 + \ldots + f(0) \cdot s^{n-1} \tag{9}$$

où s^n signifie dérivée de l'ordre n, on constate un isomorphisme entre le corps des opérateurs „dérivée de l'ordre n" et le corps des distributions „dérivée de l'ordre n de la distribution $\delta(x)$". En particulier il y a la correspondance

$$\begin{gathered} \delta(x) \ldots 1 \\ \delta'(x) \ldots s \\ \delta''(x) \ldots s^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta^{)n)}(x) \ldots s^n \end{gathered} \tag{10}$$

On dit que les distributions $\delta(x)$, $\delta'(x)$, ... sont respectivement les images des opérateurs 1, s, ... La corespondance entre les opérateurs et les fonctions images peut être poursuivie aussi pour les opérateurs : s^{-1}, s^{-2}, ..., s^{-n} on montre que images sont

$$\begin{gathered} H(x) \ldots s^{-1} \\ \frac{x}{1!} H(x) \ldots s^{-2} \\ \frac{x^2}{2!} H(x) \ldots s^{-3} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H(x) \ldots s^{-n} \end{gathered} \tag{11}$$

où par $H(x)$ on a noté la fonction de Heaviside définie ainsi :

$$\begin{gathered} x < 0 \ldots H(x) = 0 \\ x \geqslant 1 \ldots H(x) = 1 \end{gathered} \tag{12}$$

Il existe des tableaux d'images pour différents opérateurs $f(s)$ qui interviennent dans les problèmes pratiques. La théorie des distributions a généralisé la notion de dérivée pour les fonctions discontinues et a permis un fondement rigoureux du calcul opérationnel.

Liaison entre la théorie des distributions et les grandeurs qui interviennent dans la statique des poutres droites

a) *Charges concentrées.* Le plus simple exemple de distribution qui intervient dans la résistance des matériaux est celui d'une charge concentrée. Considérant une poutre droite de longneur infinie et un axe Ox en coïncidance avec la poutre, (fig. 1) on sait que la charge P appliquée

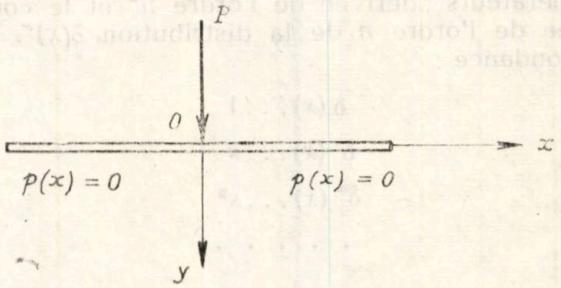


Fig. 1.

dans l'origine de l'axe ($x=0$) peut être écrite sous la forme d'une charge distribuée $p(x)$ dont l'expression est :

$$p(x) = P \cdot \delta(x) \tag{13}$$

d'où il résulte que la charge $p(x)$ de ce cas est une distribution.

b) *Moment concentré.* Dans le cas d'un moment concentré M appliqué dans l'origine de la même poutre infinie (fig. 2) celui-ci est

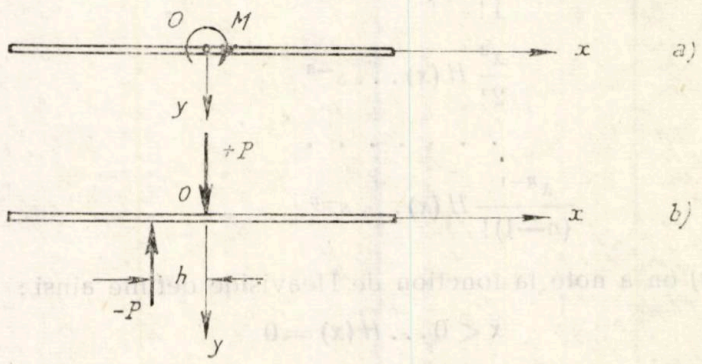


Fig. 2.

équivalent au cas limite de deux charges concentrées égales et opposées — P et + P appliquées respectivement dans les points d'abscisse $x=-h$ et $x=0$ (fig. 26) pour $h\to 0$, $P\to\infty$ et $Ph=M$.

En appliquant donc aux deux forces la relation (13) et passant à la limite on obtient pour $p(x)$ dans le cas du moment concentré l'expression :

$$p(x)=-M\cdot\delta'(x) \tag{14}$$

c'est-à-dire toujours une distribution, à savoir la première dérivée de la distribution $\delta(x)$.

c) *Articulation.* Considérons maintenant une poutre de longueur infinie ayant une articulation dans l'origine de l'axe Ox (fig. 3 a).

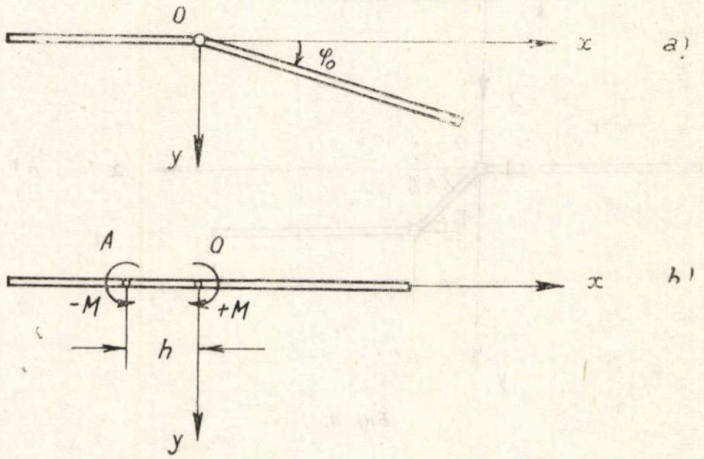


Fig. 3.

La rotation relative φ_0 de l'articulation peut être considérée comme provenant de l'action simultanée de deux moments concentrés + M et — M égaux et de sens opposés, sur une partie de la poutre de longueur très petite h (fig. 3 b). On obtient au juste, l'articulation à rotation d'angle φ_0 quand la longueur de la poutre tournée par les deux moments tend vers zéro, de sorte que la relation $Mh=EI\cdot\operatorname{tg}\varphi_0$ soit satisfaite. (EI la rigidité à la flexion de l'élément de la poutre $OA=h$). En appliquant donc aux deux moments la relation (14) et passant à la limite ($h\to 0$, $Mh=EI\cdot\operatorname{tg}\varphi_0$), on obtient pour $p(x)$ dans la cas de l'articulation, l'expression :

$$p(x)=EI\operatorname{tg}\varphi_0\,\delta''(x) \tag{15}$$

d) *La dénivellation* d'une poutre. Considérons cette fois le cas où la poutre infinie, a dans l'origine de l'axe ($x=0$) une discontinuité de flèche

égale à v_0 (fig. 4 a). La discontinuité d'ordonnée peut être considérée comme un cas limite de deux discontinuités de rotation representées par deux articulations avec l'angle de rotation φ_0 situées respectivement dans les points $x=0$ et $x=h$ et disposés de telle façon que h tg $\varphi_0 = v_0$.

La charge $p(x)$ correspondante, peut être écrite tout en tenant compte de la relation (15) et de la situation de (fig. 4 b) ; passant à la limite ($h \to 0$, h tg $\varphi_0 = v_0$) on obtient pour $p(x)$ l'expression :

$$p(x) = EI\, v_0\, \delta'''(x) \tag{16}$$

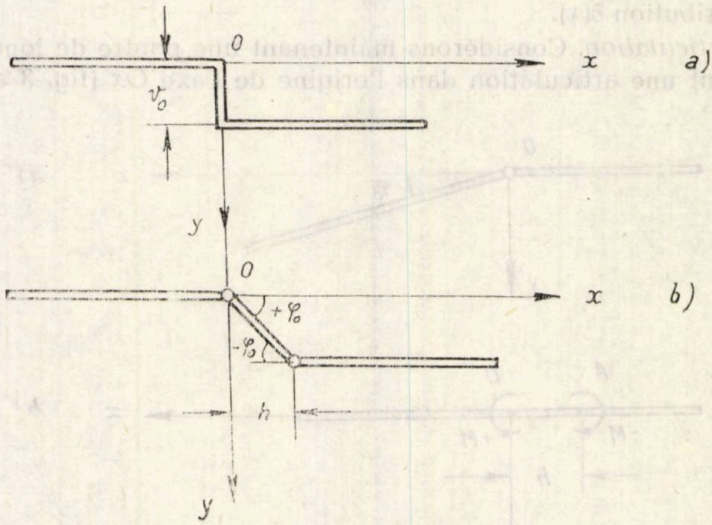


Fig. 4.

Dans le cas plus général où sur la poutre infinie agissent des charges et des moments concentrés, et la poutre a des articulations et dénivellations, la charge distribuée $p(x)$ s'exprime à l'aide des distributions $\delta(x)$ $\delta'(x)$, $\delta''(x)$ et $\delta'''(\chi)$ et de la façon suivante :

$$p(x) = \Sigma\,[P_i\,\delta(x - x_i) - M_j\,\delta'(x - x_j) + EI \operatorname{tg} \varphi_k\,\delta''(x - x_k) + \\ + EI\, v_l\,\delta'''(x - x_l)] \tag{17}$$

L'expression (17) peut être facilement généralisée, aussi pour d'autres cas, par exemple pour la plaque circulaire d'épaisseur constante et de rayon infini chargée axialement d'une façon symétrique.

On obtient les expressions suivantes de la charge $p(r)$ pour les cas montrés ci-dessous :

a) La charge concentrée P appliqueée sur le cercle de la plaque de rayon r_0 ;

$$p(r) = \frac{P\,r}{r_0}\,\delta(r - r_0)$$

b) Moment concentré M appliqué sur le cercle de rayon r :

$$p(r) = -\frac{M}{r}[r_0\,\delta'(r-r_0) - \delta(r-r_0)]$$

c) Articulation sur la circonférence du cercle de rayon r_0 avec l'angle de rotation φ_0 :

$$p(r) = \frac{D\varphi_0}{r}[r_0\,\delta''(r-r_0) - 2\delta'(r-r_0)]$$

d) Discontinuité de flèche v_0 sur la circonférence de rayon r_0

$$p(r) = -\frac{Dv_0}{r}[r_0\,\delta'''(r-r_0) - 3\delta''(r-r_0)]$$

Les formules (13), (14), (15) et (16) montrent la liaison étroite qui existe entre la théorie des distributions et certaines grandeurs qui interviennent dans les problèmes pratiques de la résistance des matériaux.

La théorie des distributions permet ainsi un traitement unitaire des charges et des conditions à la limite.

En effet, une poutre de longueur finie limitée, peut être considérée comme faisant partie d'une poutre de longueur infinie à laquelle, dans les sections correspondantes aux extrémités de la poutre finie, il y a des discontinuités inconnues, lesquelles peuvent être exprimées avec distributions. Par exemple la poutre $AB=l$ de la (fig. 5 a) simplement

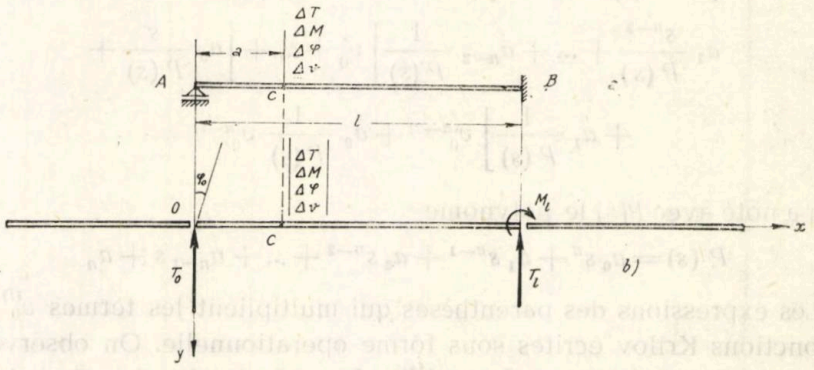


Fig. 5.

appuyée dans l'extrémité A et encastrée dans l'extrémité B, ayant dans la section $x=a$ une série de discontinuités connues, peut être considérée comme faisant partie d'une poutre infinie (fig. 5 b) ayant, outre les discontinuités connues de la section $x=a$ les discontinuités T_0 et φ_0 d'origine $(x=0)$ et respectivement T_l et M_l de la section $x=l$. La charge

équivalente, $p(x)$ correspondante à la poutre de longueur infinie a l'expression suivante :

$$p(x) = -T_0\,\delta(x) + EI\,\varphi_0\,\delta''(x) + \Delta T\,\delta(x-a) - \Delta M\,\delta'(x-a) + \\ + EI\,\Delta\varphi\cdot\delta''(x-a) + EI\,\Delta v\,\delta'''(x-a) - T_l\,\delta(x-l) - \\ - M_l\,\delta'(x-l) \tag{18}$$

On observe donc que tant les charges connues que les conditions à la limite sont — dans le cadre de la théorie des distributions — l'aspect du même problème : discontinuités d'une fonction et de ses dérivées dont le domaine d'applicabilité est beaucoup plus grand que celui qui intéresse le problème. Dans ce cas, l'étude de la poutre infinie peut être faite en considérant l'équation différentielle homogène correspondante et assimilant les charges et les conditions à la limite à conditions plurilocales considérées comme discontinuités qui s'expriment comme charges équivalentes aux distributions.

Considérons donc le cas des équations différentielles homogènes à coefficients constants

$$a_0\,v^{(n)} + a_1\,v^{(n-1)} + a_2\,v^{(n-2)} + \ldots + a_n\,v = 0 \tag{19}$$

En appliquant la relation (9), la solution de l'équation différentielle (26) sous forme opérationnelle est :

$$v(x) = \left[a_0\,\frac{s^{n-1}}{P(s)} + a_1\,\frac{s^{n-2}}{P(s)} + \ldots + a_{n-1}\,\frac{1}{P(s)}\right] v_0 + \left[a_0\,\frac{s^{n-2}}{P(s)} + \right. \\ \left. a_1\,\frac{s^{n-3}}{P(s)} + \ldots + a_{n-2}\,\frac{1}{P(s)}\right] v_0' + \ldots + \left[a_0\,\frac{s}{P(s)} + \right. \\ \left. + a_1\,\frac{1}{P(s)}\right] v_0^{(n-2)} + a_0\,\frac{1}{P(s)}\,v_0^{(n-1)} \tag{20}$$

où on a noté avec $P(s)$ le polynôme

$$P(s) = a_0\,s^n + a_1\,s^{n-1} + a_2\,s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,s + a_n \tag{21}$$

Les expressions des parenthèses qui multiplient les termes $v_0^{(i)}$ sont les fonctions Krîlov écrites sous forme operationnelle. On observe que pour le calcul de ces fonctions il faudra calculer les fonctions-images des opérateurs $\frac{1}{P(s)}$, $\frac{s}{P(s)}$, $\cdots$ $\frac{s^{n-1}}{P(s)}$.

Le problème se réduit d'ailleurs à établir la fonction-image seulement pour l'opérateur $\frac{1}{P(s)}$ car les images des autres opérateurs s'obtiennent par la dérivation de $(n\text{-}1)$ fois de celle-ci.

Pour écrire plus facilement toutes les fonctions Krîlov, notons-les en ce qui suit par $F_{ji}^{(x)}$ c'est-à-dire nous écrirons $v(x)$ et ses dérivées $v^{(j)}(x)$. Sous la suivante forme générale :

$$\begin{aligned}
v(x) &= F_{00}\,v_0 + F_{01}\,v_0' + F_{02}\,v_0'' + \ldots + F_{0i}\,v_0^{(i)} + \ldots + F_{0,n-1}\,v_0^{(n-1)} \\
v'(x) &= F_{10}\,v_0 + F_{11}\,v_0' + F_{12}\,v_0'' + \ldots + F_{1i}\,v_0^{(i)} + \ldots + F_{1,n-1}\,v_0^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{(x)}^{(j)} &= F_{j1}\,v_0 + F_{j2}\,v_0' + F_{j3}\,v_0'' + \ldots + F_{ji}\,v_0^{(i)} + \ldots + F_{j,n-1}\,v_0^{(n-1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{(x)}^{(n-1)} &= F_{n-1,1}\,v_0 + F_{n-1,2}\,v_0' + F_{n-1,3}\,v_0'' + \ldots + F_{n-1,i}\,v_0^{(i)} + \\
&\quad + \ldots + F_{n-1,n-1}\,v_0^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{22}$$

ou en écrivant d'une manière concentrée :

$$v_{(x)}^{(j)} = \sum_{i=0}^{n-1} F_{ji}(x)\; v_0^{(i)} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{23}$$

En notant avec $\varphi(x)$ la fonction-image de l'opérateur $\dfrac{1}{P(s)}$. le calcul des fonctions $F_{0i}\,.\,(x)$ est le suivant :

$$\begin{aligned}
F_{0,n-1} &= a_0\,\varphi(x) \\
F_{0,n-2} &= a_0\,\varphi'(x) + a_1\,\varphi(x) = F'_{0,n-1}\,\varphi(x) + a_1\,\varphi(x) \\
F_{0,n-3} &= a_0\,\varphi''(x) + a_1\,\varphi'(x) + a_2\,\varphi(x) = F'_{0,n-2} + a_2\,\varphi(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{00} &= a_0\,\varphi_{(x)}^{(n-1)} + a_1\,\varphi_{(x)}^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\,\varphi(x) = F'_{01} + a_{n-1}\,\varphi(x)
\end{aligned} \tag{24}$$

ou en écrivant d'une manière concentrée :

$$F_{0,i}(x) = F'^{(x)}_{0,i+1} + a_{n-i-1}\,\varphi(x) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{25}$$

Les fonctions $F_{ji}(x)$ des expressions des dérivées $v_{(x)}^{(j)}$ seront :

$$F_{ji}(x) = \overset{(j)}{F}_{0i}(x) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{26}$$

L'image de l'opérateur $\dfrac{1}{P(s)}$ une fois déterminée, les formules de récurrence (22) et (23) résolvent avec facilité la manière d'écrire toutes les fonctions Krîlov.

Il est connu que dans l'écriture à matrice, les relations (22) seront écrites ainsi :

$$\begin{Vmatrix} v_{(x)} \\ v'_{(x)} \\ v''_{(x)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^{(j)}_{(s)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^{(n-1)}_{(x)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0,n-1} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1,n-1} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_{j0} & F_{j1} & F_{j2} & \cdots & F_{j,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_{n-1,0} & F_{n-1,1} & F_{n-1,2} & \cdots & F_{n-1,n-1} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v''_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^{(j)}_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^{(n-1)}_0 \end{Vmatrix}$$

ou plus concentrées sous la forme :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \cdot \| V(0) \| \tag{28}$$

dans laquelle on a noté :

$\| V(x) \|$ le vecteur déformations-efforts de la section x
$\| F(x) \|$ la matrice des fonctions Krîlov
$\| V(o) \|$ le vecteur des conditions initiales

La relation (28) est juste dans un intervalle $(0 \leqslant x \leqslant l)$ si dans cet intervalle n'interviennent pas de discontinuités.

Dans le cas où dans les sections $x > x_i$ interviennent, les discontinuités Δv_i, $\Delta \varphi_i$, ΔM_i, ΔT_i, nous ocnsidèrerons la matrice $\| \Delta V_i \|$ de ces discontinuités et, pour $x = x_1$ l'expression de la matrice déformation — efforts, sera :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \cdot \| V(0) \| + \Sigma \| F(x - x_i) \| \cdot \| \Delta V_i \| \tag{29}$$

Si à gauche de la section considérée interviennent des variations des sections en degrés et si les fonctions $F_{ji}(x)$ sont déterminées pour le cas des sections constantes, alors les matrices $\| F(x) \|$ et $\| (Fx - x_i) \|$ résulteront du calcul des produits des matrices correspondantes aux portions de poutre dans laquelle la section est (ou peut être considérée) constante.

En effet, considérant par exemple l'intervalle (o, x_1) de section constante, l'expression de la matrice colonne $\| V(x_1) \|$ de la section $x = x_1$ est :

$$\| V(x_1) \| = \| F_{0,1}(x) \| \cdot \| V(0) \| \tag{30}$$

où par $\| F^{0,1}(x) \|$ nous avons noté la matrice des fonctions Krîlov correspondant à cet intervalle,

Observant que la matrice $\| V(x_1) \|$ peut être considérée comme matrice des déformations et des efforts initiaux, pour l'intervalle suivant, nous obtenons pour l'intervalle $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ pour lequel nous supposons également la section constante

$$\| V(x) \| = \| F^{1,2}(x) \| \cdot \| V(x_1) \| \tag{31}$$

Remplaçant dans (31) l'expression (30), nous obtenons

$$\| V(x) \| = \| F^{1,2}(x) \| \cdot \| F^{0,1}(x) \| \cdot \| V(0) \| \tag{32}$$

Il résulte que pour l'intervalle $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ on peut écrire :

$$\| F^{0,2}(x) \| = \| F^{1,2}(x) \| \cdot \| F^{0,1}(x) \| \tag{33}$$

En généralisant, nous considérerons que la poutre a une section constante sur les intervalles $(0 \leqslant x \leqslant x_1)$, $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$, $\cdots$ $(x_{p-1} \leqslant x \leqslant x_p)$, $(x_p \leqslant x \leqslant x_l)$.

Alors, à droite de la section $x = x_p$ la matrice $\| F(x) \|$ sera donné par l'expression :

$\| F(x) \| = \| F^{p,l}(x) \| \cdot \| F^{p-1,p}(x) \| \ldots x \| F^{1,2}(x) \| \cdot \| F^{01}(x) \|$ dans laquelle on a noté avec $\| F^{0,1}(x) \|$, $\| F^{1,2}(x) \|$,..., $\| F^{p,l}(x) \|$ les matrices des fonctions Krîlov correspondant aux intervalles sur lesquels la section est constante. Il en résulte que la variation de section en degrés intervient seulement dans le mode de calcul des matrices $\| F(x) \|$ et $\| F(x - x_l) \|$ du (29) et par conséquent elle n'influence pas cette formule générale.

Dans beaucoup de problèmes s'imposent à l'étude outre les derivées $v^{(j)}(x)$, d'autres grandeurs, que nous allons noter avec $y_\nu(x)$ et qui s'expriment en fonction de $v^{(j)}(x)$ par relations ayant la forme :

$$y_\nu^{(x)} = H(x) \sum_{j=0}^{n-1} C_{\nu j}\, v^{(j)}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

Inversement, les fonctions $v_{(x)}^{(j)}$ peuvent être exprimées en fonction de $y_\nu^{(x)}$ sous la forme :

$$v^{(j)}(x) = H(x) \sum_{\nu=1}^{n} C_{j\nu}\, y_\nu(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{36}$$

On peut déduire des relations (28), (35), (36) pour $y_\nu(x)$ expressions ayant la forme :

$$y_\nu(x) = H(x) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} C_{\nu j}\, F_{ji}(x)\, C_{ik}\, y_k^{(0)} \quad (\nu = 0, 12, 3, \ldots, n) \tag{37}$$

La relation (37) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{Vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_{10} & C_{11} & \cdot\cdot\cdot & C_{1,n-1} \\ C_{20} & C_{21} & \cdot\cdot\cdot & C_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n0} & C_{n1} & \cdot\cdot\cdot & C_{n,n-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & \cdot\cdot\cdot & F_{0,n-1} \\ F_{10} & F_{11} & \cdot\cdot\cdot & F_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_{n-1,0} & F_{n-1,1} & \cdot\cdot\cdot & F_{n-1,n-1} \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\begin{Vmatrix} \bar{C}_{10} & \bar{C}_{11} & \cdot\cdot\cdot & \bar{C}_{1,n-1} \\ \bar{C}_{20} & \bar{C}_{21} & \cdot\cdot\cdot & \bar{C}_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \bar{C}_{n0} & \bar{C}_{n1} & \cdot\cdot\cdot & \bar{C}_{n,n-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(0) \end{Vmatrix} \tag{38}$$

Applications

1. *La poutre droite de section constante actionnée par charges transversales.*

L'équation différentielle de la fibre moyenne déformée est :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \tag{39}$$

ou

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \tag{40}$$

Pe polynôme $P(s)$ et la fonction-image $\varphi(x)$ de l'opérateur $\frac{1}{P(s)}$ sont :

$$P(s) = s^4 \varphi(x) = \frac{x^3}{3!} H(x) \tag{41}$$

En appliquant les relations de récurrence (22), (23) et tenant compte que dans le polynôme $P(s)$ il y a $a_0=1$, $a_1=a_2=a_3=0$, l'expression de la matrice déformations-efforts est :

$$\begin{Vmatrix} v(x) \\ v'(x) \\ v''(x) \\ v'''(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ v_0' \\ v_0'' \\ v_0''' \end{Vmatrix} \tag{42}$$

Si on tient compte des relations connues de la résistance des matériaux $v=v$, $v'=\varphi$, $v''=-\frac{M}{EI}$, $v'''=-\frac{T}{EI}$ les grandeurs $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$ et $T(x)$ s'expriment ainsi :

$$\begin{Vmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2EI} & -\frac{x^3}{6EI} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{EI} & -\frac{x^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{Vmatrix} \tag{43}$$

2. *La poutre droite comprimé eaxialyment et actionnée par charges transversales.*

L'équation différentielle homogène qui correspond à ce cas, est :

$$\frac{d^4v}{dx^4}+\alpha^2\frac{d^2v}{dx^2}=0 \text{ où } \alpha^2=\frac{N}{EI} \tag{44}$$

Le polynôme $P(s)$ sera :

$$P(s)=s^4+\alpha^2 s^2 \tag{45}$$

L'opérateur $\frac{1}{P(s)}$ est :

$$\frac{1}{P(s)}=\frac{1}{s^4+\alpha^2 s^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right) \tag{46}$$

La fonction-image de cet opérateur est :

$$\varphi(x)=\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\right)\cdot H(x) \tag{47}$$

En calculant les fonctions $F_{ji}(x)$ et utilisant comme variable $\alpha x = \xi$, les grandeurs $v, \frac{\varphi}{\alpha}, \frac{M}{EI\alpha^2}, \frac{T}{EI\alpha^3}$ s'expriment par la relation :

$$\begin{Vmatrix} v \\ \frac{\varphi}{\alpha} \\ \frac{M}{EI\alpha^2} \\ \frac{T}{EI\alpha^3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \xi & -(1-\cos\xi) & \xi-\sin\xi \\ 0 & 1 & -\sin\xi & -(1-\cos\xi) \\ 0 & 0 & \cos\xi & \sin\xi \\ 0 & 0 & \sin\xi & \cos\xi \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \frac{\varphi_0}{\alpha} \\ \frac{M_0}{EI\alpha^2} \\ \frac{T_0}{EI\alpha^3} \end{Vmatrix} \tag{48}$$

3. *Poutre droite sur appui élastique continu, actionnée par charges transversales.*

L'équation différentielle homogène pour ce cas est :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\alpha^4 v = 0 \text{ unde } \alpha^4 = \frac{k}{4EI} \tag{49}$$

L'opérateur $\frac{1}{P(s)}$ sera :

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{s^4+4\alpha^4} = \frac{1}{8\alpha^3}\left[\frac{s}{(s+\alpha)^2+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{(s+\alpha)^2+\alpha^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{s}{(s-\alpha)^2+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{(s-\alpha)^2+\alpha^2}\right] \tag{50}$$

La fonction-image de l'opérateur est :

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\alpha^3}[\operatorname{ch}\alpha x \sin\alpha x - \operatorname{sh}\alpha x \cos\alpha x] \cdot H(x) \tag{51}$$

Si on prend comme variable $\alpha x = \xi$ et on considère les grandeurs $v, \frac{\varphi}{\alpha}, \frac{M}{EI\alpha^2}, \frac{T}{EI\alpha^3}$ résulte l'équation :

$$\begin{Vmatrix} v \\ \frac{\varphi}{\alpha} \\ \frac{M}{EI\alpha^2} \\ \frac{T}{EI\alpha^3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f_1(\xi) & f_2(\xi) & -f_3(\xi) & -f_4(\xi) \\ -4f_4(\xi) & f_1(\xi) & -f_2(\xi) & f_3(\xi) \\ -4f_3(\xi) & 4f_4(\xi) & f_1(\xi) & f_2(\xi) \\ 4f_2(\xi) & 4f_3(\xi) & -4f_4(\xi) & f_1(\xi) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \frac{\varphi_0}{\alpha} \\ \frac{M_0}{EI\alpha^2} \\ \frac{T_0}{EI\alpha^3} \end{Vmatrix} \tag{52}$$

où les fonctions $f(\xi)$ ont les expressions suivantes :

$$f_1(\xi) = \operatorname{ch}\xi \cos\xi \qquad f_2(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi \sin\xi$$
$$f_3(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi \sin\xi + \operatorname{sh}\xi \cos\xi) \qquad f_4(\xi) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi \sin\xi - \operatorname{sh}\xi \cos\xi) \tag{53}$$

4. *La plaque circulaire de section constante, chargée axialement simétrique.*

L'équation différentielle homogène de plaques circulaire, est :

$$\frac{d^4 v}{d r^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 v}{d r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 v}{d r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d v}{d r} = 0 \tag{54}$$

En effectuant le changement de variable $r = r_0 e^u$ on aboutit à une équation différentielle homogène avec coefficients constants :

$$\frac{d^4 v}{d u^4} - 4\frac{d^3 v}{d u^3} + 4\frac{d^2 v}{d u^2} = 0 \tag{55}$$

L'opérateur $\dfrac{1}{P(s)}$ est :

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{s^4 - 4s^3 + 4s^2} = \frac{1}{s^2(s-2)^2} = \frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s-2} + \frac{1/4}{(s-2)^2} \tag{56}$$

La fonction-image de cet opérateur est :

$$\varphi(u) = \frac{1}{4}(1 + u - e^{2u} + u e^{2u}) \tag{57}$$

En appliquant les relations de récurrence (22) et (23) il résulte pour la matrice auxiliaire $\| M_{ij} \|$ de fonctions Krîlov l'expression :

$$\| M_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & u & \frac{1}{4}(3 - 4u + 3e^{2u} - 2u e^{2u}) & \frac{1}{4}(1 + u - e^{2u} + 4e^{2u}) \\ 0 & 1 & -1 + e^{2u} - u e^{u} & \frac{1}{4}(1 - e^{2u} + 2u e^{2u}) \\ 0 & 0 & e^{2u} - 2u e^{2u} & u e^{2u} \\ 0 & 0 & -4u e^{2u} & e^{2u} + 2u e^{2u} \end{Vmatrix} \tag{58}$$

Les grandeurs v, φ, M_r et Q_r s'expriment en fonction de v, v', v'' et v''' par les relations :

$$\begin{Vmatrix} v \\ \varphi \\ M_r \\ Q_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-u}}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D(1-\mu)e^{-2u}}{r_0^2} & -\frac{De^{-2u}}{r_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2De^{-3u}}{r_0^3} & -\frac{De^{-3u}}{r_0^3} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{Vmatrix} \tag{59}$$

En considérant les conditions initiales :

$$r = r_0 \rightarrow v = v_0, \varphi = \varphi_0, M_r = M_0, Q_r = Q_0 \tag{60}$$

les grandeurs v_0, v_0', v_0'' et v_0''' s'expriment en fonction de : v_0, φ_0, M_0 et Q_0 par les relations :

$$\begin{Vmatrix} v_0 \\ v_0' \\ v_0'' \\ v_0''' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu)r_0 & -\frac{r_0^2}{D} & 0 \\ 0 & 2(1-\mu)r_0 & -\frac{2r_0^2}{D} & -\frac{r_0^3}{D} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Vmatrix} \tag{61}$$

Les grandeurs v, φ, M_r et Q_r s'expriment par la relation :

$$\begin{Vmatrix} v \\ \varphi \\ M_r \\ Q_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-u}}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D(1-\mu)e^{-2u}}{r_0^2} & -\frac{De^{-2u}}{r_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2De^{-3u}}{r_0^3} & -\frac{De^{-3u}}{r_0^3} \end{Vmatrix} \times$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & u & \frac{1}{4}[-3-4u+3e^{2u}-2ue^{2u}] & \frac{1}{4}[1+u-e^{2u}+4e^{2u}] \\ 0 & 1 & -1+e^{2u}-ue^{2u} & \frac{1}{4}[1-e^{2u}+2ue^{2u}] \\ 0 & 0 & e^{2u}-2ue^{2u} & ue^{2u} \\ 0 & 0 & -4ue^{2u} & e^{2u}+2ue^{2u} \end{Vmatrix} \times \quad (62)$$

$$\times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu)r_0 & \frac{-r_0^2}{D} & 0 \\ 0 & 2(1-\mu)r_0 & \frac{-2r_0^2}{D} & \frac{-r_0^3}{D} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Vmatrix}$$

Si on effectue le produit des trois matrices et si on fait les notations :

$$f_1 = 1-2^{2u} \quad f_2 = u \quad f_3 = ue^{2u} \quad (63)$$

les grandeurs v, $r\varphi$, $\frac{r^2 M_r}{D}$ et $\frac{r^3 Q_r}{D}$ s'expriment par les relations :

$$\begin{Vmatrix} v \\ r\varphi \\ \frac{r^2 M_r}{D} \\ \frac{r^3 Q_r}{D} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{4}[-(1-\mu)f_1+2(1+\mu)f_2] & \frac{1}{4}(f_1+2f_2) & -\frac{1}{4}(f_1+f_2+f_3) \\ 0 & 1-\frac{1-\mu}{1}f_1 & \frac{1}{2}f_1 & -\frac{1}{4}(f_1+2f_3) \\ 0 & \frac{1-\mu^2}{2}f_2 & 1-\frac{1+\mu}{2}f_1 & \frac{1}{4}[-(1-\mu)f_1+2(1+\mu)f_3] \\ 0 & 0 & 0 & 1-f_1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ r_0\varphi_0 \\ \frac{r_0^2 M_0}{D} \\ \frac{r_0^3 Q_0}{D} \end{Vmatrix} \quad (64)$$

De ces exemples on constate que l'utilisation de certaines notions de la théorie des distributions et du calcul opérationnel a conduit à une méthode commode de détermination des fonctions de Krîlov.

On constate cependant que la considération de la charge concentrée sous la forme (13), peut mettre en évidence toute une série de

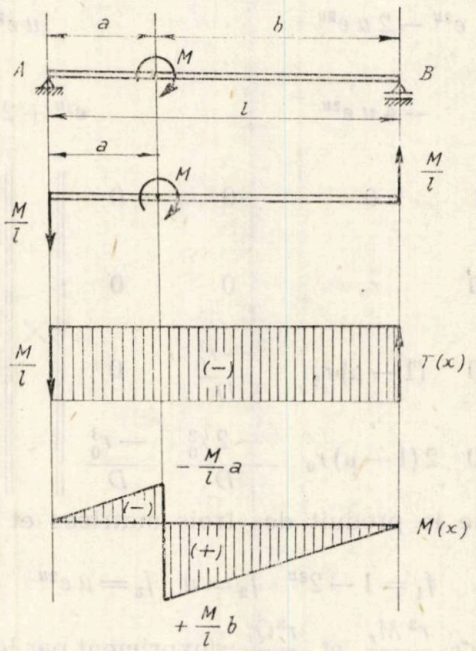


Fig. 6.

particularités, les unes inaccessibles par voie élémentaire, et en même temps, elle permet une solution commode et générale de certains problèmes de discontinuités.

Par exemple, par voie élémentaire s'établit que dans le cas d'un moment concentré M appliqué dans la section d'abscisse $x=a$ (fig. 6) d'une poutre de longueur l simplement appuyée aux extrémités, le diagramme des efforts tranchants est un rectangle quels que soient a et b. Pourtant le diagramme des moments de flexion différent. Mais en écrivant le chargement de la poutre sous la forme :

$$p(x) = -M\,\delta'(x-a) \quad (a)$$

et tenant compte que $\dfrac{dT}{dx} = -p$, on peut écrire

$$\frac{dT}{dx} = M\,\delta'(x-a)$$

En appliquant le calcul opérationnel à cette équation differentielle, nous obtenons :

$$sT = T' + T_0 \cdot 1$$

ou, tenant compte de *(b)* et divisant par s, il résulte :

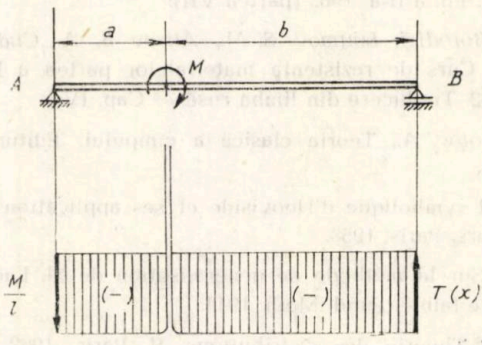


Fig. 7.

$$T = \frac{1}{s} T_0 + \frac{\delta'(x-a)}{s} M$$

Passant aux fonctions-images, il résulte pour $T(x)$ et $M(x)$ les expressions :

$$T(x) = T_0 \cdot H(x) + M\delta(x-a) = -\frac{M}{l} \cdot H(x) + M\delta(x-a)$$

$$M(x) = -\frac{M}{l} x + M \cdot H(x-a) \text{ respectif } \begin{cases} x < a & M(x) = -\dfrac{M}{l} x \\ x > a & M(x) = -\dfrac{M}{l} x + M \end{cases}$$

Le diagramme $T(x)$ sera celui de la fig. (7) où on constate que dans le point d'abscisse $x=a$ l'effort tranchant présente une discontinuité qui justifie le saut du moment de flexion dans la même section dans le diagramme.

La chaire de mécanique II
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Beles A. A., R. P. Voinea,* Rezistența materialelor pentru constructori. Vol. II. Editura Tehnică, Buc. 1959 (Cap. IV, Cap. VIII).

2. *Ciorănescu N.,* Tratat de matematici speciale revăzut și completat de Prof. Dr. Radu Bădescu. Ed. a II-a, 1963 (partea VII).

3. *Filonenco M.M., Borodici, Iziumov S. M., Alisov B. A., Cudriațev E. N. și Malghinov L. I.,* Curs de rezistența materialelor partea a II-a, Editura Tehnică. București, 1952. Traducere din limba rusă — Cap. IV.

4. *Ivanenko D., Sokolov A.,* Teoria clasică a cîmpului. Editura Tehnică București, 1955. Cap. 1.

5. *Janet P.,* Le calcul symbolique d'Heoviside et ses applications à l'électrotechnique, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

6. *Mikusinski J. G.,* Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible, Fund. Math. 1948.

7. *Schwartz Laurent,* Théorie des distributions, II, Paris, 1962.

8. *Schwartz Laurent,* Théorie des distributions, Tom. I et II, Paris, 1957.

9. *Timoshenko S.,* Résistance des matériaux, 2-ème partie, Paris, 1949.

10. *Teumin S. I.,* Îndreptar privind regimurile electrice tranzitorii, Cap. II și Cap. IV.

11. *Vasilache Sergiu,* Calcul opérationnel algebrique des distributions à support dans R_+^n $n \geqslant 1$ chap. I. (Revue de Math. pures et appliquées I—IV. Nr. 2. 1959).

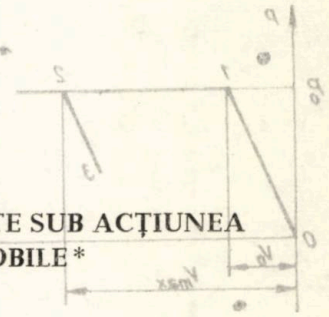
12. *Vasilache Sergiu,* Calcul opérationnel algebrique des distributions à support dans R_+^n $n \geqslant 1$ chap. II (Revue de Math. pures et appliquées, I.I. 1960).

13. *Voinea Radu,* Cîteva considerații cu privire la metoda Krîlov pentru studiul deformațiilor grinzilor drepte" (Industria construcțiilor și a materialelor de construcții, anul V, nr. 2, februarie 1954).

14. * * * Manualul inginerului mecanic, vol. 1, Editura tehnică. Buc. 1959. (partea a II-a Rezistența materialelor).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI (XV), 1969. Numărul 1

C.Z.: 539.3/.4:625.03:625.143



DEPLASAREA LATERALĂ A CĂII FERATE SUB ACŢIUNEA UNEI FORŢE LATERALE, MOBILE*

GHEORGHE RUSIU

Încărcarea căii ferate cu forţe orizontale transversale apare în special la înscrierea în curbă a materialului rulant. Eforturile şi deplasările produse de o asemenea încărcare au început să fie studiate abia în ultimul timp. Astfel, la căile ferate din Suedia, Japonia, R.F. a Germaniei, R.S. Cehoslovacă s-au efectuat în ultimii ani măsurători ale forţei de ghidare şi ale eforturilor produse de aceasta în şină. În Franţa s-a studiat deplasarea laterală a căii. În lucrarea [1] se prezintă rezultatele măsurătorilor făcute şi un calcul al deplasării laterale a căii sub acţiunea unei forţe transversale fixe, în ipoteza lunecării traverselor.

În lucrarea de faţă se va prezenta calculul deplasării laterale al căii sub acţiunea unei forţe transversale mobile. Se admite ca înainte de a luneca, traversele au şi o deplasare elastică în balast [2].

1. *Ipoteze*

Calculele se vor referi la şina sudată şi de aceea va trebui să se ţină seama de forţa axială produsă de variaţia de temperatură.

Lungimea mare a porţiunilor sudate permite să se considere şina ca o grindă de lungime infinită.

Rezemarea şinei în balast se admite că este continuă. Acest lucru este posibil deoarece distanţa dintre traverse este relativ mică.

Şinele fiind legate între ele prin traverse se deformează aproximativ la fel şi de aceea se va studia o singură şină încărcată cu jumătate din sarcina ce revine căii.

Reacţiunea balastului se consideră că variază în raport cu deplasarea traverselor după dreptele prezentate în fig. 1.

Pînă la o valoare v_0 a deplasării, pe o porţiune 0—1, $p = K_1 v$. Dacă deplasarea continuă să crească peste v_0 reacţiunea rămîne constantă şi egală cu p_0. Porţiunea 2—3 corespunde descărcării şi reacţiunea este dată de relaţia $p = K_1 v - K_1 (v_{max} - v_0)$.

* Manuscris predat la redacţie la 30 septembrie 1968.

Asupra şinei mai acţionează şi reacţiunile din legăturile şină-traversă. Aceste reacţiuni sînt cupluri care se opun rotirii în plan orizontal, a şinei în raport cu traversa. Relaţia dintre momentul cuplului şi

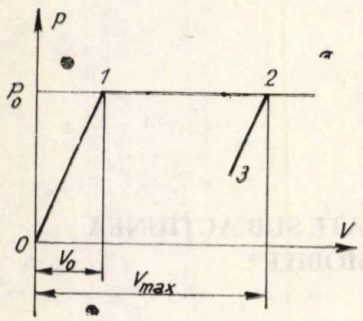


Fig. 1

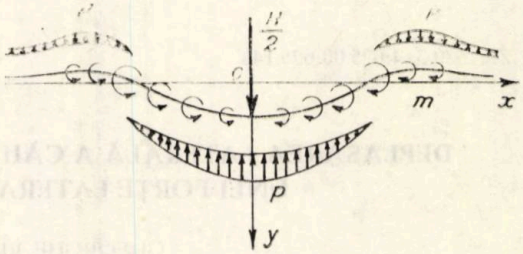


Fig. 2

unghiul de rotire se admite că este liniară, $m = K_2\varphi$. Rezemării continue a şinei îi va corespunde o repartizare continuă a acestor cupluri a căror intensitate s-a notat cu m.

Intensităţile reacţiunilor distribuite, p şi m, se obţin prin împărţirea valorilor corespunzătoare unei traverse la distanţa dintre traverse.

Nu se vor lua în consideraţie forţele de inerţie datorite mişcării şinei.

Schema de calcul a şinei se va prezenta deci ca în fig. 2.

2. *Ecuaţia diferenţială a axei deformate a căii*

Sistemul de referinţă xoy, în planul orizontal al căii, se alege ca în fig. 2 şi se consideră că se deplasează o dată cu forţa H. Deplasarea laterală a axei şinei se notează cu v. Pentru a obţine ecuaţia diferenţială a deplasării v, se izolează un element de şină de lungime dx încărcat cu eforturile N, T, M, reacţiunile pdx, mdx (fig. 3) şi se scriu ecuaţiile de echilibru. Se obţine :

$$\frac{dT}{dx} = p \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dx} = T + N\frac{dv}{dx} - m \tag{2}$$

Înlocuind $m = K_2\varphi = K_2\dfrac{dv}{dx}$ şi derivînd apoi relaţia a doua în raport cu x se obţine :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p + N\frac{d^2v}{dx^2} - K_2\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2'}$$

Se ştie că :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{3}$$

EI fiind rigiditatea șinei în plan orizontal.

În continuare se derivează de două ori relația (3) și din expresia astfel obținută și relația (2') se elimină momentul încovoietor. Se ajunge astfel la ecuația diferențială căutată :

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{N - K_2}{EI} \frac{d_2v}{dx^2} + \frac{p}{EI} = 0 \qquad (4)$$

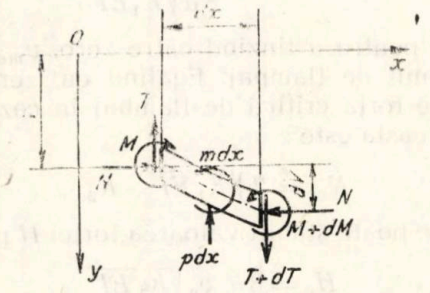


Fig. 3.

3. *Deplasarea elastică a căii*

Dacă forța orizontală H este suficient de mică astfel încît deplasările căii să fie inferioare deplasării limite elastice v_0, reacțiunea balastului este $p = K_1 v$ și ecuația diferențială (4) are următoarea soluție :

$$v = e^{-\alpha x}(P \cos \beta x + Q \sin \beta x) + e^{\alpha x}(R \cos \beta x + S \sin \beta x) \qquad (5)$$

unde :

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{K_1}{4EI}} - \frac{N - K_2}{4EI}} \; ; \; \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{K_1}{4EI}} + \frac{N K_2}{4EI}}$$

La stabilirea soluției (5) s-a considerat că $\sqrt{\frac{K}{EI}} > \frac{N - K_2}{2EI}$, ceea ce corespunde valorilor numerice ale constantelor șinei și balastului.

Urmează să se determine constantele arbitrare din (5) punînd condițiile la limită. Potrivit fig. 2 aceste condiții sînt : pentru $x = 0$: $v' = 0$ și $T = -\frac{H}{4}$ unde din relația (2) : $T = -EI\, v''' - (N - K_2)\, v'$

și pentru $x \to \infty$; $v \to 0$.

Ultima condiție conduce la $R = S = 0$, iar primele două sînt satisfăcute dacă :

$$P = \frac{H}{8\alpha \sqrt{K_1 EI}} \; ; \quad Q = \frac{H}{8\beta \sqrt{K_1 EI}}$$

Cu aceste constante relația (5) se scrie astfel:

$$v = \frac{H}{8\alpha\sqrt{K_1 EI}} e^{-\alpha x}\left(\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta x\right) \quad (5')$$

Pentru $x=0$ se obține

$$v_{max} = \frac{H}{8\alpha\sqrt{K_1 EI}} \quad (6)$$

De observat că pentru α tinzînd către zero, v_{max} tinde către infinit Apare deci fenomenul de flambaj. Egalînd cu zero expresia parametrului α se regăsește forța critică de flambaj în cazul comportării elastice a balastului. Aceasta este:

$$N_{cr} = 2\sqrt{K_1 EI} + K_2 \quad (7)$$

Din relația (6) se poate stabili valoarea forței H pentru care $v_{max} = v_0$

$$H_0 = 8\alpha\, v_0 \sqrt{K_1 EI}$$

Potrivit celor arătate la început se obțin deplasări elastice ale căii numai pentru $H \leqslant H_0$.

4. *Deplasarea în regim elasto-plastic*

Pentru o forță laterală H mai mare decît H_0, pe anumite porțiuni ale șinei se produc deplasări mai mari decît deplasarea limită elastică și balastul va suferi tasări nereversibile. În această situație axa deformată a șinei va rămîne simetrică față de suportul forței H numai pentru cazul forței fixe. Fără a dezvolta cazul forței fixe se prezintă în figura 4 curbele $H = f(v_{max})$ calculate pentru șina tip 49.

În cazul forței laterale mobile, datorită deformațiilor remanente ce se produc în urma forței, axa deformată a șinei nu mai este simetrică, ci se prezintă ca în fig. 5.

Se disting patru domenii:

I, domeniul tasării elastice a balastului, corespunzător porțiunii 0—1 din curba $p=f(v)$, fig. 1. Deplasarea în acest caz este dată de expresia (5)

$$v_1 = e^{-\alpha x}(P_1\cos\beta x + Q_1\sin\beta x) + e^{\alpha x}(R_1\cos\beta x + S_1\sin\beta x)$$

II, domeniul tasării plastice de lungime a între punctele A și B, corespunzător ramurii 1—2 din fig. 1. Introducînd în ecuația diferențială (4) $p=p_0$ și integrînd-o se găsesc trei tipuri de soluții după cum

$$N - K_2 \gtrless 0 .$$

Cazul $N - K_2 > 0$:

$$v_2 = A_2 + B_2 x + C_2\cos\gamma x + D_2\sin\gamma x - \frac{p_0}{2EI}\frac{x^2}{\gamma^2}$$

unde

$$\gamma = \sqrt{\frac{N + K_2}{EI}}$$

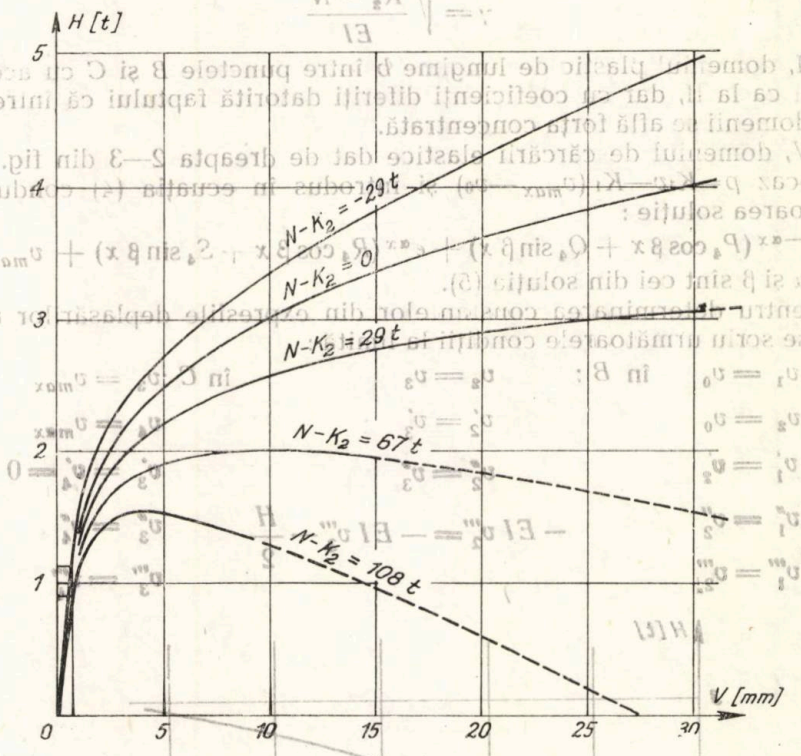


Fig. 4.

(8)

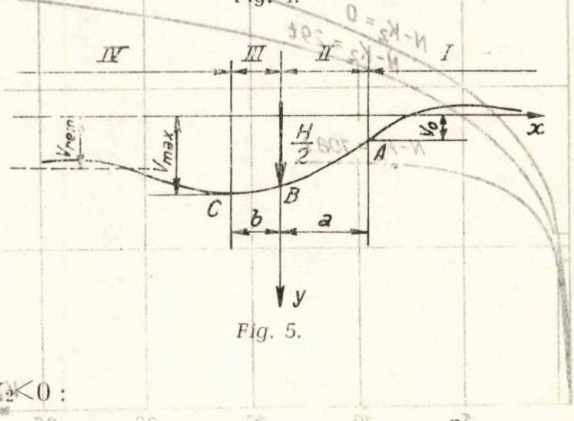


Fig. 5.

Cazul $N - K_2 < 0$:

$$v_2 = A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2 - \frac{p_0}{24\,EI} x^4$$

Cazul $N - K_2 = 0$:

$$v_2 = A_2 + B_2 x + C_2 \operatorname{ch} \gamma x + D_2 \operatorname{sh} \gamma x + \frac{p_0}{2EI} \frac{x^2}{\gamma^2}$$

unde :

$$\gamma = \sqrt{\frac{K_2 - N}{EI}}$$

III, domeniul plastic de lungime b între punctele B şi C cu aceleaşi ecuaţii ca la II, dar cu coeficienţi diferiţi datorită faptului că între cele două domenii se află forţa concentrată.

IV, domeniul descărcării elastice dat de dreapta 2—3 din fig. 1. În acest caz $p = K_1 v - K_1 (v_{max} - v_0)$ şi introdus în ecuaţia (4) conduce la următoarea soluţie :

$$v_4 = e^{-\alpha x} (P_4 \cos \beta x + Q_4 \sin \beta x) + e^{\alpha x} (R_4 \cos \beta x + S_4 \sin \beta x) + v_{max} - v_0$$

unde α şi β sînt cei din soluţia (5).

Pentru determinarea constantelor din expresiile deplasărilor v_1, v_2, v_3, v_4 se scriu următoarele condiţii la limită :

$$\begin{array}{lll}
\text{în } A: & \text{în } B: & \text{în } C: \\
v_1 = v_0 & v_2 = v_3 & v_3 = v_{max} \\
v_2 = v_0 & v_2' = v_3' & v_4 = v_{max} \\
v_1' = v_2' & v_2'' = v_3'' & v_3' = v_4' = 0 \\
v_1'' = v_2'' & -EI\, v_2''' = -EI\, v_3''' - \frac{H}{2} & v_3'' = v_4'' \\
v_1''' = v_2''' & & v_3''' = v_4'''
\end{array} \qquad (8)$$

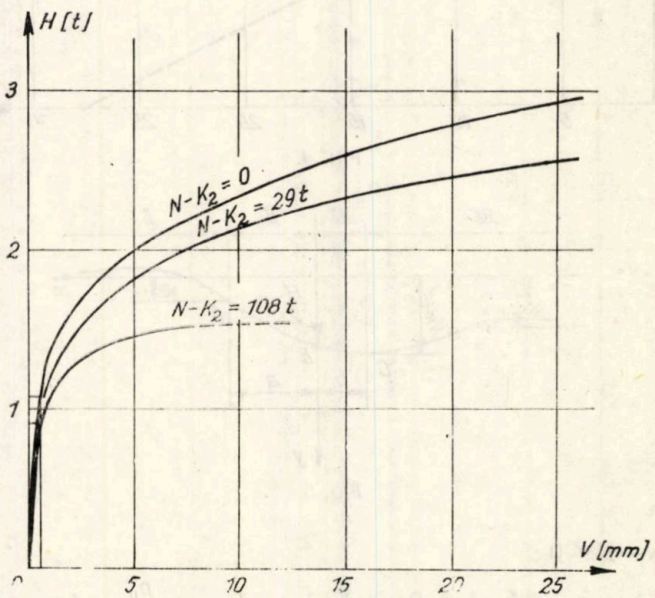


Fig. 6.

Pentru punctele de la infinit, adică pentru $x \to \pm\infty$, $v_1 \to 0$, respectiv $v_4 \to 0$. Aceste condiții dau imediat $R_1 = S_1 = 0$ și $P_4 = Q_4 = 0$.

Condițiile (8) se vor scrie alegînd originile absciselor astfel: pentru v_1 în A, pentru v_2 în B, și pentru v_3 și v_4 în C.

Se va dezvolta cazul $N - K_2 > 0$, în care șina este comprimată puternic. Celelalte două cazuri urmează aceeași cale.

Condițiile (8) conduc la următorul sistem:

$$1)\quad P_1 = v_0$$

$$2)\quad A_2 + B_2 a + C_2 \cos\gamma a + D_2 \sin\gamma a - \frac{p_0}{2EI}\,\frac{a^2}{\gamma^2} = v_0$$

$$3)\quad B_2 - \gamma C_2 \sin\gamma a + \gamma D_2 \cos\gamma a - \frac{p_0}{EI}\,\frac{a}{\gamma^2} = -\alpha P_1 + \beta Q_1$$

$$4)\quad -\gamma^2 C_2 \cos\gamma a - \gamma^2 D_2 \sin\gamma a - \frac{p_0}{EI}\,\frac{1}{\gamma^2} = (\alpha^2 - \beta^2) P_1 - 2\alpha\beta Q_1$$

$$5)\quad \gamma^3 C_2 \sin\gamma a - \gamma^3 D_2 \cos\gamma a = (3\alpha\beta^2 - \alpha^3) P_1 + (3\alpha^2\beta - \beta^3) Q_1$$

$$6)\quad A_2 + C_2 = A_3 + B_3 b + C_3 \cos\gamma b + D_3 \sin\gamma b - \frac{p_0}{2EI}\,\frac{b^2}{\gamma^2}$$

$$7)\quad B_2 + \gamma D_2 = B_3 - \gamma C_3 \sin\gamma b + \gamma D_3 \cos\gamma b - \frac{p_0}{EI}\,\frac{b}{\gamma^2}$$

$$8)\quad -\gamma^2 C_2 = -\gamma^2 C_3 - \cos\gamma b - \gamma^2 D_3 \sin\gamma b$$

$$9)\quad EI\gamma^3 D_2 + \frac{H}{2} = -EI(\gamma^3 C_3 \sin\gamma b - \gamma^3 D_3 \cos\gamma b) \qquad (9)$$

$$10)\quad A_3 + C_3 = v_{max}$$

$$11)\quad R_4 = v_0$$

$$12)\quad B_3 + \gamma D_3 = 0$$

$$13)\quad \alpha R_4 + \beta S_4 = 0$$

$$14)\quad -\frac{p_0}{EI}\,\frac{1}{\gamma^2} - \gamma^2 C_3 = (\alpha^2 - \beta^2) R_4 + 2\alpha\beta S_4$$

$$15)\quad -\gamma^3 D_3 = (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) R_4 + (3\alpha^2\beta - \beta^3) S_4$$

În sistemul de mai sus necunoscutele sînt: P_1, Q_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, R_4, S_4, a, b, v_{max}. Deoarece a intră în ecuații prin funcții trigonometrice, este indicat să se considere cunoscut și să se ia H ca necunoscută. În felul acesta se va obține o exprimare parametrică a relației dintre H și v parametrul fiind a.

Din ecuațiile 11, 12, 13, 14, 15 ale sistemului (9) se obține:

$$R_4 = v_0$$

$$S_4 = -\frac{\alpha}{\beta} v_0$$

$$C_3 = -\frac{p_0}{\gamma^4 EI} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2} v_0$$

$$D_3 = 2\frac{\alpha}{\gamma^3}(\beta^2 + \alpha^2) v_0$$

$$B_3 = -2\frac{\alpha}{\gamma^2}(\beta^2 + \alpha^2) v_0$$

Din ecuațiile 1, 3, 4, 5 se pot exprima P_1, B_2, C_2, D_2, în funcție de Q_1:

$$P_1 = v_0$$

$$B_2 = \left(\alpha + \frac{3\alpha\beta^2 - \alpha^3}{\gamma^2}\right) v_0 + \frac{p_0 a}{EI\gamma^2} + \left(\beta + \frac{3\alpha^2\beta - \beta^3}{\gamma^2}\right) Q_1$$

$$-\gamma^3 C_2 = \left[\left(\gamma\alpha^2 - \gamma\beta^2 + \frac{p_0}{EI}\frac{1}{\gamma v^0}\right)\cos\gamma a - (3\alpha\beta^2 - \alpha^3)\sin\gamma a\right] v_0 -$$

$$-[2\alpha\beta\gamma\cos\gamma\alpha + (3\alpha^2\beta - \beta^3)\sin\gamma a]\, Q_1$$

$$-\gamma^3 D_2 = \left[\left(\gamma\alpha^2 - \gamma\beta^2 + \frac{p_0}{EI}\frac{1}{\gamma v_0}\right)\sin\gamma a + (3\alpha\beta^2 - \alpha^3)\cos\gamma a\right] v_0 -$$

$$-[2\alpha\beta\gamma\sin\gamma a - (3\alpha^2\beta - \beta^3)\cos\gamma a]\, Q_1$$

Introducînd necunoscutele determinate mai sus în ecuațiile 7 și 8 se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele Q_1 și b. Q_1 se poate elimina ușor fiind la puterea întîia și rezultă o ecuație transcendentă în b care se rezolvă grafic sau prin încercări.

Q_1 și b fiind calculate se pot determina apoi B_2, C_2, D_2 din relațiile precedente și din ecuațiile 2, 6, 9 necunoscutele A_2, A_3 și H. Deplasarea maximă $v_{max} = A_3 + C_3$, deplasarea în dreptul forței H, $v_H = A_2 + C_2$ și deplasarea remanentă $v_{rem} = v_{max} - v_0$.

S-au efectuat calcule numerice pentru șina tip 49 și cu rezultatele obținute s-au trasat curbele $H = f(v_{max})$ din fig. 6. Caracteristicile balastului au fost stabilite prelucrînd datele experimentale din lucrarea [3]. S-au găsit următoarele valori:

$p_0 = 3{,}3$ kgf/cm²; $v_0 = 0{,}05$ cm; $K_1 = 66$ kgf/cm²;
$K_2 = 50\,000$ kgf/cm.

Aceste valori se referă la șina încărcată numai cu sarcină orizontală. De aceea deplasările calculate folosind aceste date sînt destul de mari. Sarcinile verticale fac să crească rezistența balastului și deci micșorează deplasarea laterală.

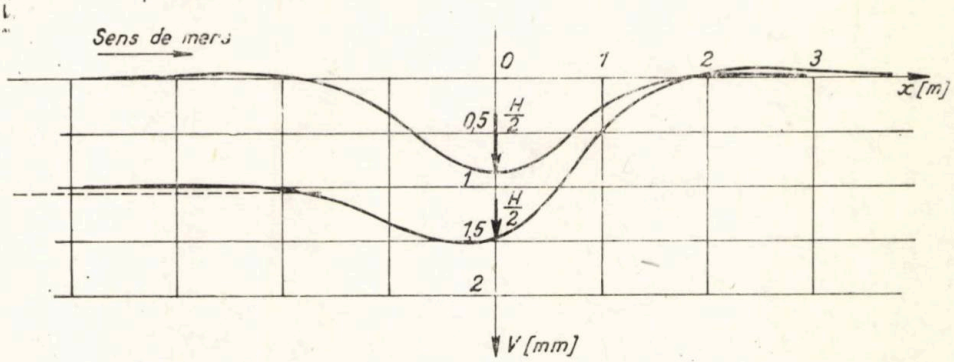


Fig. 7.

În fig. 7 se prezintă șina deformată în cazul încărcării cu forța laterală $H=1460$ kgf fixă (curba simetrică) și în cazul încărcării cu aceeași forță H mobilă (curba asimetrică). Forța axială $N=50$ t, deci $N—K_2=0$. Se observă că deplasările sînt mult mai mari în cazul forței mobile decît în cazul forței fixe.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Prud'homme, M. A.:* La résistance de la voie aux efforts transverseaux exercés par le matériel roulant, Revue Générale des Chemins de Fer, Janvier 1967, pag. 1—21.

2. *Teodorescu, C. C.:* Teoria șinei fără joante supuse la variații de temperatură, Editura Academiei R.S.R. 1965.

3. *Bijl, F:* L'effort de serpentage dans une voie à longs rails soudés déterminé par une méthode de calcul non linearisé, Bulletin mensuel de l'association international du Congrès des Chemins de fer, sept. 1965, pag. 553.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

TERMOTEHNICĂ

C.Z.: 621.1.01 : 621.56/.57 : 621.51

STUDIUL RANDAMENTULUI EXERGETIC AL PROCESELOR FRIGORIFICE REALE, PRIN COMPRIMARE DE VAPORI

C. STAMATESCU, MARIETA GRIGORIU, T. DUICU

Pe baza schemei de bilanț exergetic al procesului de producere a frigului prin comprimare de vapori de agent, a relației de definiție și a relației de calcul a randamentului exergetic [1], s-au studiat pentru procesele teoretice cu agenții uzuali amoniac și freon F-12, funcțiile reprezentînd variația valorilor acestui randament cu temperatura de vaporizare a agentului θ_0, temperatura de condensare θ_c fiind un parametru considerat între limitele uzuale ale procesului [2]. Acest randament a fost denumit randamentul exergetic teoretic adiabat.

Randamentul exergetic al procesului real prin comprimare de vapori, care se poate denumi randament exergetic real al procesului frigorific, $\eta_{ex_{(r)}} = \eta_{ex}$, se poate exprima prin următoarea relație de definiție :

$$\eta_{ex_{(r)}} = \eta_{ex} = \eta_{ex_{t\,(ad)}} \cdot \tau \cdot \pi_{(ad)} \tag{1}$$

care se justifică în cele ce urmează .

În această relație :

$\eta_{ex_{t(ad)}}$ — reprezintă valoarea randamentului exergetic în procesul frigorific teoretic,

τ — reprezintă coeficientul de corecție al procesului frigorific datorit condițiilor reale ireversibile de schimb de căldură în vaporizatorul și condensatorul instalației frigorifice,

$\pi_{(ad)}$ — reprezintă factorul de putere al compresorului frigorific al instalației.

* Manuscris predat la redacție la 15 martie 1968.

1. Randamentul exergetic teoretic

Studiul randamentului exergetic al procesului teoretic prin comprimare de vapori, $\eta_{ex_{t\,(ad)}}$ s-a întocmit și s-a publicat pentru agenții amoniac și freon F-12, atît pentru procesul simplu cît și pentru procesul prevăzut cu subrăcirea condensatului [2]. Relația de calcul a acestui randament este:

$$\eta_{ex_{t\,(ad)}} = \frac{T_a - T_0}{T_0} \frac{q_0}{l_{c(ad)}} \tag{2}$$

2. Coeficientul de corecție τ

Prima corectură pentru stabilirea expresiei de calcul a randamentului exergetic al procesului *real*, privește procesul frigorific însuși, și se face prin factorul τ din relația (1).

Coeficientul de corecție al procesului, notat τ, se introduce pentru corectarea parametrului $q_0/l_{c\,(ad)}$ din relația de definiție a randamentului exergetic al procesului teoretic $\eta_{ex_{t(ad)}}$, (relația (2)). Corecțiunea

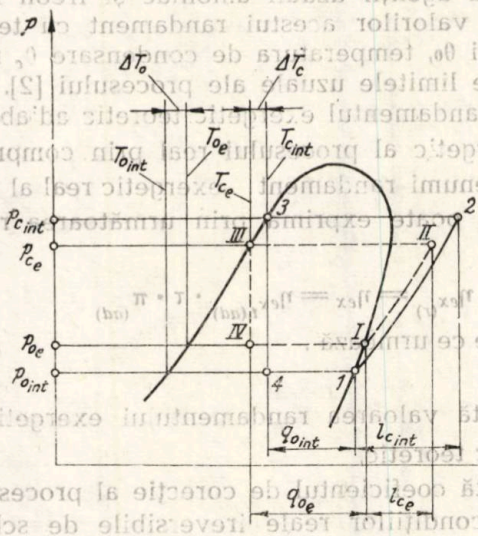


Fig. 1.

care trebuie introdusă se datorează diferențelor de temperatură ΔT necesare în procesele reale, ireversibile, de schimb de căldură din condensatorul și vaporizatorul instalației frigorifice. Pentru stabilirea expresiei de calcul a acestui coeficient se compară două cicluri frigorifice

evoluînd între limite de temperatură diferite caracterizate prin ΔT_c și ΔT_0, ca în fig. 1. Cele 2 cicluri care se compară sînt: ciclul notat 1-2-3-4-1 între limitele de temperatură din agent notate cu indicele *„int"*, considerate în procesul teoretic egale cu cele din mediile exterioare, și ciclul notat I-II-III-IV-I între limitele de temperatură din mediile

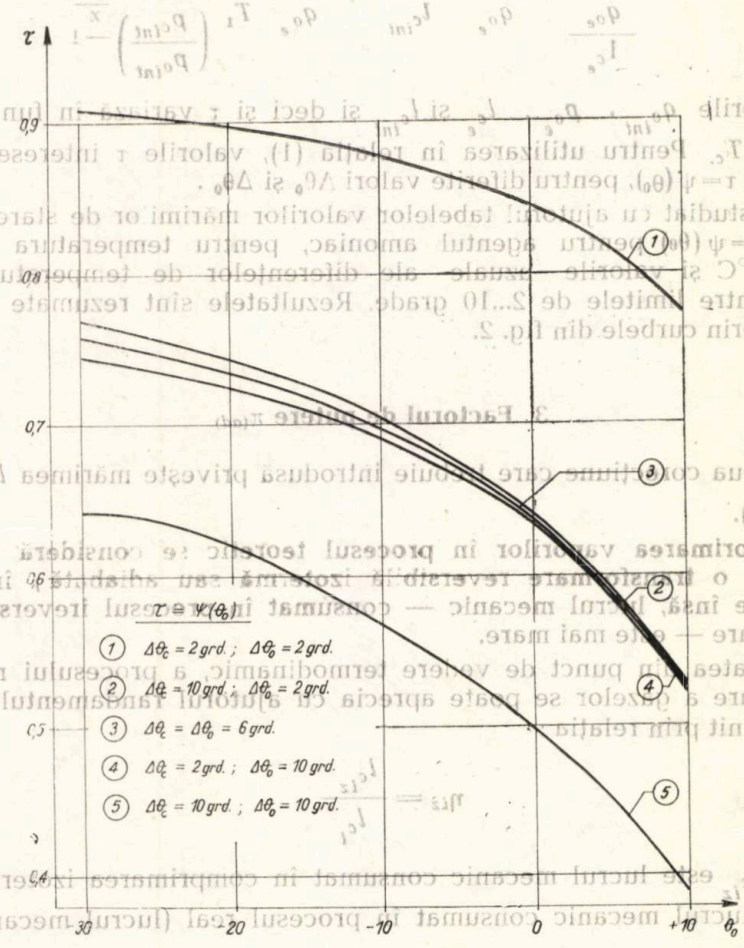


Fig. 2.

exterioare, notate cu indicele e. Urmărind notațiile din figură, rezultă, în condițiile reale față de condițiile teoretice, valori mai mici pentru capacitatea frigorifică specifică ($q_{0\,int}$ față de q_{0e}) și mai mari pentru lucrul mecanic specific consumat ($l_{c_{int}}$ față de l_{c_e}). Deci coeficientul

de corecție τ se poate calcula chiar prin raportul celor două mărimi specifice, adică :

$$\tau = \frac{\frac{q_{o_{int}}}{l_{c_{int}}}}{\frac{q_{o_e}}{l_{c_e}}} = \frac{q_{o_{int}}}{q_{o_e}} \cdot \frac{l_{c_e}}{l_{c_{int}}} = \frac{q_{o_{int}}}{q_{o_e}} \frac{T_I}{T_1} \frac{\left(\frac{p_{c_e}}{p_{o_e}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\left(\frac{p_{c_{int}}}{p_{o_{int}}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1} \tag{3}$$

Valorile $q_{o_{int}}$, p_{o_e}, l_{c_e} și $l_{c_{int}}$ și deci și τ variază în funcție de ΔT_0 și ΔT_c. Pentru utilizarea în relația (1), valorile τ interesează ca funcțiuni $\tau = \psi(\theta_0)$, pentru diferite valori $\Delta\theta_0$ și $\Delta\theta_0$.

S-a studiat cu ajutorul tabelelor valorilor mărimilor de stare, funcțiunea $\tau = \psi(\theta_0)$ pentru agentul amoniac, pentru temperatura uzuală $\theta_c = +25°C$ și valorile uzuale ale diferențelor de temperatură $\Delta\theta_o$ și $\Delta\theta_c$, între limitele de 2...10 grade. Rezultatele sînt rezumate și sintetizate prin curbele din fig. 2.

3. Factorul de putere $\pi_{(ad)}$

A doua corecțiune care trebuie introdusă privește mărimea $l_{c_{(ad)}}$ din relația (2).

Comprimarea vaporilor în procesul teoretic se consideră că are loc după o transformare reversibilă izotermă sau adiabată ; în condiții reale însă, lucrul mecanic — consumat în procesul ireversibil de comprimare — este mai mare.

Calitatea din punct de vedere termodinamic, a procesului real de comprimare a gazelor se poate aprecia cu ajutorul randamentului izoterm, definit prin relația :

$$\eta_{iz} = \frac{l_{c_{iz}}}{l_{c_i}} \tag{4}$$

în care $l_{c_{iz}}$ este lucrul mecanic consumat în comprimarea izotermă iar l_{c_i} este lucrul mecanic consumat în procesul real (lucrul mecanic indicat) [3].

În cazul compresoarelor frigorifice procesul teoretic (ideal) de comprimare este procesul adiabat, iar nu cel izoterm. Efectuarea unei comprimări izoterme în procesul teoretic din mașina frigorifică poate fi concepută numai prin utilizarea unui grad ridicat de supraîncălzire a vaporilor aspirați, însă după cum este cunoscut [2], supraîncălzirea vaporilor la aspirație nu este favorabilă decît în condiții de grade de supraîncălzire reduse.

Pe de altă parte, în cazul suflantelor centrifuge sau în cazul compresoarelor volumice răcite cu aer, procesul de comprimare real rezultă, în general, după o transformare politropă echivalentă, avînd exponentul politrop mai mare decît exponentul adiabat, ceea ce reprezintă de asemenea un argument pentru alegerea procesului adiabat de comprimare ca proces ideal de comparație.

În aceste condiții se impune utilizarea raportului $l_{c_{ad}}/l_{c_i}$ sau a raportului $l_{c_{ad}}/\Delta_i$, după felul procesului, în locul raportului care definește randamentul izoterm în comprimarea gazelor (relația 4).

3.1. *Procesul de comprimare real considerat fără frecări.*

Procesul de comprimare care are loc în treapta compresorului volumic, cu piston cu mișcare lineară, sau rotativ, poate fi considerat fără frecări, fenomenele gazodinamice influențînd în mod practic numai fazele de aspirație și refulare a procesului real, prin căderile de presiune respective.

Un asemenea proces poate avea loc cu sau fără răcire, comprimarea desfășurîndu-se după o politropă echivalentă, definită prin exponentul politrop respectiv $m \gtrless \varkappa$, cazul $m > \varkappa$ putînd avea loc în special în compresoarele volumice nerăcite, sau insuficient răcite, folosite în procesele frigorifice. Lucrul mecanic consumat în procesul politrop echivalent, $l_{c_{(i)}}$ este mai mic, egal, sau mai mare decît lucrul mecanic $l_{c_{(ad)}}$ cu care se compară, după condițiile răcirii (1—2'), 1—2 sau 1—2'' în fig. 3); raportul celor două valori $l_{c_{(ad)}}/l_{c_{(i)}}$ poate caracteriza calitatea procesului din punct de vedere termodinamic. Acest raport definește un factor de putere teoretic, expresia lui fiind deci,

$$\pi_{ad_{(t)}} = \frac{l_{c_{(ad)}}}{l_{c_{(i)}}} \tag{5}$$

în care $l_{c_{(ad)}}$ este lucrul mecanic consumat în procesul teoretic, considerîndu-se comprimarea după o izentropă.

Observăm că acest factor de putere reprezintă un randament adiabat în cazul proceselor de comprimare în compresoare volumice, insuficient răcite, procesul avînd loc după politrope echivalente, cu exponent politrop mai mare decît exponentul adiabat respectiv.

Întrucît comprimarea are loc în domeniul vaporilor supraîncălziți, expresiile lucrului mecanic adiabat și politrop în relația 5, se pot scrie sub forma :

$$\left.\begin{aligned} l_{c_{(ad)}} &= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R T_0 \left[\left(\frac{p_c}{p_0} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right] \\ l_{c_{(i)}} &= \frac{m}{m-1} R T_0 \left[\left(\frac{p_c}{p_0} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

presiunile p_0 și p_c, determinate de procesul frigorific, fiind presiunile nominale medii în coloana de aspirație, respectiv în coloana de refulare. Factorul de putere definit prin relația (5) este considerat teoretic întrucît nu ține seama de unele condiții gazodinamice ale procesului real.

Procesul real de comprimare are loc, în compresorul cu piston cu mișcare lineară, în interiorul cilindrului de comprimare, între presiu-

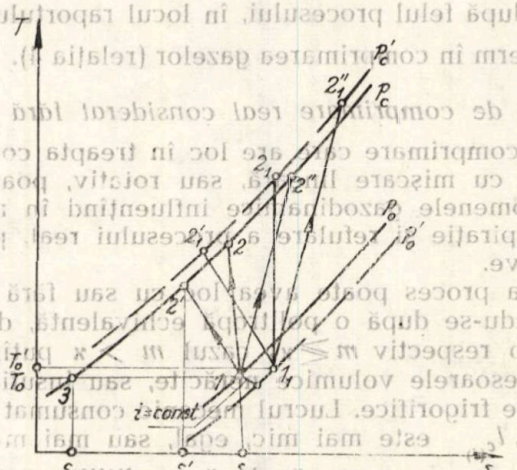


Fig. 3.

nile medii $p'_0 < p_0$ și $p'_c > p_c$ (fig. 3) datorită în special rezistențelor locale în supapele de aspirație și refulare [3].

În cazul compresorului volumic fără supape, construcție ce caracterizează compresoarele volumice rotative, condițiile $p_0 > p'_0$ și $p_c < p'_c$ se păstrează (din cauza unor fenomene diferite [3]), însă la diferențe $\Delta p_0 = (p_0 - p'_0)$ și $\Delta p_c = (p'_c - p_c)$, mai reduse în raport cu condițiile procesului din compresorul cu piston cu mișcare lineară.

În plus, în procesul real temperatura fluidului la începutul fazei de comprimare este $T'_0 \neq T_0$ (fig. 3 în cazul procesului în compresorul volumic, fig. 4 în cazul compresorului cu curgere continuă).

Ca urmare expresia lucrului mecanic indicat, corespunzător (politrop), se poate scrie sub forma:

$$l'_{c(i)} = \frac{m}{m-1} R T'_0 \left[\left(\frac{p'_c}{p'_0} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] \qquad (7)$$

Cu ajutorul relațiilor 5, 6 și 7, și utilizînd notațiile $H = \frac{p_c}{p_0}$ și $H' = \frac{p'_c}{p'_0}$, $\varepsilon = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$ și $\varepsilon' = \frac{m-1}{m}$ se poate scrie relația de calcul a

factorului de putere al procesului real, $\pi_{ad(r)}$ sub forma :

$$\pi_{ad(r)} = \frac{c_{(ad)}}{l'_{c(i)}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{H^{\varepsilon} - 1}{H'^{\varepsilon'} - 1} \cdot \frac{T_0}{T'_0} = \pi_{ad} \tag{8}$$

Observăm că diferența între temperaturile notate T_0 și T'_0 se datorează :

— În cazul comprimării în compresorul volumic, schimbului de căldură între pereți și gaz și unui efect de răcire prin laminare (efect integral Joule-Thomson), aceste fenomene aplicîndu-se simultan ace-

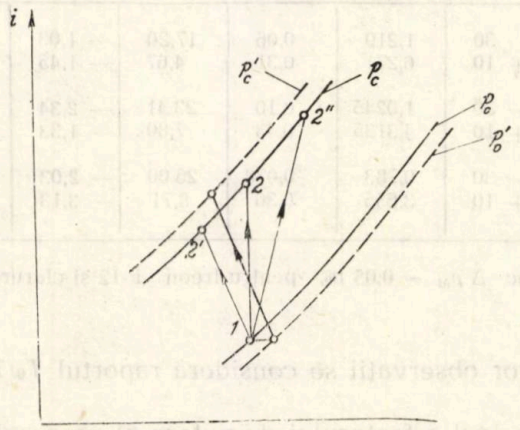


Fig. 4.

leiași mase de agent la starea în imediată apropiere de curba limită a vaporilor uscați, cu consecințe contrarii privind temperatura agentului.

— În cazul comprimării în compresorul cu curgere continuă se datorează unui efect de răcire prin laminare, foarte redus însă, căderea de presiune fiind, în acest caz neînsemnată, chiar neglijabilă.

Pentru a aprecia importanța efectului de răcire prin laminare, s-a calculat valoarea acestui efect termic, la nivelul T_0 uzual pentru procesele frigorifice prin comprimare de vapori pentru agenții uzuali amoniac, freon F-12 și clorură de metil. Considerînd valorile Δp_0 uzuale (fig. 4) se obțin valorile notate în tabela nr. 1, pentru rapoartele $\frac{T_0}{T'_0}$ Calculul efectului integral Joule-Thomson în tabela de mai jos, $|\Delta T|_{p_0}^{p'_0}$ s-a făcut în condițiile uzuale, adică considerîndu-se efectul elementar Joule-Thomson ca variație a temperaturii pe unitatea de scădere a presiunii, la entalpie constantă, adică :

$$\left|\Delta T\right|_{p_0}^{p'_0} = \int_{p_0}^{p'_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i dp \cong \left|\frac{\delta T}{1}\right|_{p_0}^{p'_0}$$

Tabela 1

Calculul valorilor limită uzuale ale raportului $\frac{T_0}{T_0'}$ pentru θ_0 uzual între —30°C şi +10°C

Agentul	θ_0 °C	p_0 Kg/cm²	$\Delta p = p_0 - p_0'$ *	$\frac{\delta T}{1}$ ~	$\lvert\Delta T\rvert \frac{p_0'}{p_0}$ grd	T_0' °K	$\frac{T_0}{T_0'}$ ~
Amoniac	— 30	1,219	0,06	17,20	— 1,03	241,97	1,0042
	+ 10	6,271	0,31	4,67	— 1,45	281,83	1,0048
Freon F-12	— 30	1,0245	0,10	23,41	— 2,34	240,66	1,0097
	+ 10	4,3135	0,43	7,80	— 1,33	281,67	1,0047
Clorură metil	— 30	0,783	0,078	26,00	— 2,03	240,97	1,0084
	+ 10	3,655	0,36	8,71	— 3,13	279,87	1,0111

* Pentru amoniac $\Delta p_M = 0{,}05\ p_0$, pentru freon F-12 şi clorura de metil $\Delta p_M = -0{,}10\ p_0$ [3].

În baza acestor observaţii se consideră raportul T_0/T'_0 egal cu unitatea.

Expresia de calcul a factorului de putere al procesului real devine:

$$\pi_{ad_{(r)}} \cong \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{H^{\varepsilon} - 1}{H'^{\varepsilon'} - 1} = \pi_{ad} \tag{9}$$

Introducînd coeficienţii de pierderi de presiune, notaţi δp_a (la aspiraţie) şi δp_r (la refulare) şi coeficienţii notaţi σ_a, σ_r şi σ, definiţi prin relaţiile :

$$\delta p_a = \frac{p_0 - p_0'}{p_0};\ \delta p_r = \frac{p_c' - p_c}{p_c}$$

$$p_0' = (1 - \delta p_a)\, p_0 = \sigma_a p_0;\ p_c' = (1 + \delta p_r)\, p_c = \sigma_r p_c;\ \sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_a}$$

expresia factorului de putere devine :

$$\pi_{ad} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{H^{\varepsilon} - 1}{(\sigma H)^{\varepsilon'} - 1} \tag{10}$$

în care exponentul ε caracterizează agentul, exponentul ε' caracterizează calitatea procesului termodinamic, iar σ caracterizează perfecţiunea maşinii compresoare din punct de vedere gazodinamic.

S-au stabilit, cu ajutorul relaţiei (10), curbele de variaţie a factorului de putere al procesului real de comprimare a vaporilor, pentru agenţi frigorifici caracterizaţi prin exponentul adiabat al vaporilor su-

praîncălziți respectiv, $\varkappa = 1{,}1$; 1,2 ; 1,3 și 1,4. În aceste categorii intră totalitatea agenților frigorifici uzuali. Calculele s-au făcut considerînd, pentru fiecare agent caracterizat prin valorile $\varkappa$ de mai sus, procese reale cu exponent politrop m variind de la o valoare mai mică decît exponentul adiabat respectiv, la o valoare mai mare decît acesta, în limitele uzuale.

Apoi pentru fiecare proces real, caracterizat prin exponenții $\varkappa$ și m, s-au considerat diferite valori uzuale ale coeficientului de pierdere de presiune σ, acesta fiind un parametru variind între 1,02 și 1,20 în procesele de comprimare uzuale. Limitele acestea sînt deduse cu ajutorul valorilor medii ale datelor experimentale publicate, privind măsurile notate δ_{p_a} și δ_{p_r}, acestea fiind,

δ_{p_a} ; pentru gaze 0,04 ; pentru vapori amoniac 0,04 ; pentru vapori de freon 0,075 ;

δ_{pr} : pentru gaze 0,04 ; pentru vapori amoniac 0,06 ; pentru vapori de freon 0,125.

Din aceste date experimentale de care dispunem în prezent, ar rezulta valorile extreme ale coeficientului σ între 1,08 și 1,2. În lucrare s-a extins limita inferioară pînă la 1,02 pentru a se cuprinde și cazul compresoarelor funcționînd fără supape.

În aceste condiții s-a putut face studiul grafic al funcției exponențiale $\pi_{ad} = \varphi(H)$. Studiul este generalizat și deci rezultatele aplicabile la oricare caz real de proces de comprimare considerat fără frecări.

Calculele efectuate sînt sintetizate prin curbele din figurile 5...8 și nomograma din fig. 9.

Rezultă din examinarea acestor curbe și a valorilor deduse din nomogramă următoarele observații mai importante :

— Comprimarea vaporilor în procesele cu răcire prezintă condiții de variație a valorilor factorului de putere specifice fiecărui agent și proces real, în funcție de raportul de comprimare H.

— Pentru procese care se desfășoară după politrope echivalente caracterizate prin $m > \varkappa$, funcțiunile acestea prezintă maxime.

— Comprimarea vaporilor în compresoare cu piston fără răcire, în care valorile Δ_{p_a} și Δ_{p_c} și deci valorile coeficienților de pierdere de presiune σ sînt mai importante, are loc în condiții de valori mari ale factorului de putere pentru rapoarte de comprimare care diferă de la un agent la altul, după cum s-a sintetizat prin cifrele notate în tabela nr. 2.

Limitele superioare ale lui H corespunzătoare condițiilor maxime π_{ad} sînt pentru valori $\sigma = 1{,}2$ și valori m apropiate de valorile $\varkappa$ ($m > \varkappa$).

Exemplul trasat pe nomogramă corespunde la : $H = 5$, $\sigma = 1{,}2$, $\varkappa = 1{,}4$, $m = 1{,}3$; a rezultat $\pi_{ad} = 0{,}92$.

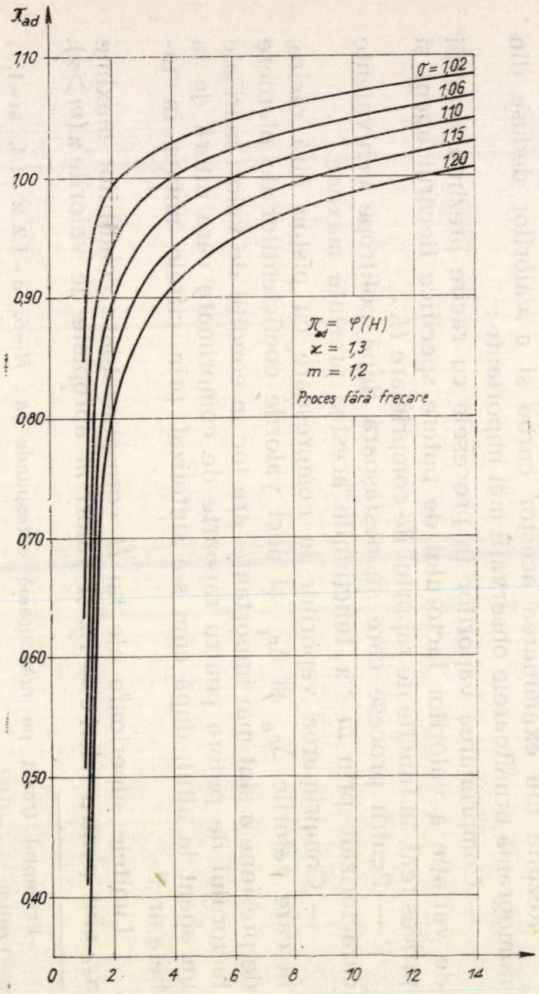

π_{ad}
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0
2
4
6
8
10
12
14
σ = 1,02
1,06
1,10
1,15
1,20
$\pi_{ad} = \varphi(H)$
$\varkappa = 1,3$
$m = 1,2$
Proces fără frecare

Fig. 5.

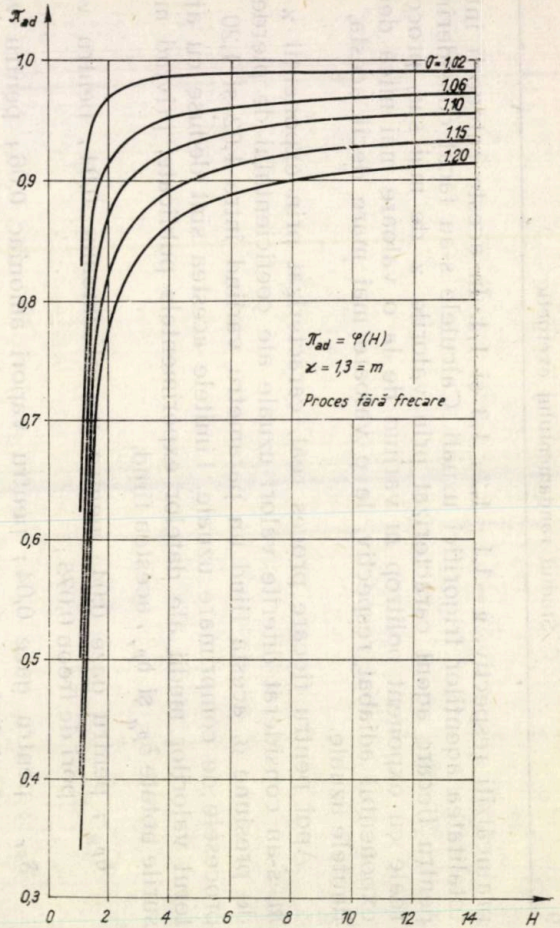

π_{ad}
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0
2
4
6
8
10
12
14
H
σ = 1,02
1,06
1,10
1,15
1,20
$\pi_{ad} = \varphi(H)$
$\varkappa = 1,3 = m$
Proces fără frecare

Fig. 6.

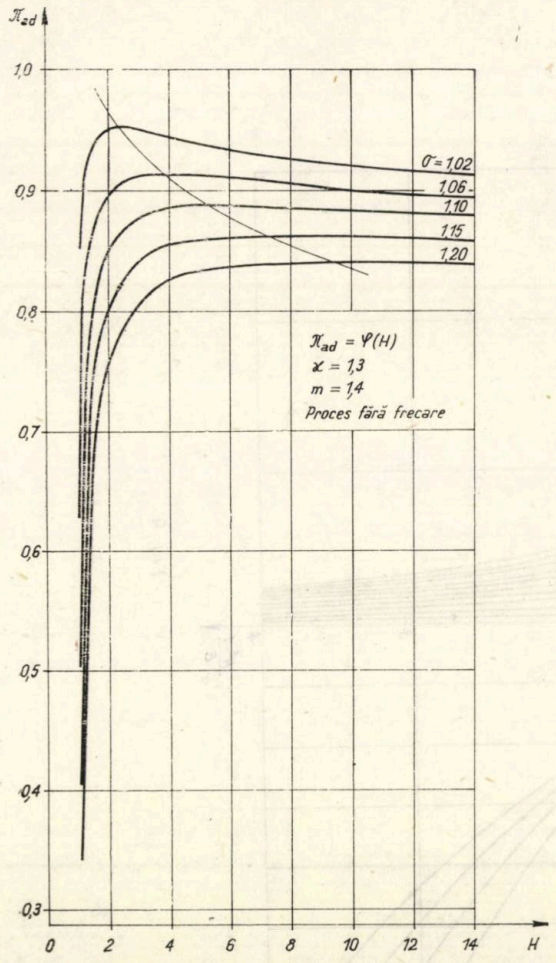

π_{ad}
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0
2
4
6
8
10
12
14
H
σ = 1,02
1,06
1,10
1,15
1,20
$\pi_{ad} = \varphi(H)$
$\varkappa = 1,3$
$m = 1,4$
Proces fără frecare

Fig. 7.

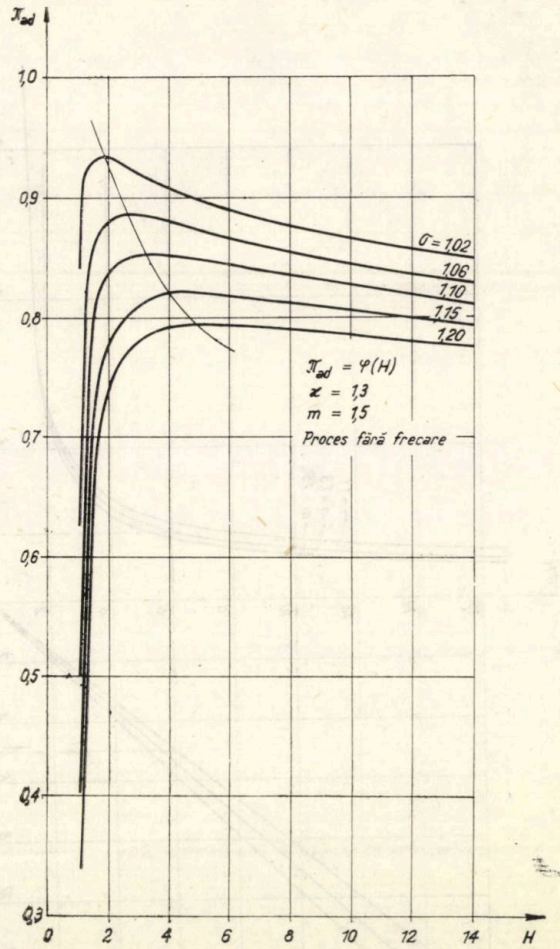
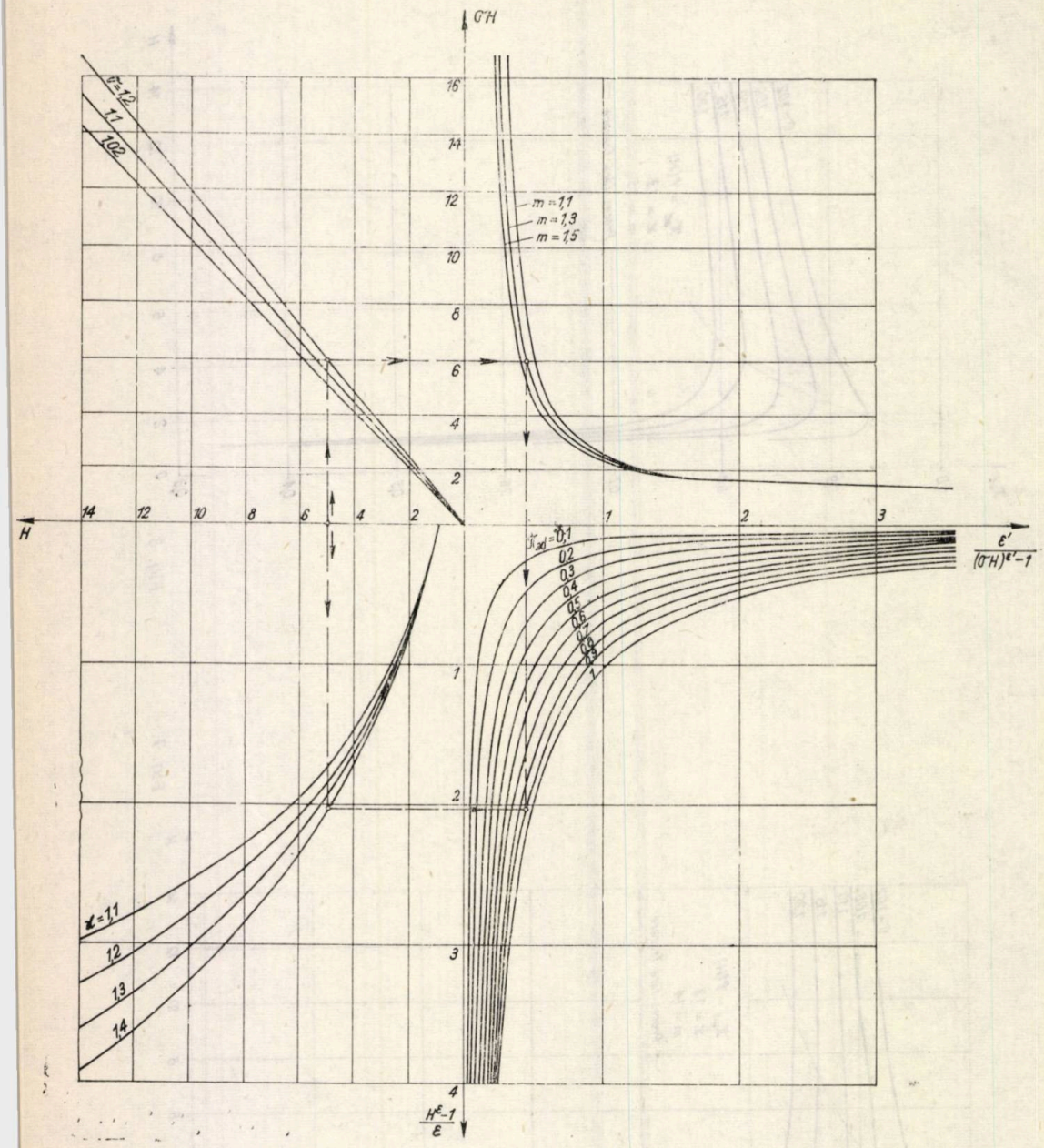

π_{ad}
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0
2
4
6
8
10
12
14
H
σ = 1,02
1,06
1,10
1,15
1,20
$\pi_{ad} = \varphi(H)$
$\varkappa = 1,3$
$m = 1,5$
Proces fără frecare

Fig. 8.



σH
16
14
12
10
8
6
4
2
1
2
3
4
H
14
12
10
8
6
4
2
1
2
3
σ=1,2
1,1
1,02
m=1,1
m=1,3
m=1,5
π_ad=0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ε'/(σH)^{ε'}-1
ϰ=1,1
1,2
1,3
1,4
(H^ε-1)/ε

Fig. 9.

— Comprimarea vaporilor în compresoare volumice fără supape (rotative), în care valorile Δp_o și Δp_c sînt scăzute, are loc în condiții de valori ridicate ale factorului de putere pentru rapoarte de comprimare scăzute, conform cifrelor notate în tabela nr. 2.

Tabela 2

Rapoartele de comprimare H, pentru factorul de putere maxim π_{ad_M} în procesele reale de comprimare a vaporilor, fără răcire, prin politrope echivalente caracterizate prin $m > \varkappa$

Pentru agenții caracterizați prin valorile $\varkappa =$	Intervalele valorilor H în procesele din :	
	Compresoarele cu piston	Compresoarele rotative
1,1	3,5 . . . 7,0	1,8 . . . 3,2
1,2	4,0 . . . 8,0	1,8 . . . 4,0
1,3	4,5 . . . 9,0	1,9 . . . 4,5
1,4	5,0 . . . 10,0	2,0 . . . 5,0

Limitele inferioare ale lui H corespunzătoare condițiilor maxime π_{ad} sînt pentru valori $\sigma = 1{,}02$ și valori m depărtate de valorile $\varkappa$ ($m > \varkappa$).

3.2. *Procesul de comprimare real, cu frecări.*

Acesta este cazul procesului de comprimare real din treapta compresorului centrifugal și axial, în care fenomenele gazo-dinamice determină schimbarea stării gazului sau vaporilor supuși procesului. Comprimarea are loc după politrope echivalente caracterizate prin exponentul politrop $m > \varkappa$ (fig. 10). Calitatea procesului din punct de vedere termo-gazodinamic se poate caracteriza prin raportul $l_{c(ad)}/\Delta i$ Căderea de entalpie $\Delta i = i_{2_1}'' - i_{1_1}$ reprezintă, cu aproximația explicată mai jos, lucrul mecanic consumat în procesul real considerat după politropa echivalentă $1_1\, 2''_1$, deci o variație de exergie, plus pierderea de exergie datorită frecărilor procesului real, exprimînd anergie. Acest raport definește un factor de putere, pe care, pentru aceleași motive ca la punctul 2.1, îl numim teoretic, expresia lui fiind deci,

$$\pi_{ad(t)} = \frac{l_{c(ad)}}{\Delta i} \tag{11}$$

În această relație $l_{c(ad)}$ este lucrul mecanic consumat în procesul teoretic considerîndu-se comprimarea după o izentropă, iar Δi este căderea de entalpie în procesul de comprimare politropă cu exponentul politrop $m > \varkappa$, aceasta fiind condiția reală considerată.

Relația (11) conține o aproximare privind lucrul mecanic consumat în procesul din compresul centrifugal și anume, în expresia acelui lucru mecanic, s-a neglijat variația energiei cinetice a fluidului în mișcare în secțiunea de ieșire din mașină (baza coloanei de refulare) față de secțiunea de intrare în mașină (secțiunea de aspirație la prima treaptă). În procesul teoretic din treapta compresorului centrifugal nerăcit și deci din ansamblul formînd compresorul, această variație a energiei

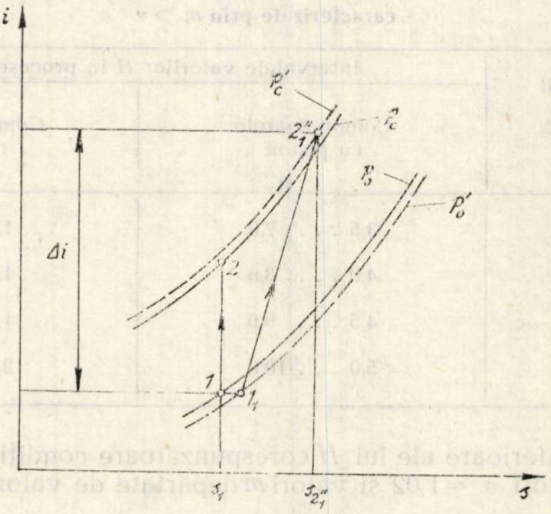


Fig. 10.

cinetice a fluidului în mișcare este zero, iar în procesul real se consideră printr-un randament interior, determinat în principal de celelalte pierderi din mașina reală, mult mai importante ; acel randament este definit prin raportul $l_{c_i}/\Delta i$.

Observăm că prin introducerea factorului de putere, definit pe aceleași baze ca și randamentul interior, însă cu posibilități de a se studia variația lui cu parametrii determinanți ai procesului, se introduc condiții superioare atît pentru examinarea proceselor din compresorul real cît și pentru lucrările de proiectare. Acest factor de putere reprezintă și în cazul compresorului centrifugal nerăcit, un randament adiabat.

Folosind notațiile de la punctul 2.1, și temperaturile de saturație T_c, T_0 și T'_c, T'_0 corespunzătoare presiunilor considerate la acel punct cum și condiția justificată $T'_0 \cong T_0$ expresia factorului de putere al procesului real în acest caz se obține la forma :

$$\pi_{ad(r)} = \pi_{ad} = \frac{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R [T_c - T_0]}{c_{p_m} [T'_c - T'_0]} \cong \frac{H^c - 1}{H'^{c'} - 1} \tag{12}$$

Introducînd coeficienții de pierderi de presiune definiți în cazul precedent, relația de calcul a factorului de putere devine

$$\pi_{ad} = \frac{H^{\varepsilon} - 1}{(\sigma H)^{\varepsilon'} - 1} \qquad (13)$$

Considerăm însă pentru acest caz (compresoare centrifuge sau axiale), în lipsa datelor experimentale, valori σ mai mici decît 1,1, aceste

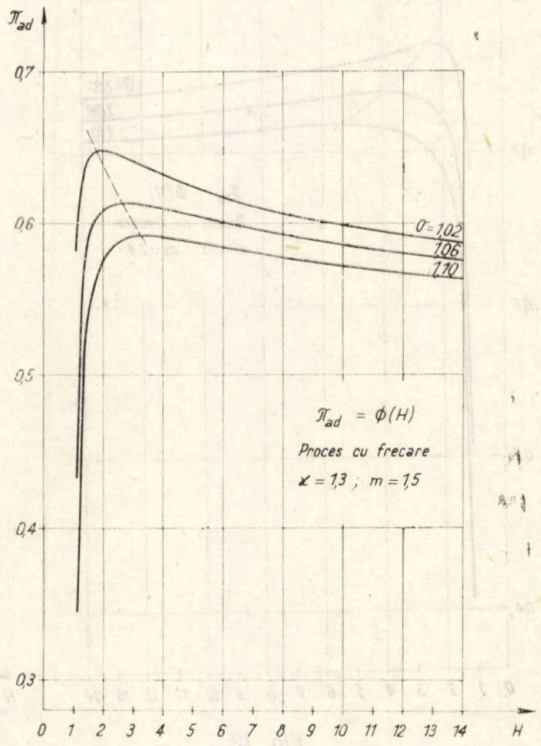


Fig. 11.

valori putînd atinge cifra de 1,02. Pe baza acestei aprecieri s-a studiat în lucrarea de față factorul de putere $\pi_{ad} = \Phi(H)$. Studiul acesta s-a condus în mod analog cu cazul examinat la punctul 2.1, cu ajutorul relației (13), în condițiile $m > \varkappa$.

Calculele efectuate sînt sintetizate prin curbele din figurile 11...12 și nomograma din fig. 13.

Rezultă din examinarea acestor curbe și a valorilor deduse din nomogramă, următoarele concluzii importante :

— Comprimarea vaporilor în procesele reale cu frecare prezintă condiții de factor de putere maxim, specific fiecărui agent și proces real, în funcție de raportul de comprimare H.

— Considerînd valoarea favorabilă a coeficientului de cădere de presiune $\sigma = 1{,}02$, se observă că valorile maxime ale factorului de putere, π_{ad_M}, au loc pentru rapoarte de comprimare scăzute, și anume între 1,7 și 2,3 pentru agenți caracterizați prin valorile $\varkappa$ între 1,1 și 1,4.

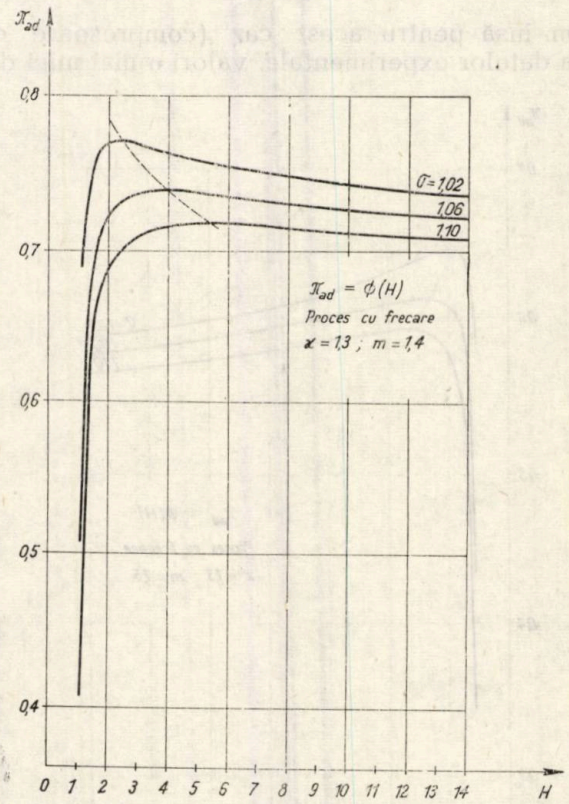


Fig. 12.

4. **Randamentul exergetic al procesului real**

Materialul studiat și prezentat sub punctele precedente din această lucrare, permite studiul condițiilor de variație a randamentului exergetic al procesului real de producere a frigului prin comprimare de vapori, utilizîndu-se relația (1).

S-a executat această lucrare pentru procesul real fără subrăcire, cu agentul amoniac, în condițiile uzuale privind valorile parametrilor exteriori care determină desfășurarea procesului real, privind calitatea

Exemplul trasat pe nomogramă corespunde la : $H = 1{,}5$; $\sigma = 1{,}02$; $\varkappa = 1{,}4$; $m = 1{,}6$. A rezultat $\pi_{ad} = 0{,}93$.

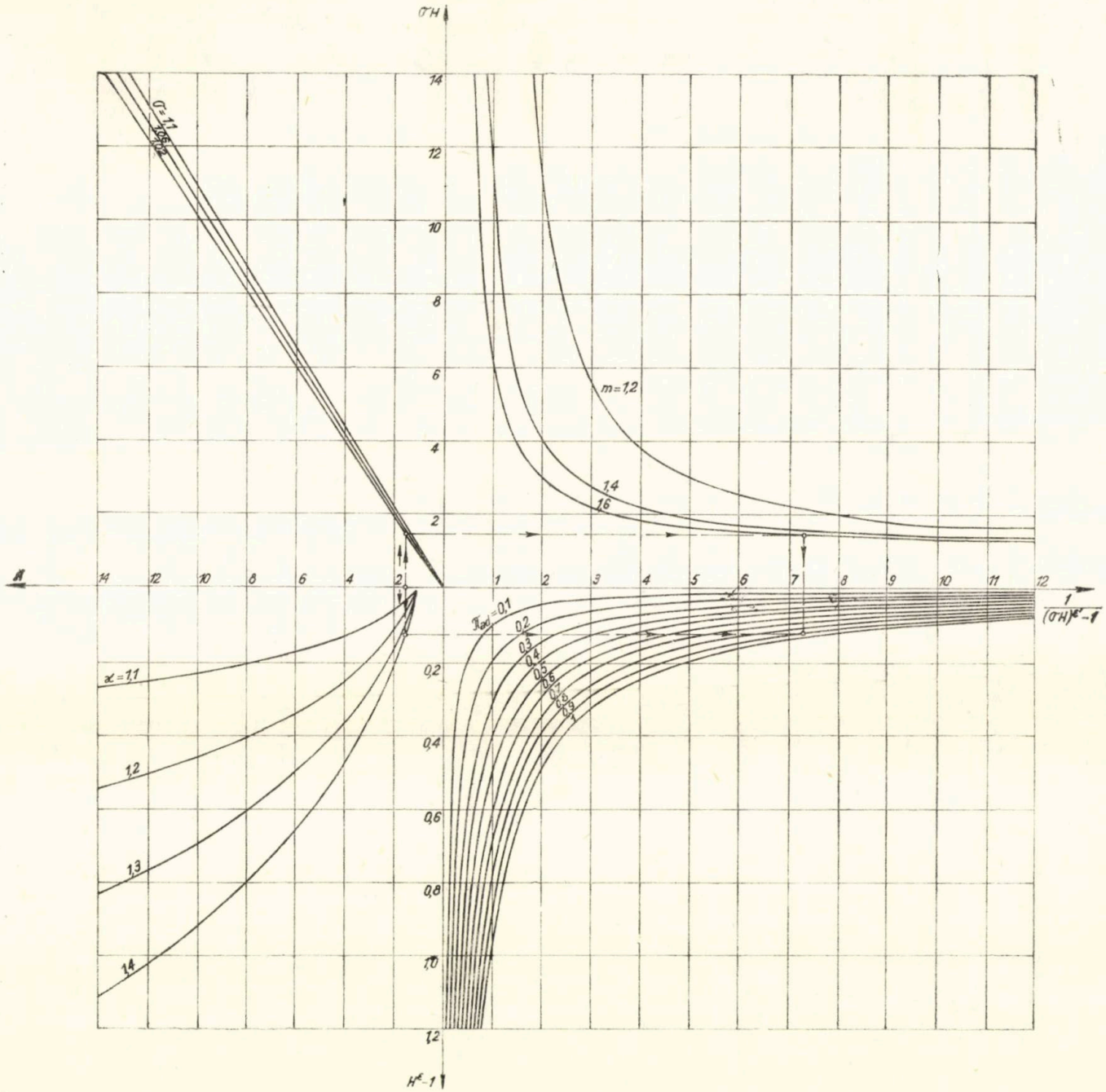

σH
14
12
10
8
6
4
2
σ=1,1
1,2
1,3
m=1,2
1,4
1,6
N
14 12 10 8 6 4 2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
1/(σH)^ε-1
Rad=0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α=1,1
1,2
1,3
1,4
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
H^ε-1

Fig. 13.

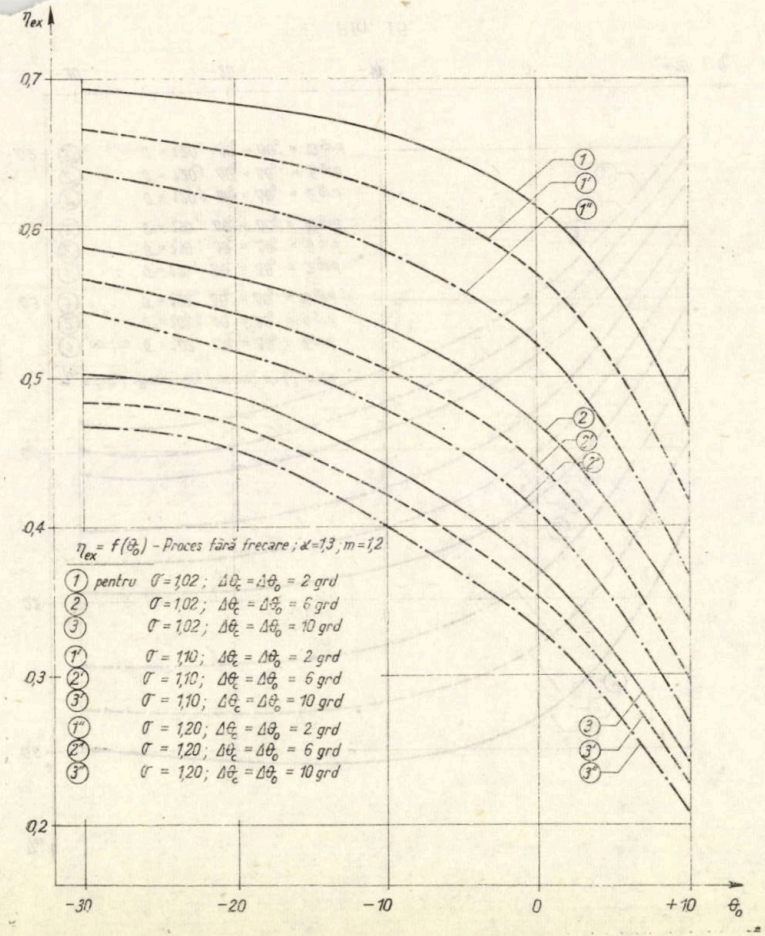

η_{ex}
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
$\eta_{ex} = f(\theta_0)$ - Proces fără frecare ; α=1,3 ; m=1,2
1 pentru σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
-30
-20
-10
0
+10
θ_0

Fig. 14.

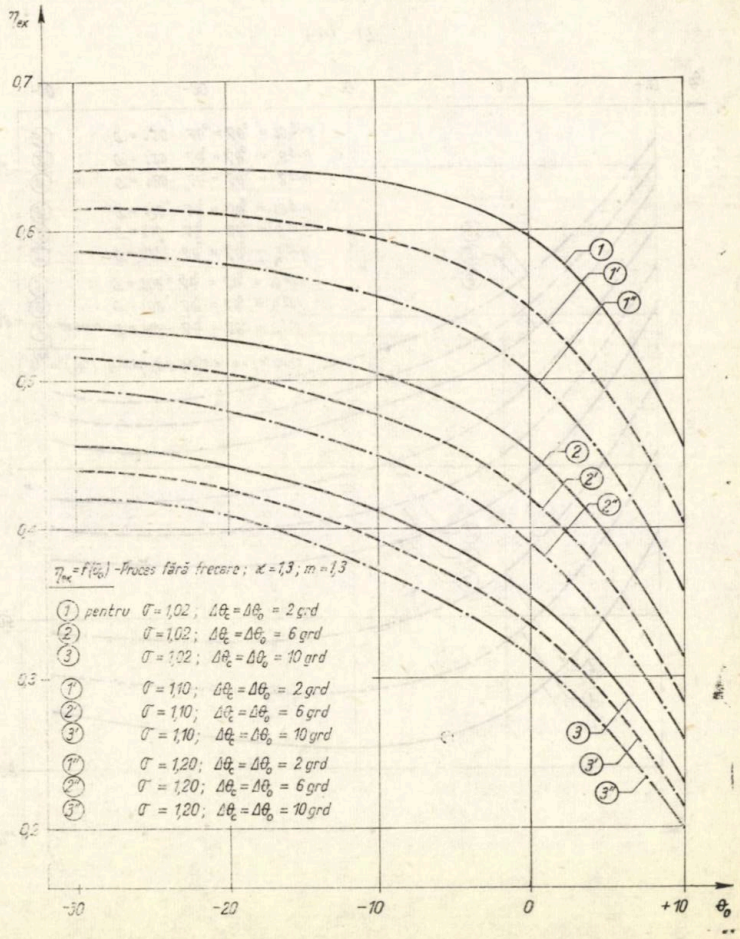

η_{ex}
0,7
0,6
0,5
0,3
$\eta_{ex} = f(\theta_0)$ - Proces fără frecare ; α = 1,3 ; m = 1,3
1 pentru σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,10 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,20 ; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
-30
-20
-10
0
+10
θ_0

Fig. 15.

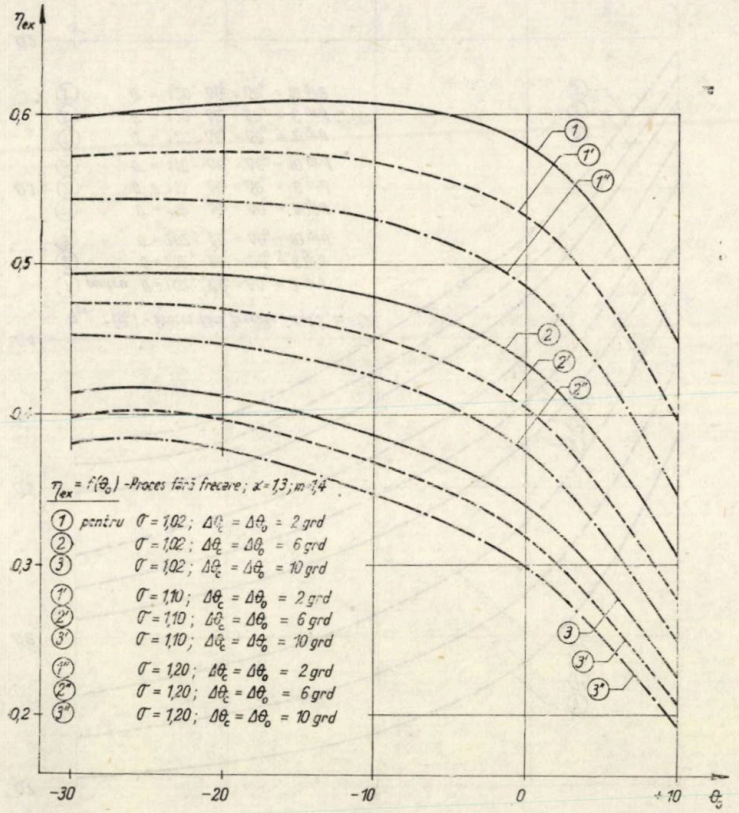

η_{ex}
0,6
0,5
0,3
0,2
-30
-20
-10
0
+10
θ_0
$\eta_{ex} = f(\theta_0)$ -Proces fără frecare; $\varkappa$=1,3; m=1,4
1 pentru σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd

Fig. 16.

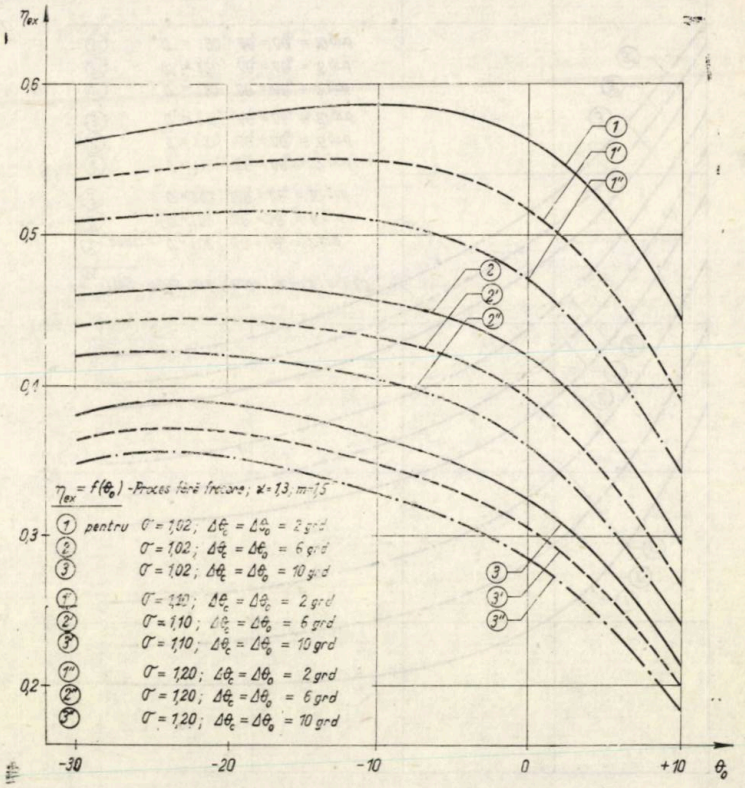

η_{ex}
0,6
0,5
0,3
0,2
-30
-20
-10
0
+10
θ_0
$\eta_{ex} = f(\theta_0)$ -Proces fără frecare; $\varkappa$=1,3; m=1,5
1 pentru σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,20; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd

Fig. 17.

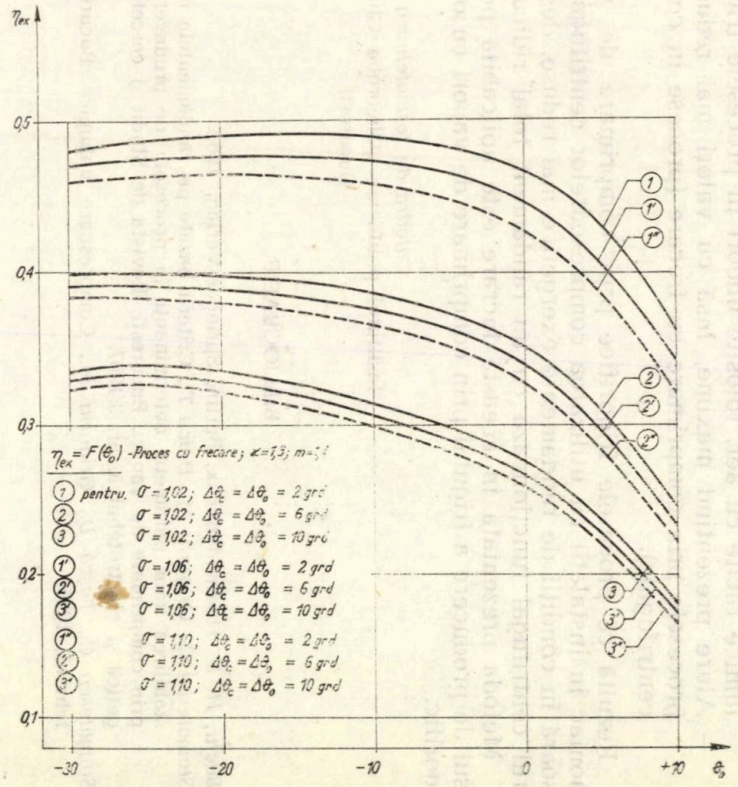

η_{ex}
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-30
-20
-10
0
+10
θ_0
$\eta_{ex} = F(\theta_0)$ -Proces cu frecare; α=1,3; m=1,5
1 pentru σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd

Fig. 18.

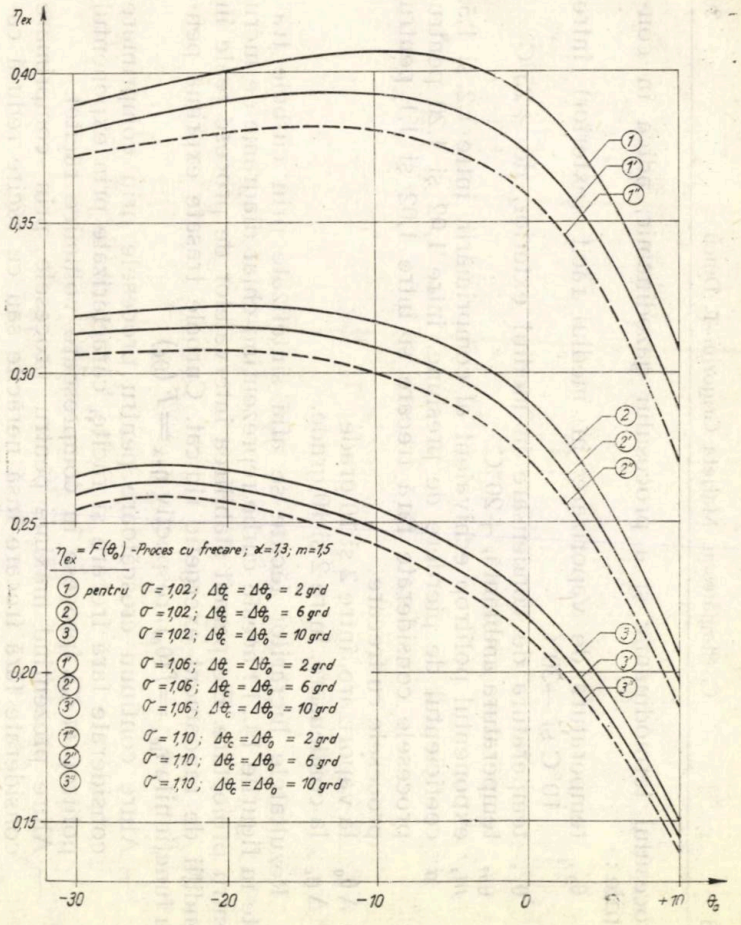

η_{ex}
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
-30
-20
-10
0
+10
θ_0
$\eta_{ex} = F(\theta_0)$ -Proces cu frecare; α=1,3; m=1,5
1 pentru σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3 σ = 1,02; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3' σ = 1,06; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd
1'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 2 grd
2'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 6 grd
3'' σ = 1,10; $\Delta\theta_c = \Delta\theta_0$ = 10 grd

Fig. 19.

procesului termodinamic şi a procesului gazodinamic, adică în condiţiile :

θ_0, temperatura de vaporizare în mediul răcit (exterior) între $+10°C$ şi $-30°C$

θ_c, temperatura de condensare în mediul exterior, de $+25°C$

θ_a, temperatura ambiantă, $+20°C$

m, exponentul politrop echivalent al comprimării, între 1,2 şi 1,5.

σ coeficientul de pierdere de presiune, între 1,02 şi 1,20 pentru procesele considerate fără frecare şi între 1,02 şi 1,1 pentru procesele cu frecare

$\Delta\theta_0$ la vaporizare, între 2 şi 10 grade

$\Delta\theta_c$ la condensare, între 2 şi 10 grade.

Rezultatele lucrărilor făcute se află sintetizate prin curbele trasate în figurile 14...19 aceste curbe reprezentînd chiar diagrame de lucru pentru proiectare. Ele permit stabilirea intervalelor de procese reale în condiţii de randament exergetic ridicat. Curbele trasate exprimă pentru funcţiunile $\eta_{ex} = f(\theta_0)$, respectiv $\eta_{ex} = F(\theta_0)$:

— Alure continuu crescătoare pentru procesele prin comprimare considerate fără frecare şi răcite, caracterizate prin exponentul politrop $m \leqslant \varkappa$ (procese în compresoare volumice răcite).

— Alure prezentînd maxime pentru procesele prin comprimare considerate fără frecare însă nerăcite sau cu răcire redusă caracterizate prin exponentul $m > \varkappa$ (procesele în compresoare volumice răcite cu aer, folosite uneori în procesele frigorifice).

— Alure prezentînd maxime, însă cu valori mai reduse, pentru procesele prin comprimare cu frecare (procese în compresoare centrifugale).

Rezultă că procesele frigorifice prin comprimare de vapori de amoniac în instalaţii cu utilizarea compresoarelor centrifugale se desfăşoară în condiţii de randamente exergetice mai reduse, deşi compresorul centrifugal funcţionează cu un randament total ridicat.

Metoda prezentată în această lucrare este aplicabilă pentru procesul de producere a frigului prin comprimare de vapori cu orice agent frigorific.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Baehr, H. D.* Thermodynamik, Berlin, Springer-Verlag, 1962.

2. *Stamatescu C., Grigoriu M., Duicu T.*, Criterii bazate pe randamentele exergetice la stabilirea unor parametri determinanţi în procesele de producere a frigului prin comprimare de vapori. Bucureşti, Revista de Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică, nr. 3/1967.

3. *Stamatescu C., Taşcă D., Grigoriu M.*, Compresoare volumice. Bucureşti, Editura tehnică, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 1

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C.Z.: 621.43.05:662.61:541.22

COMBUSTION OF FUEL DROP AT HIGH PRESSURE *

NICOLAE APOSTOLESCU

The combustion of sprayed liquid fuel is present in a wide realm of modern technique.

As is known, the liquid fuel jet consists of a considerable number of drops of variable diameter, which require a statistical treatment. The knowledge of the mechanism of the combustion of the single drop constitutes the first stage, obviously essential, to the knowledge of the jet combustion mechanism.

The combustion of the single fuel drop has been theoretically and experimentally examined in a great number of works.

During the combustion of the fuel drop, there appear processes of physical nature (heat transfer by conductivity, convection and radiation, evaporation and mixing) and of chemical nature (ignition and combustion, as well as polymerization and cracking processes, which drives to the formation of soot). In combustion chambers, such processes are generally accompanied by intense turbulent motions and organized currents which take place under conditions of thermic non-homogeneity of the medium and eventually in unsteady thermodynamic regime.

The theoretically studies generally adopt the assumption of spherical symmetry, which implies that the combustion takes place in a still atmosphere, in the absence of the relative motion between the drop and air, and without gravitational currents. The influence of the neighbouring drops is also neglected [1], [2], [3], [4], [5].

The physical model generally accepted presents the fuel drop which evaporates, as surrounded by a flame spherical outer cover (fig. 1). The combustion is conditioned by the diffusion in opposite sense of the fuel vapours and oxidizer in the reaction zone, where, a simple chemical reaction of bimolecular type takes place. The burning rate, considered as the rate of disappearance of the liquid phase, is thus determined by the rate of substance transfer. The rate of chemical reactions is much greater to the evaporation rate and do not influence the burning rate.

* Manuscript received 7 September 1968.

Burke and Schumann and subsequently other authors have assumed that the rate of chemical reactions is even infinite, such that the reaction zone reduces to the flame spherical surface. Under such conditions, the flame surface defines two regions. In the upper region between the drop and flame there is no oxygen and in the region outside the flame unburnt fuel does not exist. The concentrations of unburnt

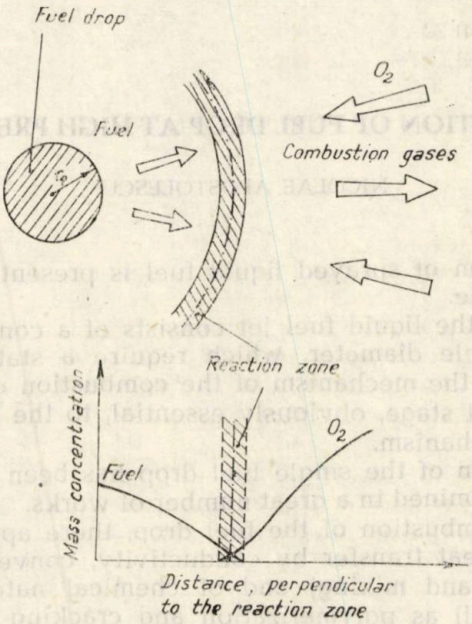


Fig. 1.

fuel and of oxygen in the two regions decrease near the flame surface and cancel on this surface. In order that the chemical reaction be possible, the fuel and oxygen fluxes interpenetrate on the flame surface; the fuel and oxygen mass flow rate should be in stoichiometric ratio.

Spalding [6] and Williams [7] have calculated the burning rate under the assumption of a finite thickness of the reaction rate. For a complete examination of the characteristics of the drop combustion (flame position, profile of the concentrations and temperature field) it is necessary, however, to return to the infinitely thin flame assumption.

Finally, an important hypothesis, accepted by all authors, is that the rate of change of the drop radius is sufficiently reduced, such that the processes be treated as quasi-stationary.

Within the limits of these general assumptions, several relations for calculating the drop burning rate $\dot{m}$ and the burning time t_a have been established. Thus, Spalding has suggested the relations [6]

$$\dot{m} = 4\pi r_p \frac{\lambda}{c_p} ln(1+B), \text{ kg/s} \qquad (1)$$

and

$$t_a = \frac{r_{p_0}^2 \cdot \varrho_l}{2\lambda/c_p \cdot ln\,(1+B)}, \text{ s} \tag{2}$$

where r_{p_0}, r_p are the drop initial and instantaneous radii, cm, respectively; λ — the conductivity coefficient of gases in the vessel, kcal/cm.grd.s; c_p — the mean specific heat of gases in the vessel, kcal/kg.grd; ϱ_l — the liquid fuel density; B — the transfer parameter defined by Spalding

$$B = \frac{\frac{W_{ox}\,Q}{\sigma} + c_p\,(T_g - T_s)}{h},$$

W_{ox} being the instantaneous mass concentration of oxygen at sufficiently great distance from the flame, kg/kg; Q — the fuel reaction heat, kcal/kg; σ — the stoichiometric coefficient; T_g, T_p — the gas temperature at a sufficiently great distance from the flame and at the drop surface, respectively, approximated with the fuel boiling temperature, °K; h — the vaporization latent heat of the fuel, kcal/kg.

Relation (1) emphasizes the influence of the nature of the gas (λ, c_p), fuel (Q, h), general conditions in which the process takes place (W_{ox}, T_g) and drop dimension. On the other hand, it may be observed that in relation (1) the burning rate does not depend on pressure.

The calculation relations obtained under the assumptions mentioned above are in satisfactory agreement with the results of the experimental studies carried out with suspended or falling drops, burning generally in still air, low temperatures and particularly low pressures (at atmospheric pressure). In these experiments, after the ignition of the drop (which generally takes place after about 30% of the burning time) a regime close to the quasi-stationary regime is established. Some authors have tried to correct the calculation relations obtained under the assumptions mentioned above, in view of a closer approach to actuality. They have obtained correction factors which take account of the free and forced convection, heat transfer by radiation etc. The use of such factors is however doubtful since they depend on a series of parameters which can hardly be estimated.

A less examined aspect is that of the possibility of applying the mentioned calculation relations to the domain of high pressures, close to the critical point of fuels. For kerosene, the critical point is reached at about 24 kgf/cm² and 680 °K and for Diesel oil at about 20 kgf/cm² and 730°K [8]. This level of the state parameters is greatly exceeded during the combustion in all Diesel engines and is achieved in some gas turbine installations. The approaching to the critical point is indicated by the decreasing of the vaporization latent heat h. At the critical point where h vanishes, the transfer parameter B tends to become infinite, such that in relations (1) and (2) the burning rate tends to infinity and the burning time vanishes.

On analysing this aspect, Spalding has shown [9] the assumption of quasi-stationary processes which substantiates the calculation relations reminded above introduces errors which are the more significant the higher are the pressures ; in any case, the quasi-stationary process assumption cannot be considered in domains of pressure close to the fuel critical point. In the super-critical domain the very equality between the vaporization rate and the burning rate becomes senseless.

On this basis the present paper examines the combustion of the fuel drop under non-stationary conditions, adequate to high pressures. The simpler case of the combustion of fuel drop in an unlimited air volume, which has been also treated by Spalding, is firstly treated and then the more general case of the combustion in a limited air volume is discussed. Finally, the case is examined in which the combustion does not come from the drop introduced in the combustion chamber but from a source which supplies continuously the fuel.

1. Combustion of the fuel drop in non-stationary regime, in an unlimited air volume

For examining the combustion of the fuel drop in non-stationary regime, the physical model presented above is generally retained ; it is assumed however that the transfer through molecular diffusion of the fuel vapours towards the reaction zone is a non-stationary process.

The fuel source generates thus a non-stationary field of concentrations. The flame separates this field into two zones, i.e , an inner zone which contains the fresh fuel which did not react chemically, and the external zone which contains the fuel constituent elements, which however established other chemical bonds. The external zone also includes oxygen, correspondingly associated with nitrogen ; the inner zone also includes combustion gases (containing fuel which has reacted chemically, chemically bond oxygen and the corresponding nitrogen). If we retain the assumption that the chemical reactions take place at high rates, the flame can be imagined as the spherical surface through which the (fresh and reacted) fuel is diffused, becoming wholly reacted fuel ; the proportion of fresh fuel vanishes at the flame front.

The fuel diffusion process in non-stationary conditions, assuming the homogeneity of the gas properties and spherical symmetry is expressed by the known relation

$$r^2 \frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right), \tag{3}$$

where w is the mass concentration of the fuel, representing the ratio of the partial density of fuel vapours to the total density ; D — diffusion coefficient.

The mass concentration of the fuel w should satisfy the condition of the conservation of matter: the total fuel mass in the space where the diffusion takes place is equal to the mass of the initial fuel drop m_p.

Generally, it should be admitted that before introducing the drop in the combustion chamber there exists a uniform mass concentration of the fuel which reacted chemically, w_0. Taking into account that only the fuel in excess with respect to the mass uniform concentration *) is diffused, the condition of the conservation of matter becomes

$$\int_0^\infty 4\pi\varrho\,(w - w_0)\,r^2\,dr = \frac{4\pi}{3}\varrho_l\,r_{p_0}^3\,(1 - w_0)\,, \tag{4}$$

where ϱ, ϱ_l are the gas density and liquid fuel density, kg/cm^3, respectively.

Equation (3) is similar to the equation characterizing the heat conduction in an infinite isotropic medium. On this basis, Spalding suggested [9] for solving equation (3) together with condition (4), the use of the solution obtained for the temperature distribution which results after the instantaneous transfer of a heat quantity in an infinite medium (instantaneous heat source). When the source supplies instantaneously at the very center of the (punctiform) source the fuel mass m_p, from which the mass m_p is diffused, one obtains

$$w = w_0 + \frac{m_p(1 - w_0)}{\varrho\,(4\pi D t)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4 D t}\right). \tag{5}$$

The adopting of this solution permits the avoiding of the difficulty resulting from non-validity of the general equation (3) at the phase boundary, which besides is no longer defined.

It should be observed that actually a fuel drop of mass $m_p = 4\cdot\pi\cdot\varrho_l\,r_{p_0}^3/3$ generates a field of mass concentration w, different from that generated by the punctiform source which introduces instantaneously an equal mass of fuel m_p. The work cited above shows that sensible differences may exist only in the first instance, in a time interval of the order $r_{p_0}^2/D$. In order to specify the order of magnitude of this interval, the usual values $r_{p_0} = 4.10^{-3}$ cm and $D = 0{,}05$ cm^2/s are chosen; one obtains $r_{p_0}^2/D = 3{,}2.10^{-4}$ s which represents approximately the fifth part from the burning time. In addition, the application of relation (5) for the first instants is also restricted by the fact that if $w_0 \neq 0$, values above unity are obtained for w, which obviously is senseless.

The flame position is estimated according to relation (5) which expresses the fuel global distribution. At the flame front the mass con-

* To the fuel drop there corresponds the mass concentration 1, but the mass of substance diffused corresponds to the concentration $1 - w_0$, representing the excess with respect to the uniform mean concentration.

centration of the fresh fuel vanishes. The development of chemical reactions supposes meanwhile that at the flame front only the combustion products exists, hence the fuel which reacted, with the oxygen with which it is chemically bonded and the nitrogen normally associated with the oxygen; accordingly, between the mass concentration of these classes of substances there exists a stoichiometric ratio. Denoting by w_{st} the mass concentration of the fuel corresponding to the flame and by r_f the flame radius, relation (5) becomes

$$w_{st} - w_0 = \frac{m_p (1 - w_0)}{\varrho (4 \pi D t)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4 D t}\right),$$

whence

$$r_f^2 = 4 D t \cdot ln \frac{m_p (1 - w_0)}{\varrho (w_{st} - w_0) (4 \pi D t)^{3/2}}, \tag{6}$$

where

$$w_{st} = \frac{\varrho_{st}}{\varrho_{st} + \varrho_{a\,st}} = \frac{1}{1 + \sigma}. \tag{7}$$

ϱ_{st}, $\varrho_{a\,st}$ are the specific mass of fuel and air, respectively, which are in stoichiometric ratio; σ — the stoichiometric ratio.

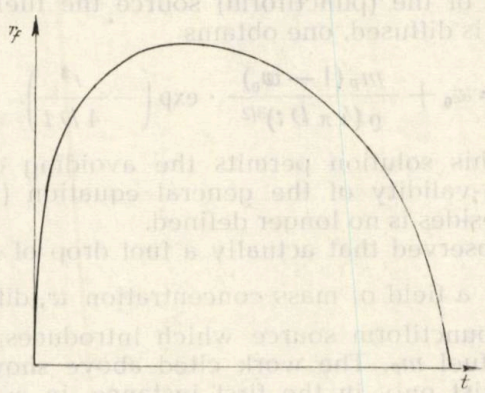


Fig. 2.

Relation (6) expresses the instantaneous flame position. The combustion lasts up to the flame disappearance. In this manner one can obtain the burning time t_a of fuel mass m_p by setting the condition $r_f = 0$:

$$t_a = \frac{1}{4 \pi D} \left[\frac{m_p (1 - w_0)}{\varrho (w_{st} - w_0)}\right]^{2/3}. \tag{8}$$

Figure 2 shows the variation in time of the flame radius r_f.

For calculating the burning rate it is necessary to indicate the distribution of the mass concentration of the fresh fuel.

In the sphere delimited by the flame front, in addition to the fresh fuel, only combustion gases exist (fig. 3). Accordingly, if $\tilde{w}$ is the mass concentration of fresh fuel, $w-\tilde{w}$ represents the mass concentration of

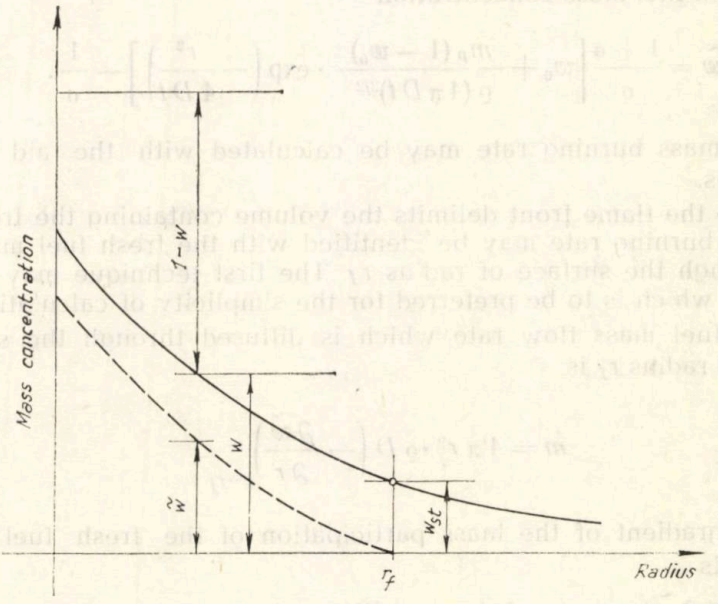


Fig. 3.

the fuel which reacted and is hence in a stoichiometric ratio with the mass participation of the oxygen and nitrogen in the combustion gases, 1-w,

$$w-\tilde{w}=\frac{1}{\sigma}(1-w),$$

such that

$$\tilde{w}=\frac{1+\sigma}{\sigma}w-\frac{1}{\sigma}. \tag{9}$$

Relation (9) satisfies the boundary condition. Thus, for the radius r_f the global mass concentration of the fuel w becomes equal to w_{st}; taking account of relation (7),

$$\tilde{w}=\frac{1+\sigma}{\sigma}\cdot\frac{1}{1+\sigma}-\frac{1}{\sigma}=0,$$

which satisfies the initial assumption. At the origin of the system ($r=0$), the fuel mass concentration is maximum w_{max} and hence $\tilde{w}=\tilde{w}_{max}$.

By using relation (5) and (3), we may establish the dispersion law of the fresh fuel mass concentration

$$\tilde{w}=\frac{1+\sigma}{\sigma}\left[w_0+\frac{m_p(1-w_0)}{\varrho(4\pi Dt)^{3/2}}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)\right]-\frac{1}{\sigma}. \tag{10}$$

The mass burning rate may be calculated with the aid of two techniques.

Since the flame front delimits the volume containing the fresh fuel, the mass burning rate may be identified with the fresh fuel mass flow rate through the surface of radius r_f. The first technique may be thus obtained, which is to be preferred for the simplicity of calculations *).

The fuel mass flow rate which is diffused through the spherical surface of radius r_f is

$$\dot{m}=4\pi r_f^2\cdot\varrho D\left(-\frac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\right)_{r=r_f}. \tag{11}$$

The gradient of the mass participation of the fresh fuel at the radius r_f is

$$\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\right)_{r=r_f}=-\frac{1+\sigma}{2\sigma}\cdot\frac{m_p(1-w_0)}{\varrho Dt(4\pi Dt)^{3/2}}r_f\cdot\exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right). \tag{12}$$

Replacing in relation (11), we get

$$\dot{m}=\frac{1+\sigma}{7.08\,\sigma}\cdot\frac{m_p(1-w_0)r_f^3}{D^{3/2}\cdot t^{5/2}}\cdot\exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right). \tag{13}$$

The second technique considers that the mass burning rate represents the variation rate of the fresh fuel mass contained in the sphere of radius r_f. The instantaneous mass of fresh fuel may be calculated by knowing the distribution law of its mass concentration and the radius r_{st}.

An examination of the relation obtained shows that the burning rate vanishes at the initial instant and passes through a maximum for $t=t_a/e^3\simeq t_a/20$. The function $\dot{m}(t)$ admits as tangent the abscissa axis at the point $t=t_a$. Figure 4 represents the variation of the burning rate $\dot{m}$.

---

* The two techniques lead to similar results, as it will be seen by applying them to a simpler case.

According to relation (13), the burning rate depends on the drop initial mass m_p, initial mass participation of fuel which reacted w_0 and physical properties and state parameters of the gases : the diffusion coefficient D (whose value expresses implicitly the temperature influence) and the gas density ϱ (directly proportional with the pressure and implicitly expressed by the the radius r_f).

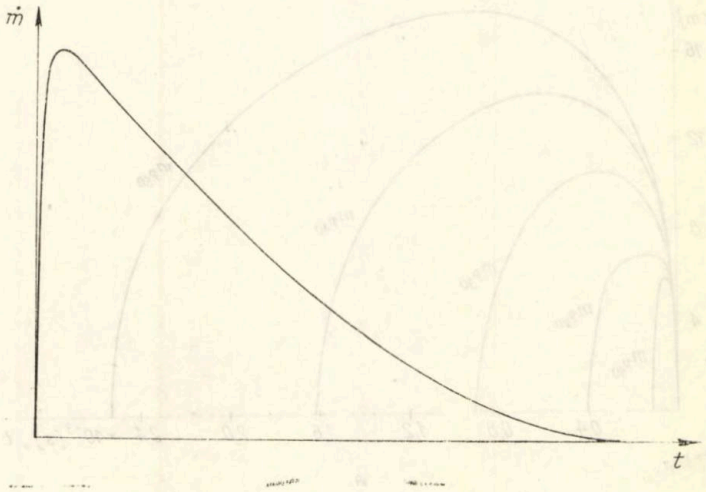


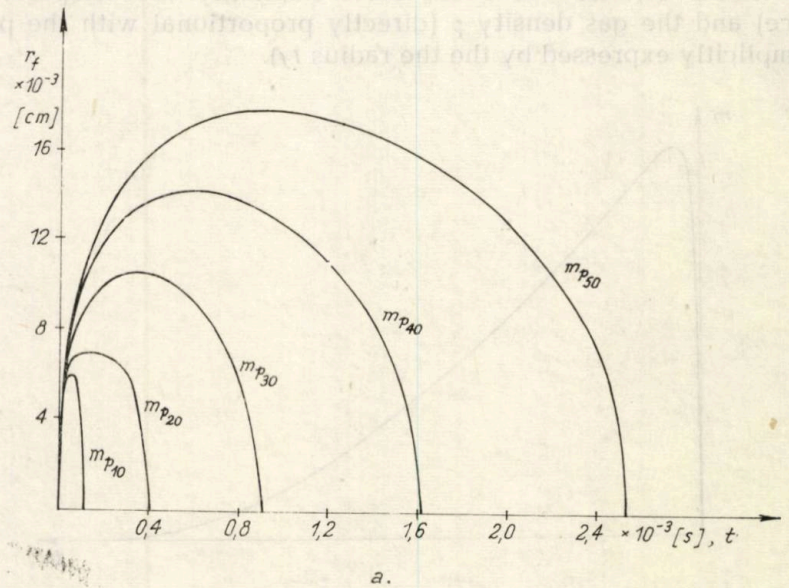
Fig. 4.

The same effects are put into evidence by relation (8) for the burning time t_a. When the drop is introduced in a medium in which the free oxygen is absent ($w_0 = w_{st}$), the burning time tends to infinity. By the manner of expressing the influence of pressure, relation (8) differs clearly from relation (2). According to relation (8) t_a is inversely proportional to the pressure ($p^{2/3}$); in relation (2) t_a is much more sensible to the increase of pressure in the domain of high pressures and vanishes beginning from a pression equal to the fuel critical pressure. The two relations are however similar as concerns the influence of the drop initial radius ($r_{p_0}^2$). Finally, if the thermal diffusion coefficient ($\lambda/\varrho c_p$) is identified with the molecular diffusion coefficient D, relation (2) expresses an influence of D similar to that resulting from relation (8).

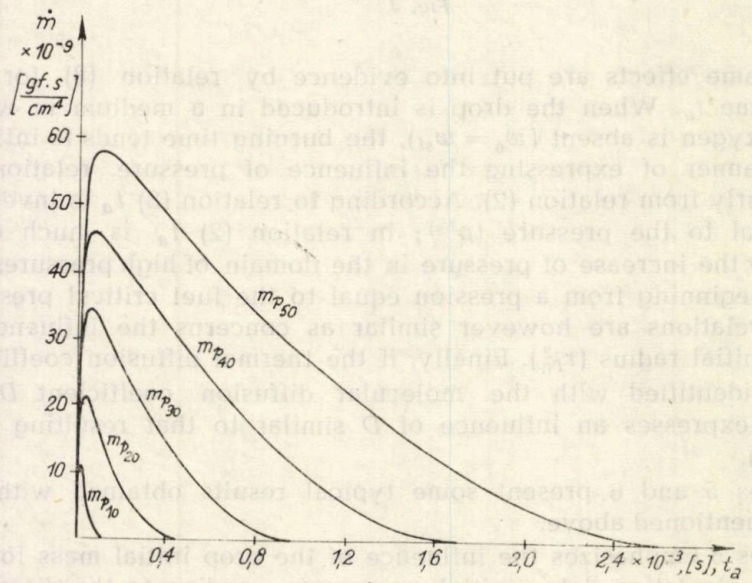
Figures 5 and 6 present some typical results obtained with the relations mentioned above.

Figures 5 emphasizes the influence of the drop initial mass for the following calculation data : initial mass corresponding to the diameters 50, 40, 30, 20, 10 μm ; $D = 0.055$ cm^2/s ; $w_0 = 0$; $w_{st} = 0.067$; $\varrho = 12.24.10^{-6}$ gfs^2/cm^4; $\varrho_l = 0.867.10^{-3}$ gfs^2/cm^4.

Figure 6 shows the influence of the gas state parameters on the burning time of the drop in the preceding case. By adopting the value $D=0.055$ cm²/s, for the state parameters $p=65$ kgf/cm² and $T=1700°K$,



a.



b.

Fig. 5.

we have calculated the values of D corresponding to other state parameters with the aid of the relation $D=D_0(p_0/p)\cdot(T/T_0)^2$; it was considered $w_0 = 0$.

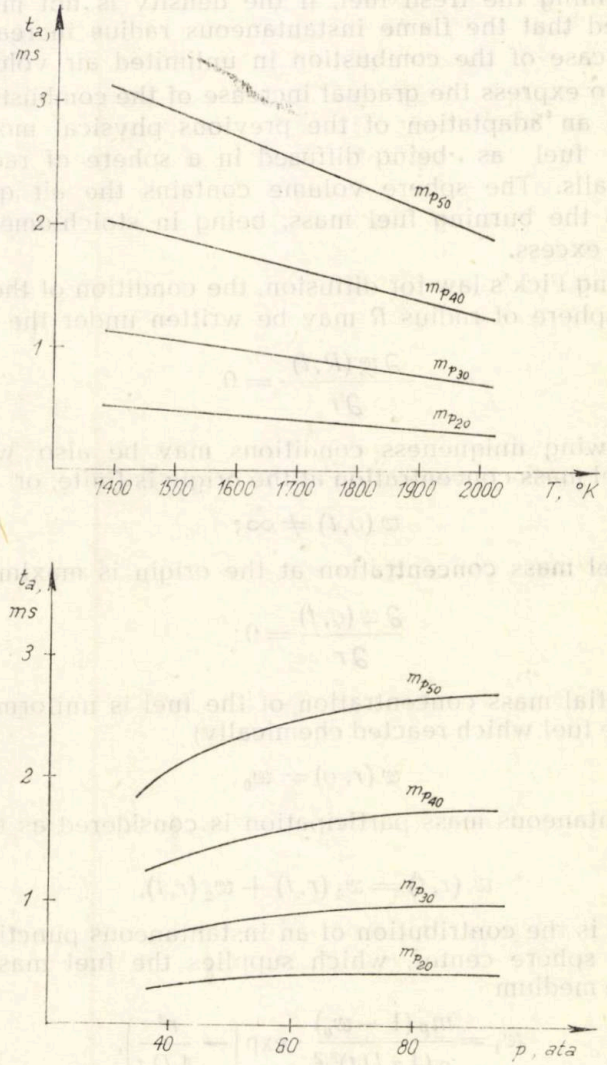


Fig. 6.

2. Combustion of the fuel drop in non-stationary regime in a limited air volume

The case of the drop combustion in a limited air volume is of a particular importance for technical applications. In fact, the case previously dealt with represents a particular case of this problem.

The fuel combustion in a limited air volume is characterized by the progressive impurification of the air with combustion products, the combustion being thus slowed down. Since the flame delimits the volume containing the fresh fuel, if the density is not modified, it is to be expected that the flame instantaneous radius increases as compared to the case of the combustion in unlimited air volume.

In order to express the gradual increase of the combustion products, we suggested an adaptation of the previous physical model by considering the fuel as being diffused in a sphere of radius R, with impervious walls. The sphere volume contains the air quantity corresponding to the burning fuel mass, being in stoichiometric ratio or with a certain excess.

By applying Fick's law for diffusion, the condition of the impervious walls of the sphere of radius R may be written under the form

$$\frac{\partial w(R,t)}{\partial r} = 0.$$

The following uniqueness conditions may be also written:
— the fuel mass concentration at the origin is finite, or

$$w(o,t) \neq \infty;$$

— the fuel mass concentration at the origin is maximum, or

$$\frac{\partial w(o,t)}{\partial r} = 0;$$

— the initial mass concentration of the fuel is uniform throughout the sphere (the fuel which reacted chemically)

$$w(r,o) = w_0.$$

The instantaneous mass participation is considered as the resultant of two effects

$$w(r,t) = w_1(r,t) + w_2(r,t),$$

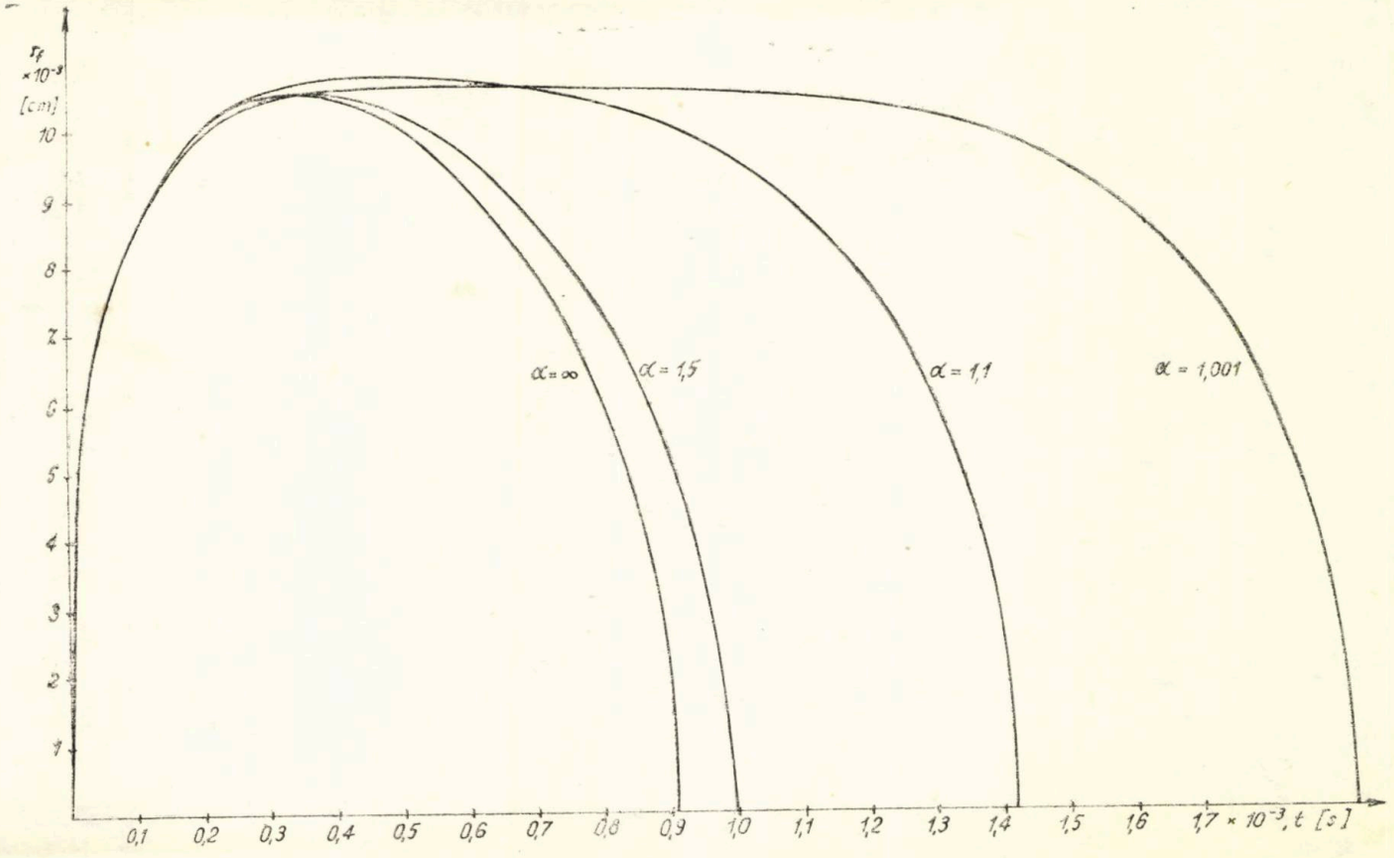
where $w_1(r, t)$ is the contribution of an instantaneous punctiform source placed at the sphere center, which supplies the fuel mass m_p in an unlimited pure medium

$$w_1 = \frac{m_p(1-w_0)}{\varrho(4\pi D t)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4 D t}\right),$$

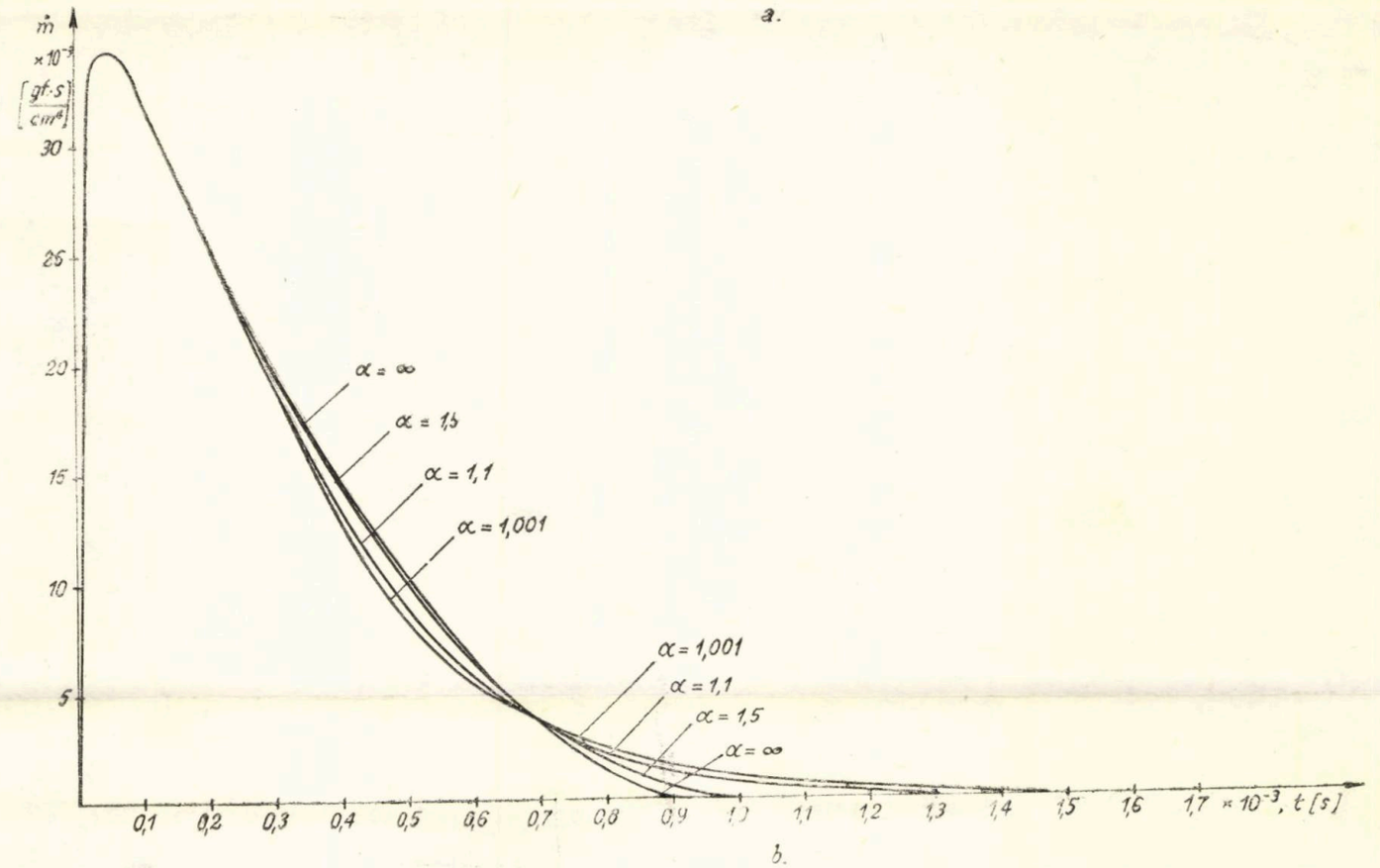
and $w_2(r, t)$ is a function satisfying the diffusion equation in interior of the sphere ($0 < r < R$), for $t > 0$

$$r^2 \frac{\partial w_2}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w_2}{\partial t}\right),$$

with the boundary conditions.

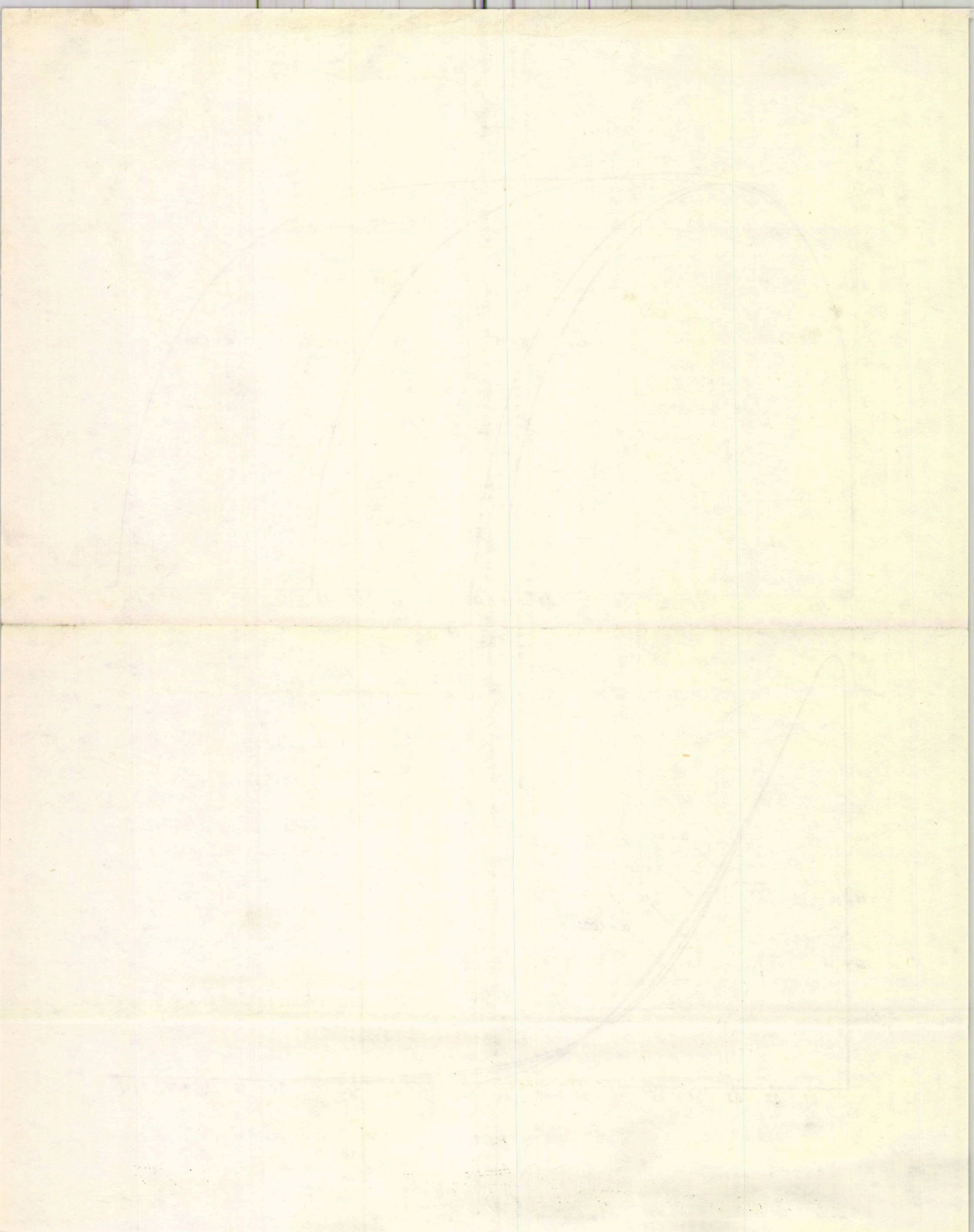

r_f
$\times 10^{-3}$
[cm]
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\alpha = \infty$
$\alpha = 1,5$
$\alpha = 1,1$
$\alpha = 1,001$
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 $\times 10^{-3}$, t [s]

a.


$\dot{m}$
$\times 10^{-3}$
$\left[\frac{gf \cdot s}{cm^4}\right]$
30
25
20
15
10
5
$\alpha = \infty$
$\alpha = 1,5$
$\alpha = 1,1$
$\alpha = 1,001$
$\alpha = 1,001$
$\alpha = 1,1$
$\alpha = 1,5$
$\alpha = \infty$
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 $\times 10^{-3}$, t [s]

b.

Fig. 7.



A similar problem treated in the theory of heat conduction concerns the conduction in the interior of a sphere, with perfect thermic insulation of external surface (zero external heat flux), with the same uniqueness conditions [10], [11]. The solution obtained may be used for the diffusion problem of interest, by replacing the temperature by the analogue temperature, i.e. the mass concentration

$$w = w_0 + \frac{m_p(1-w_0)}{\varrho}\left[\frac{1}{2\pi r R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n}\sin r\alpha_n \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(-D\alpha_n^2 t\right) + \frac{3}{4\pi R^3}\right], \tag{15}$$

α_n resulting as the positive roots of : $R\alpha_n \cot R\alpha_n - 1 = 0$.

By using a technique similar to that from the preceding paragraph, one may calculate the flame radius r_f and then the burning rate.

The flame radius r_f is obtained by solving the equation resulting from the replacing r in relation (15) by r_f and w by w_{st} ; the solving is made by trials. Further, after expressing the mass concentration of fresh fuel w, one may apply easily both techniques for determining the burning mass rate, presented in the preceding paragraph, the results being similar (Appendix I) ;

$$\dot{m} = 2D \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m_p(1-w_0)}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n}(\sin r_f\alpha_n -$$
$$- r_f\alpha_n \cos r_f\alpha_n) \cdot \exp\left(-D\alpha_n^2 t\right). \tag{16}$$

Relation (16) differs formally from the preceding relation (13) and their direct comparison can be hardly made. As it was to be expected, the calculations carried out with the aid of relation (16) for sufficiently great values of the radius R, such that to approximate the diffusion in unlimited medium, lead practically to results similar to those obtained when relation (13) is applied.

Figure 7 presents typical results obtained for the combustion in air by applying the relations established.

The calculations were performed for several radii R. One of the values of R was such chosen as to define the sphere volume which contains the stoichiometric air quantity ($\alpha = 1.001$) ; the other radii R correspond to the combustion with air excess.

The calculations correspond to an initial mass of fuel equal to that of the drop of diameter 30 μm ; we have also chosen $D = 0.055$ cm²/s, $w_0 = 0$, $w_{st} = 0.067$, $\varrho = 12.24.10^{-6}$ gfs²/cm⁴, $\varrho_l = 0.867.10^{-3}$ gfs/cm⁴.

It may be observed that for sufficiently great air excesses, sensible differences are not recorded concerning the manner in which the combustion takes place as compared to the case of infinite atmosphere. The influence of the air excess becomes sensible beginning from an excess coefficient $\alpha = 1.5$ and becomes more pronouced when approaching to the stoichiometric conditions. Thus, for the conditions in which

the calculations were carried out, an increase of about 90% is obtained for the burning time when passing from the conditions of infinite to stoichiometric atmosphere conditions *). It is worth mentioning that Gee and Karim have obtained by applying relation (2), a similar increase of only 50% ; the results published do not include however details concerning the conditions for which the calculations were made.

3. Combustion in non-stationary regime for the case of a continuous source

The results obtained for the case of the fuel drop, by assimilating it with an instantaneous substance source, may be used for examining the theoretical case in which the source supplies substance continuously. This case may be of practical interest since is could be a model for the case of progressive introduction, according to a certain law, of the fuel drops, corresponding to the fuel injection in the combustion chamber. The law of the introduction of fuel drops could be represented by the law of the supply of the continuous source.

By applying a method used in the theory of heat conduction [10] one may determine the distribution of the fuel mass fraction generated by a continuous punctiform source, with the mass flow rate $m'(t')$, kg/s, in the time interval $t'=o$, $t'=t$, using the relation of the instantaneous source. For this purpose this relation is integrated function of time between the limits $t'=o$, $t'=t$, the mass m being replaced by the mass flow rate $m'(t)$.

Thus to the case of the unlimited oxidizer volume, there corresponds

$$w = w_0 + \frac{1-w_0}{\varrho\,(4\pi D)^{3/2}} \int_0^t m'(t') \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4D(t-t')}\right] \cdot \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \cdot \qquad (17)$$

For the sake of simplicity we assume that the flow rate of the substance source is constant ($m'=ct$). In such a case, the solution is (Appendix II) :

$$w = w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{4\pi\varrho\, Dr} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right), \qquad (18)$$

where

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi$$

(error function complement).

---

* The stoichimetric conditions have been approximated by the value $\alpha = 1.001$. Under rigorous stoichiometric conditions the flame radius becomes after a short time equal to R, while the burning time tends to infinity.

Relation (17) is valid if $m'(t)$ has a finite number of discontinuities. Accordingly, the distribution of fuel concentration resulting after the substance supply ceases, is obtained with the same integral, whose upper integration limit is τ (supply duration)

$$w = w_0 + \frac{1 - w_0}{\varrho (4\pi D)^{3/2}} \int_0^{\tau} m'(t') \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4D(t-t')}\right] \cdot \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}.$$

If $m' = ct$, we obtain (Appendix II)

$$w = w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{4\pi \varrho D r}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4D(t-\tau)}}\right)\right]. \tag{19}$$

The technique previously employed requires to calculate firstly the flame radius by solving the equation resulting by replacing in relations (18) or (19) $w = w_{st}$ and $r = r_f$. Then, for a more convenient way of solution, the burning rate is calculated by applying the first technique. Thus, one obtains (Appendix III) :

$$\dot{m} = \frac{1+\sigma}{\sigma} m'(1-w_0)\left[\frac{r_f}{\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right)\right] \tag{20}$$

for the interval $t' \leqslant \tau$, and

$$\dot{m} = \frac{1+\sigma}{\sigma} m'(1-w_0)\left\{\frac{r_f}{\sqrt{\pi D t}} \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) - \frac{r_f}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \exp\left[-\right.\right. \tag{21}$$

$$\left.\left. - \frac{r_f^2}{4D(t-\tau)}\right] + \operatorname{erfc}\left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{r_f}{\sqrt{4D(t-\tau)}}\right)\right\},$$

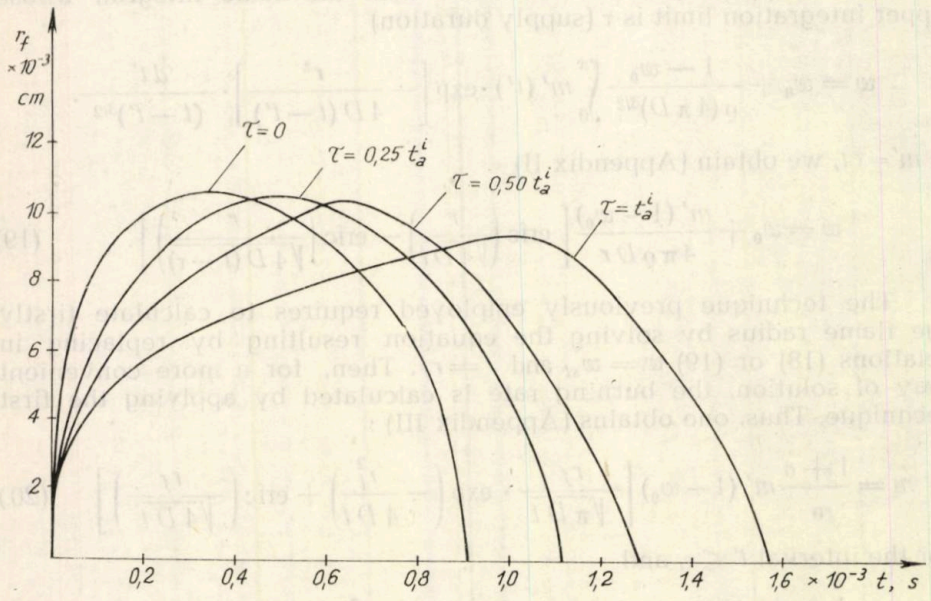
for $t' > \tau$.

The application of the same procedure for the case of limited volume of oxidizer on the basis of relation (15) is no longer of interest, since the relation which is obtained for the mass burning rate includes a divergent series.

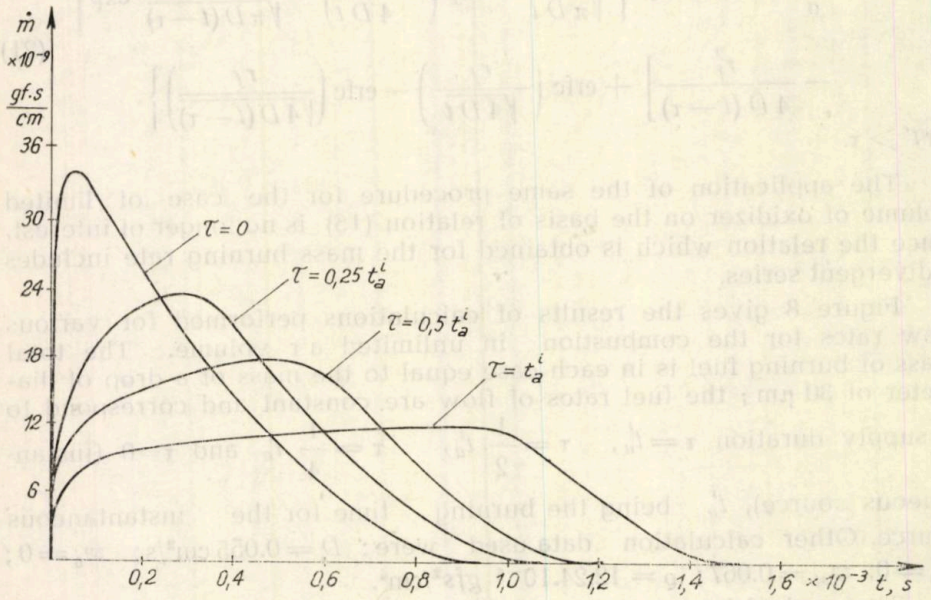
Figure 8 gives the results of calculations performed for various flow rates for the combustion in unlimited air volume. The total mass of burning fuel is in each case equal to the mass of a drop of diameter of 30 μm ; the fuel rates of flow are constant and correspond to a supply duration $\tau = t_a^i$, $\tau = \frac{1}{2} t_a^i$, $\tau = \frac{1}{4} t_a^i$ and $\tau = 0$ (instantaneous source), t_a^i being the burning time for the instantaneous source. Other calculation data used were : $D = 0.055\ \mathrm{cm^2/s}$; $w_0 = 0$; $w_0 = 0$; $w_{st} = 0.067$; $\varrho = 12.24.10^{-6}\ gfs^2/\mathrm{cm}^4$.

The gradual introduction of the fuel leads to the delay of the combustion end. Thus, as compared to the case when the fuel is instan-

taneously introduced, the burning time increases by about 73% in the case of continuous introduction, with $\tau = t^i$. It is to be noticed that



a.



b.

Fig. 8.

the general shape of the variation of the mass burning rate resulting from the computations is similar to that known for the diffusive combustion of the fuel injected in the combustion chamber of compression ignition engines.

4. Conclusions

The conditions of combustion at high pressure, in the range of fuel critical pressure, require to treat the fuel diffusive combustion as an essentially non-stationary process. The physical model created in this respect permits, with suitable adaptations, to treat both the case of the drop combustion in unlimited and limited oxidizer volumes, and the case when the drop is replaced by a source which supplies the fuel continuously.

The calculation relations for the flame radius and mass burning rate are suitable to technical purposes.

APPENDIX I

Calculation of the burning rate in the case of an instantaneous source, in a limited air volume.

First technique

$$\dot{m} = 4\pi r_f^2 \varrho D \left(-\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}\right)_{r=r_f} \tag{I.1}$$

From (15) and (9)

$$\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}\right)_{r=r_f} = \frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m_p (1-w_0)}{\varrho} \left[-\frac{1}{2\pi r_f^2 R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2 \alpha_n} \sin r_f \alpha_n \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left(-D\alpha_n^2 t\right) + \frac{1}{2\pi r_f R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2} \cdot \cos r_f \alpha_n \cdot \exp\left(-D\alpha_n^2 t\right) \right]. \tag{I.2}$$

Introducing (I.2) in (I.1), yields

$$\dot{m} = 2D \frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m_p (1-w_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2 \alpha_n} (\sin r_f \alpha_n - r_f \alpha_n \cdot \cos r_f \alpha_n) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-D\alpha_n^2 t\right). \tag{I.3}$$

Second technique

The burning rate, equal to the variation rate of the fresh fuel mass contained in the sphere of radius r_f, is

$$\dot{m} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{r_f} 4\pi r^2 \varrho\, \tilde{w}\, dr\right] = -\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{I.4}$$

$$I = 4\pi\varrho \int_0^{r_f} r^2 \tilde{w}\, dr =$$

$$= 4\pi \frac{1+\sigma}{\sigma} m_p (1-w_0)\left[\int_0^{r_f} \frac{r}{2\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n} \sin r\alpha_n \cdot \exp(-D\alpha_n t)\cdot c\, r + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4\pi R^3}\int_0^{r_f} r^2\, dr\right] - 4\pi\frac{1}{\sigma}\varrho\int_0^{r_f} r^2\, dr.$$

Because

$$\int_0^{r_f} r\cdot \sin r\alpha_n \cdot dr = \frac{1}{\alpha_n^2}\sin r_f\alpha_n - \frac{r_f}{\alpha_n}\cos r_f\alpha_n,$$

we have

$$I = 4\pi\frac{1+\sigma}{\sigma} m_p (1-w_0)\left[\frac{1}{2\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n}\left(\frac{1}{\alpha_n^2}\sin r_f\alpha_n - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{r_f}{\alpha_n}\cos r_f\alpha_n\right)\cdot \exp(-D\alpha_n^2 t) + \frac{r_f^3}{4\pi R^3}\right] - \frac{4\pi}{3\sigma}\varrho\, r_f^3. \tag{I.5}$$

Differentiating (I.5) and introducing the result in (I.4) :

$$\dot{m} = -2\frac{1+\sigma}{\sigma} m_p (1-w_0)\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n}\left(\frac{1}{\alpha_n^2}\sin r_f\alpha_n - \right.$$

$$\left. - \frac{r_f}{\alpha_n}\cos r_f\alpha_n\right)\cdot\left[-D\alpha_n^2 \exp(-D\alpha_n^2 t)\right].$$

or,

$$\dot{m} = 2D\frac{1+\sigma}{\sigma} m_p (1-w_0)\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+R^2\alpha_n^2}{R^2\alpha_n}(\sin r_f\alpha_n - $$

$$- r_f\alpha_n\cos r_f\alpha_n)\cdot\exp(-D\alpha_n^2 t).$$

APPENDIX II

Calculation of the fuel concentration distribution in the case of a continuous source

A. *Period of emission*

Assuming a constant mass flow rate, (17) may be written

$$w = w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{\varrho(4\pi D)^{3/2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{r^2}{4D(t-t')}\right] \cdot \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}. \qquad (II.1)$$

Defining a new variable

$$(t-t')^{-1/2} = \zeta,$$

(II.1) becomes

$$w = w_0 + \frac{2m'(1-w_0)}{\varrho(4\pi D)^{3/2}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left[-\frac{r^2\zeta^2}{4D}\right] d\zeta. \qquad (II.2)$$

A new change of variable in (II.2)

$$\frac{r^2\zeta^2}{4D} = \xi^2,$$

yields,

$$w = w_0 + \frac{2m'(1-w_0)}{\varrho(4\pi D)^{3/2}} \int_{\frac{r^2}{4Dt}}^{\infty} \exp(-\xi^2) \cdot \frac{2\sqrt{D}}{r} d\xi =$$

$$= w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{4\pi\varrho D r} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r^2}{4Dt}}^{\infty} \exp(-\xi^2)\, d\xi,$$

or,

$$w = w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{4\pi\varrho D r} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right). \qquad (II.3)$$

B. *No emission*

Assuming again a constant mass flow rate,

$$w = w_0 + \frac{m'(1-w_0)}{\varrho(4\pi D)^{3/2}} \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4D(t-t')}\right] \cdot \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}.$$

Following the same technique, it is defined the variable

$$(t-t')^{-1/2} = \zeta,$$

to obtain

$$w = w_0 + \frac{2\,m'\,(1-w_0)}{\varrho\,(4\pi D)^{3/2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}} \exp\left(-\frac{r^2\zeta^2}{4D}\right) d\zeta. \qquad \text{(II.4)}$$

With the change of variable

$$\frac{r^2\zeta^2}{4D} = \xi^2,$$

(II.4) becomes,

$$w = w_0 + \frac{m'\,(1-w_0)}{4\pi\varrho\,D\,r} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r}{\sqrt{4Dt}}}^{\frac{r}{\sqrt{4D(t-\tau)}}} \exp\,(-\xi^2)\cdot d\,\xi =$$

$$= w_0 + \frac{m'\,(1-w_0)}{4\pi\varrho\,D\,r} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\frac{r}{\sqrt{4Dt}}}^{\infty} \exp\,(-\xi^2)\,d\,\xi - \int_{\frac{r}{\sqrt{4D(t-\tau)}}}^{\infty} \exp\,(-\xi^2)\,d\,\xi \right],$$

thus,

$$w = w_0 + \frac{m'\,(1-w_0)}{4\pi\varrho\,D\,r} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4D\,(t-\tau)}}\right) \right]. \qquad \text{(II.5)}$$

APPENDIX III

Calculation of the burning rate in the case of a continuous source

A. *Period of emission*

$$\dot{m} = 4\pi r_f^2 \varrho\, D \left(-\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}\right)_{r=r_f}.$$

Calculating the concentration gradient of the fresh fuel, by taking into account that

$$\frac{d}{dx}\,(erfc\ x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\,(-x^2),$$

we have, for the interesting case ($x = r/\sqrt{4Dt}$),

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[erfc\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\,(erfc\ x)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \qquad \text{(III.1).}$$

Combining (II.3), (9) and (III.1), yields

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = -\frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m'(1-w_0)}{4\pi\rho D}\left[\frac{1}{r\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2} erfc\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right)\right], \qquad \text{(III.2)}$$

thus

$$\dot{m} = \frac{1+\sigma}{\sigma} m'(1-w_0)\left[\frac{r_f}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) + erfc\left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]. \qquad \text{(III.3)}$$

B. *No emission*

Following the same way, we have

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = -\frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m'(1-w_0)}{4\pi\rho D}\left\{\frac{1}{r\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) - \frac{1}{r\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}\right] + \frac{1}{r^2}\left[erfc\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right) - erfc\left(\frac{r}{\sqrt{4D(t-\tau)}}\right)\right]\right\} \qquad \text{(III.4)}$$

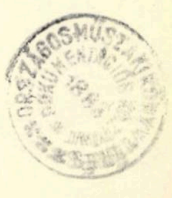
and

$$\dot{m} = \frac{1+\sigma}{\sigma} m'(1-w_0)\left\{\frac{r_f}{\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) - \frac{r_f}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4D(t-\tau)}\right) + erfc\left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right) - erfc\left(\frac{r_f}{\sqrt{4D(t-\tau)}}\right)\right\} \qquad \text{(III.5)}$$

Chair of Internal Combustion Engines
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Godsave G. A. E.* — Fourth International Symposium on Combustion. Williams and Wilkins Co., Baltimore, 1953, p. 818—830.
2. *Goldsmith M., Penner S. S.*, Jet Propulsion, 24, 1954, Nr. 7, p. 245.
3. *Lorell J., Wise, H., Carr, R. E.*, J. Chem. Phys., 25 (1956), nr. 4, p. 325.
4. *Lavrov, N. V., Şurighin, A. P.*, Vvedenie v teoriu gorenia i gazificații topliva. Akademia Nauk SSSR, Moskva, 1962.
5. *Hitrin, L. N.* Osnovi gorenia uglevodorodnîh topliv. Akademia Nauk SSSR, Moskva, 1960.
6. *Spalding, D. B.*, Some Fundamentals on Combustion. Butterworth scientific publications. London, 1955.
7. *Williams, F. A.*, Combustion Theory. Addison-Wesley Inc. Co., Reading Massachusetts, 1965.
8. *Robu, V. I.*, Distilare, fracționare. Editura tehnică, București, 1963.
9. *Spalding, D. B.*, Theory of Particle Combustion at High Pressure. A.R.S. Journal, 1959, 11 (nov)), p. 828—835.
10. *Carslaw, H. S., Jaeger, I. C.*, Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, Oxford, 1948.
11. *Hamburger, L.*, Introducere în teoria propagării căldurii. Conducția prin solide. Editura Academiei Republicii Populare Române, București, 1956.



I. P. „GRAFICA NOUĂ" II — c. 15828

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1909 SEP 23

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 2 ANUL 1969
MARTIE — APRILIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

OR SZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXI — NUMĂRUL 2

MARTIE — APRILIE
1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Conf. dr. ing. *Petru Baltă* ; Academician prof. *Martin Bercovici* ; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* ; Conf. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua* ; Conf. dr. *Ion Grădișteanu* ; Conf. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific de redacție) ; Prof. *Constantin Ionescu-Bujor*, Profesor emerit ; Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. ing. *Nicolae Manolescu* ; Prof. ing. *Ștefan Mantea* ; Prof. dr. ing. *Marius Preda* ; Prof. ing. *Mihai Renert* ; Conf. *Mircea Soare* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. docent *Radu Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

Redactor responsabil:
Rector
Prof. dr. ing. *George Bărănescu*
membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICĂ

Har. P. Ionescu

Asupra unor ecuaţii diferenţiale 21

D. Filipescu

Unele transformări geometrice în optică şi grupurile Lie . . . 37

GEOMETRIE

A. Tănăsescu

Perspectivstudium der äquiresultanten Geraden 43

FIZICĂ

И. Дрегич М. Петреску И. Спынулеску-Карнару

Электрические свойства тонких полупроводниковых пленок Pb Te 55

CHIMIE ANORGANICĂ

Gr. Teodorescu, Ileana Niculescu, Ana Maria Lupu Florica Popescu

Étude conductometrique de la reaction de precipitation de l'ion de plomb avec l'acide phosphoreux 67

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Substanţe ionice naturale — materii prime pentru obţinerea unor noi sortimente de îngrăşăminte minerale 75

Gh. Ioniţă, D. Grigorescu, S. Dima

Desemulsionarea motorinei cu ajutorul schimbătorilor de ioni . . 89

REZISTENŢA MATERIALELOR

I. Mincă

Contribuţii la calculul eforturilor unitare în cilindri cu pereţi groşi neuniform încălziţi 95

HIDRAULICĂ

Gh. Zidaru

Ebenes Gitter aus den dünnen und schwach gewölbten Profilen in der Potentialströmung 111

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

G. Bărănescu

Unele probleme privind echilibrajul momentului extern al termenilor de ordinul întîi la motorul în linie în doi timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate 121

CAZANE

M. Postelnicescu

Asupra temperaturilor minime de evacuare a gazelor de ardere din cazane 127

ELECTRONICĂ

C. Bulucea, S. Cserveny

The Non-constancy of the Quasi-fermi Potentials Across the Transitions Region of a Reverse Biased p^+-n Junction and its Implications in Transition Region Capacitance Calculation 141

Резюме

Хар. П Ионеску Д. К. 517.9

К нероторым дифференциальным уравнениям

Настоящая работа содержит интегрирование некоторых дифференциальных уравнений, для которых неизвестная функция и ее производные выражены как функции действительной изменяемой x либо функционального элемента

$$X = T(x)\frac{ax+b}{cx-a}.$$

Функциональный аргумент $T(x)$ представляет собой инволютивное преобразование точек реальной оси.

Изучаемые уравнения представлены в виде:

$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + Af(x) \; ; \qquad f^{(m)}(X) + Af(x) = 0$$

для $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Даются также некоторые замечания относительно уравнений вида:

$$f'(X) + B(X) + Af(x) = 0$$

где A, B являются заданными постоянными.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. Филипеску Д. К. 517:535

Некоторые геометрические преобразования в оптике

Используя сходящиеся перемещения, определенные с помощью преобразования

$$x_1 = x\left(1 - \frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{ax+bx}{x^2+x^2}\right),$$

автор показывает, что сходящиеся плоские перемещения являются группами Ли с двумя параметрами, а пространственные сходящиеся перемещения являются группами Ли с тремя параметрами. Автор находит и форму инвариантных функций этих групп.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

А. Танасеску Д. К 515:517

Перспективное изучение равнорезультирующих прямых

В этой работе представлено перспективное изучение равнорезультирующих прямых, тоесть четырех конкурентных перпендикулярных прямых, образующих особенную пространственную конфигурацию в связи с некоторым трехгранником.

Перспективно изучены особенные геометрические свойства этой специальной пространственной конфигурации как в общем случае, так и в частных случаях, используя как метод классической перспективы, так и методы аксонометрической перспективы, имея в виду тот факт, что подобное изучение с помощью эпюр Монжа трудно осуществить.

Bul, Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Summary

Har. P. Ionescu D.C. 517.9.

On Some Differential Equations

This paper contains the integration of some differential equations for which the unknown function and its derivates are expressed as functions of an actual x variable or a functional argument.

$$X = T\ (x)\ \frac{ax + b}{cx - a}.$$

The functional argument $T(x)$ represents an involutive transformation of the points of the actual axis.

The equations studied have the following shape :

$$f^{(m)}\left(\frac{ax + b}{cx - a}\right) + Af\ (x)\ ; \qquad f^{(m)}\ (X) + Af\ (x) = 0$$

for m — 1, 2, 3, 4, 5,

The author also indicates some observations on equations of the :

$$f'\ (X) + B\ (X) + Af\ (x) = 0$$

shape where A, B, are given constants.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D. Filipescu D.C. 517 : 535

Some Geometrical Transformations in S. I. Optics

By using the convergent translations defined by the transformation :

$$x_1 = x\left(1 - \frac{ax + by}{x^2 + y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{ax + by}{x^2 + x^2}\right)$$

the author shows that plane convergent translations are lie groups with two parameters, and those from space are Lie groups with thre parameters. The author also finds the shape of invariant functions of these groups.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

A. Tănăsescu D.C. 515 : 517

Prospective Study of Equiresultant Straight Lines

In this study the author presents a prospective study of equiresultant straight lines, i.e. of the four perpendicular concurrent straight lines which form a special spatial configuration related to some trihedrons.

He studies prospectively the remarkable geometric properties of this special spatial configuration in the general case and in particular cases, both by means of the conventional prospective methods and by the axonometric prospective methods, having in view the fact that an analogous study is difficult to carry out on Monge diagrams.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 621.315.592 : 621.38

И. Дрегхики, М. Петреску, И. Спынулеску-Карнару

Электрические свойства тонких полупроводниковых плёнок Pb Te

Были исследованы некоторые электрические свойства поликристаллических тонкик пленок теллурида свинца толщиной в 150—6000 Å, полученных на стеклянные подложки термическим испарением в вакууме. Устанавливалось влияние условий получения образцов на их электические и структурные свойства.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 543.38 : 544.17 : 661.8 : 661.634 : 546.815

Гр. Теодореску, И. Никулеску, А. Лупу, Ф. Попеску

Кондуктометрическое изучение реакции осаждений иона Pb фосфористой кислотой

В работе излагается кондуктометрическое изучение осаждения ионов свинца фосфитом, используя кондуктометр типа ОК 102.

Ход определений воспроизведён в диаграмме (I—X) абсцисса, представляя собой объём реагента, а ордоната проводимости раствора (I—V) : титрирование иона Pb ионом фосфита, но (VI—X) обратный ход.

Соотношения Pb/PO_3, полученные из диаграммы, были рассчитаны на основе химического анализа, дозируя катион Pb комплексометрически, а анион фосфит — йодометрически.

Таблица 1 представляет соответствующие данные в сопоставительном порядке.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 660 : 631.82 : 541.132 : 633

Т. Ионеску, И. Г. Константинеску

Ионные естественные вещества как сырье для получения минеральных удобрений

Исходя из необходимости получения новых сортов удобрений высшего качества, в исследовании особое внимание уделялось синтезу некоторых азотных и калиевых удобрений. нспользуя при этом в качестве сырья минеральные глины. Удобрения были получены в твердом состоянии, в виде порошков, зерен и в суспензии. Основная характеристика этих удобрений заключалась в том, что отмучивание в почве происходит с трудом. Выделение питательных элементов в усваиваемом виде, происходит с помощью сложного обменного процесса в системе удобрение — почва — растение.

В настоящей работе изложены некоторые результаты, полученные в биологических пробах, подтверждая полезность и эффективность этих удобрений.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 621.315.592 : 621.38

I. Drăghici, M. Petrescu, I. Spinulescu Carnaru

The Electrical Properties of PbFe Thin Films.

Some electrical properties of the 150 — 6000 Å thick PbTe thin films are studied. The samples were obtained by thermal evaporation in vacuum on glass substrates. The influence of the samples ontaining conditions on their electrical and structural properties is estableshed.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 545.38 : 544.17 : 661.8 : 661.634 : 546.815

Gr. Teodorescu, I. Niculescu, A. Lupu, F. Popescu

Conductometric Study of the Pb Ion Precipitation Reaction with Phosphorous Acid

A conductometric study of the Pb ion precipitation with phosphite, using an O.K.-102 type conductometer is exposed in this work.

The development of determinations is rendered in the (I-X) diagrams, the abscis representing the reagent volume and the ordinate the solution conductibility (I-V) : Pb ion titration with phosphite ion and (VI-X) : reverse process.

The Pb/PO_3 ratios resulting from diagrams have been also computed on basis of the chemical analysis, by the complex dosage of the Pb cation dosage and iodometric dosage of the phosphite anion.

Table No. 1 offers the comparison of the respective data.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 66.0 : 631.82 : 541.932 : 633

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

The Ionitic Natural Substances — Raw Materials for Obtaining Some New Assortments of Mineral Fertilizers.

Starting from the necessity of obtaining some new assortments oi fertilizers having superior features, the object of the research aimed at synthetizing some azote and poteassium fertilizers by using mineral clays as raw materials, The fertilizers have been obtained in solid state, powder or granules, and in suspension. The main characteristic of these fertilizers is that they are not easily levigable in the soil. The release of nutritive elements in assimilable form is carried out by a complex process of ionic exchange in the fertilizer — soil plant/sistem.

In the present paper the authors present some results obtained in biologic tests which have confirmed the utilization and efficiency of these fertilizers.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 66.066.6 : 665.521.4 : 661.183

Г. Ионицэ, Д. Григореску, С. Дима

Деэмульгация дизельного топлива с помощью ионообменников

В работе изложен новый метод деэмульгации дизельного топлива с помощью ионообменных сильных кислот румынского производства. Процесс ионообмена происходит благодаря гидрофильным группам и ионам кальция, находящихся в катионите, которые последний отдает эмульсии, улавливая из нее ионы натрия.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 539.3/4 : 621 - 22 : 66.046.37/38

И. Минкэ

К вычислению напряжений в цилиндрах с толстыми стенками, неравномерно нагретыми

Представляется простой метод для расчета напряжений в цилиндрах с толстыми стенками, неравномерно нагретыми, принимая во внимание также изменение модуля упругости, коэффициента поперечного сжатия и коеффициента термического расширения по толщине стены в зависимости от температуры.

Метод основывается на использовании соотношении рекурентности, результируя из системы линейных уравнений с матрицами Якоби, решение которых является весьма простым.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 621 - 42 : 621.833 : 621-233:621-58 : 627.13 : 532.5

Г. Зидару

Решетка тонких и слабо изогнутых профилей, обтекаемая потенциальным потоком

Работа представляет собой обобщение метода Бирнбаума-Глауерта к линейной решетке с осью, направленной вдоль корд профилей.

Вычисляются: циркуляция, подъемная сила и момент давлений на профиле в решетке.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom XXXI Nr. 2/1969

D.C. 66.066.6 : 665.521.4 : 661.183

Gh. Ioniță, D. Grigorescu, St. Dima

Disemulsification of Gas-oil by Means of Ion Exchangers.

The work represents a new method for disemulsi ficating the gas-oil on basis of strongly acid ion exchangers of a Romanian make. The ion exchange process is carried out due to the hydrophilic groups and calcium ions contained by the cationite and released in the emulsion, thus collecting from it the sodium ions.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 539.3/.4 : 621-22 : 66.046.38/.38

I. Mincă

Contributions to the Calculation of the Stresses in Non — uniformly Heated Thick Walled Cylinders.

A simple method is presented for calculating the stresses in non-uniformly heated thick walled cylinders, taking into account the variation of the elastic modulus, the Poisson's ratio and of the coefficient of thermal expansion through the wall thickness, as function of temperature.

The method relies on the use of a recurrence relation resulting in a system of linear equations with a Jacobi — type matrix the resolution of which is very simple.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 621-42 : 621.833 : 621.233 : 621-53 : 627.13 : 532.5

Gh. Zidaru

The Linear Lattice of Thin Profiles with Small Curvature in the Potential Motion.

The work represents an extension of the Birnbaum — Clauert method to a linear lattice having the front, parallel to the chord of the profiles. The circulation, the lifting force, and the moment on the profile are calculated.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 621.432.4:621-22:621-232:621-9

Г. Бэрэнеску

Некоторые вопросы относительно уравновешивания внешнего момента терминов первого порядка у двухтактного двигателя с линейным расположением цилиндров, с четным числом цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями

Анализируются возможности уравновешивания внешнего момента терминов первого порядка сил инерции масс, движущихся поступательно у двухтактного двигателя с линейным расположением цилиндров, с четным числом цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями.

Рассматриваются варианты организации векторов и встречное включение кривошипа.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 621.18:621.165:662.9:662.76

М. Постелническу

О минимальной температуре уходящих газов котлов

Верхний предел коэффициента полезного действия котла обусловлен, в основном, температурой, до которой могут быть охлаждены уходящие газы при выводе из агрегата.

В работе устанавливается минимальная температура уходящих газов котлов и затем дается широкий анализ способа, при помощи которого различные факторы обусловливают эту температуру, получая, таким образом, ряд выводов относительно конструкции котлов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Д. К. 621.385:621.314.7:537.213:621.3.014

К. Булучя, С. Червень

Непостоянство квазиуровней-ферми в переходной области обратно смещенного $p^+ — n$ перехода и его влияние в расчете емкости переходной области

Анализируется пространственное изменение квазиуровней-Ферми в несиметричном, крутом, обратно смещенном $p^+ — n$ переходе исследуя приближенный метод, использованный в литературе для симметрйчных переходов:

Получаемые в этом анализе, выводы были использованы для проверки действительности приближения квазиуравновесия в расчете емкости. Показывается, что соотношения квазиуравновесия могут быть использованы для оценки емкости переходной области, независимо от величины обратного напряжения, если время жизни неосновных носителей больше данных специфичных величин. Эти величины неограничиваются для обычных приборов. Даются ясные критерии для определения выше указанных величин.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 621.432.4 : 621 22 : 621-232 : 621-9

G. Bărănescu

Some Problems Concerning the Equilibration of the External Moment of First Order Terms on the in Line Two-Stroke Engine, Having an Even Number of Cylinders and Uniformly Distributed Ignitions.

The author analyses the possibility of equilibrating the external moment of the inertia forces first order terms of masses with translation motion on the in line two stroke engine, with even number of cylinders and uniformly distributed ignition He studies the organization variants of the moment vectors and the coupling of handles in opposition.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 621.18 : 621.165 : 662.9 : 662.76.

M. Postelnicescu

On the Minimum Exhaust Temperature of the Boiler Flue Gases.

The upper limit of a boiler output is mainly conditioned by the temperature up to which the flue gases exhausted from the unit may be cooled.

The author determines in this paper the minimum exhaust temperature of flue gases from boilers, after which he makes a multilateral analysis of the way in which the various factors condition this temperature, thus deducing a series of conclusions concerning the boiler construction.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.C. 621.385.621.314.7 : 537.213 : 621.3.014

C. Bulucea, S. Cserveny

The Non-constancy of the Quasi-Fermi Potentials Across the Transition Region of a Reverse Biased p -n Junction and its Implications in Transition Region Capacitance Calculation.

The spatial variation of the quasi-Fermi potentials in asymmetrical step p -n junctions under reverse bias conditions is analysed following an approximate procedure already described in the literature for the symmetrical junctions.

The results obtained in this analysis are used to check the validity of the quasi-equilibrium approximation in capacitance calculations. It is pointed out that the quasi-equilibrium relations may be used to calculate the transition region capacitance, regardless of the magnitude of the reverse voltage, if the minority carrier lifetimes are larger than some specific values. These values are not restrictive in the normally encountered devices. Explicit criteria for determining the above mentioned values are given.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Résume

Har. P. Ionescu C.D. 517.9

Sur quelques équations différentielles

Ce travail contient l'intégration de quelques équations différentielles, pour lesquelles, la fonction inconnue et ses derivées sont éxprimées comme fonctions d'une variable réelle x ou d'un argument fonctionnel

$$X = T(x)\,\frac{ax+b}{cx-a}.$$

L'argument fonctionnel $T(x)$ représente une transformation involutive des points de l'axe réel.

Les équations étudiées sont de la forme :

$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + Af(x) \;; \qquad f^{(m)}(X) + Af(x) = 0$$

pour m = 1, 2, 3, 4, 5.

On donne aussi quelques observations sur des équations de la forme :

$$f'(X) + B(X) + Af(x) = 0$$

où A,B sont des constantes données.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D. Filipescu C.D. 517 : 535

Certaines transformations géométriques dans l'optique S.I.

En utilisant les translations convergentes définies par la transformation :

$$x_1 = x\left(1 - \frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{ax+by}{x^2+x^2}\right)$$

l'auteur montre que les translations convergentes planes sont des groupes Lie à deux paramètres et celles de l'espace sont des groupes Lie à trois paramètres et celles de l'espace sont des groupes Lie à trois paramètres. L'auteur trouve aussi la forme des fonctions invariantes de ces groupes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

A. Tănăsescu C.D. 515 : 517

Etude perspective des droites équirésultantes.

L'auteur présente dans cet ouvrage une étude perspective des droites équirésultantes, c'est-à-dire des quatre droites perpendiculaires concurrantes qui forment une configuration spatiale en relation avec un trièdre quelconque.

L'auteur étudie perspectivement les propriétés géometriques remarquables de ces configurations spatiales spéciales dans le cas général et dans les cas particuliers, tant par les méthodes de la perspective classique, que par les méthodes de la perspective axonométrique, étant donné qu'une étude analogue sur épures Monge est difficile à réaliser.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

Zusammenfassung

Har. P. Ionescu D.K. 517.9

Über einige Differentialgleichungen.

Diese Arbeit enthält die Integrierung einiger Differentialgleichungen, für die, die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen als Funktion durch eine reele Variable x oder ein Funktionalargument

$$X = T(x)\frac{ax+b}{cx-a}.$$

ausgedrückt werden.

Das Funktionalargument $T(x)$ stellt eine involutive Transformation der Punkte der wirklichen Achse dar.

Die studierten Gleichungen haben folgende Form:

$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + Af(x) \quad ; \qquad f^{(m)}(X) + Af(x) = 0$$

für $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Gleichzeitig werden auch einige Beobachtungen über die Gleichungen in der Form

$$f'(X) + B(X) + Af(x) = 0$$

wiedergegeben, wobei A, B gegebene Konstanten sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D. Filipescu D.K. 517 : 535

Einige geometrische Transformationen in der Optik S I

Indem der Verfasser die konvergenten Parallelverschiebungen verwendet, die durch die Transformation:

$$x_1 = x\left(1 - \frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{ax+by}{x^2+x^2}\right)$$

bestimmt werden zeigt er, dass die ebenen konvergenten Parallelverschiebungen Lie-Gruppen mit zwei Parametern. und die aus dem Raum Lie-Gruppen mit drei Parametern sind. Der Verfasser findet auch die Form der unveränderten Funktionen dieser Gruppen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

A. Tănăsescu D.K. 515 : 517

Perspektivstudium der äquiresultanten Geraden.

Die vorliegende Arbeit stellt ein Perspektivstudium der äquiresultanten Geraden, d.h. die vier besonderen konkurrenten Geraden, die eine spezielle räumliche Gestalt in Verbindung mit irgendeinem Dreikant bilden, vor.

Es werden perspektivisch die geometrischen bemerkenswerte Eigenschaften dieser räumlichen Gestalt für den allegemeinen Fall und für die besonderen Fälle sowohl durch die Methoden der klassischen Perspektive, als auch durch die Methoden der axonometrischen Perspektive studiert, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass ein ähnliches Studium auf Mongerisse schwer zu erzielen ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 621.316.592 : 621.38

I. Drăghici, M. Petrescu, I. Spînulescu Carnaru

Les propriétés électriques des couches minces de PbTe.

Dans cet article son étudiée certaines propriétés électriques des couches minces de TePb ayant des épaisseurs entre 150-6000 Å.

Les preuves ont été obtenues sur un substrat de verre par l'évaporation sous vide. On établit l'influence des conditions d'obtention des preuves sur leurs propriétés électriques et structurales.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 545.38 : 544.17 : 661.8 : 661.634 : 546.815

Gr. Teodorescu, I. Niculescu, A. M. Lupu, F. Popescu

Étude conductométrique de la réaction de précipitation de l'ion Pb avec l'acide phosphoreux.

On expose dans le travail une étude conductométrique de la précipitation des ions de Pb avec phosphite, en utilisant un conductomètre de type O.K. 102.

Le cours des déterminations est représenté dans les diagrammes (I-X), l'abcisse représentant le volume de réactif, et l'ordonée la conductibilité de la solution (I-V) : le titrage de l'ion de Pb avec l'ion phospite, et (VI X) la marche inverse.

Les rapports Pb/PO_3 qui résultent du diagramme ont été calculés aussi à partir de l'analyse chimique et dosant le cation Pb complexonométriquement, et l'anion phosphite iodométriquement.

Le tableau No. 1 offre comparativement les données respectives.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 66.0: 631.82 : 541.132 : 633

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Les substances ionitiques naturelles — matières premières pour l'obtention de nouveaux assortiments d'engrais minéraux.

A partir de la nécessité d'obtenir de nouveaux assortiments d'engrais à caractéristiques supérieures, l'objet des études s'est axé sur la synthèse de certains engrais à base d'azote et de potassium, en utilisant comme matières premières les argiles minérales. Les engrais ont été obtenus à l état solide, en poudre ou granules, et en suspension. La caractéristique principale de ces engrais consiste en ce qu'ils ne sont pas facilement lévigables dans le sol. Le mise en liberté, sous forme assimilable, des éléments nutritifs se fait par un processus complexe d'échange ionique dans le système engrais — sol — plante.

Dans cet ouvrage les auteurs présentent quelques résultats obtenus dans les essais biologiques qui ont confirmé l'utilisation et l'efficacité de ces engrais.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 621.315.592 : 621.38

I. Drăghici, M. Petrescu, I. Spînulescu Carnaru

Die elektrische Eigenschaften der PbTe dünnen Filmen.

In dieser Arbeit studiert man verschiedene elektrische Eigenschaften der Pb Te Dünnschichten mit Decken zwischen 150-6000 A.

Die Mustern wurden auf Glaunterlage durch Aufdampftechnik in Vacuum erhalten. Man hat den Einfluss der Erzeugungsbedingungen über die elektrische und strukturale Eigenschaften der Dünnschichten festgesetzt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 545.38 : 544.17 : 661.8 : 661.634 : 546.815

Gr. Teodorescu, I. Niculescu, A. M. Lupu, F. Popescu

Konduktometrisches Studium der Niederschlagreaktion des Pb Ions mit Phosphorsäure.

In der Arbeit wird ein konduktometrisches Studium des Blei-Ionen-Niederschlags mit Phosphit, unter Benützung eines Konduktometers Tyo O.K. 102 angeführt.

Der Verlauf der Bestimmungen ist im Diagramm (I-X) wiedergegeben, wobei die Abszisse das reaktive Volumen und die Ordinate die Leitfähigkeit der Lösung (I-V) die Titrierung des Pb Ions mit Phosphit Ion und VI-X den Rückgang darstellt.

Die Verhältnisse Pb/PO_3, die sich aus dem Diagramm ergeben, wurden auch auf Grund der chemischen Analyse berechnet, wobei der Kation Pb komplexometrisch und der Anion Phosphit idiometrisch dosiert wurde.

In Tabelle No. 1 werden die ensprechenden Daten vergleichend angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 66.0: 631.82 : 541.132 : 633

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Natürliche ionitische Stoffe — Rohstoffe zur Erzielung neuer Sorten Mineraldünger.

Ausgehend von der Notwendigkeit der Erzielung neuer Düngersorten mit hohen Charakteristiken, wurde als Gegenstand der Studien die Synthetisierung der stickstoffhaltigen und Kalidüngemittel gewählt. Zu diesem Zweck wurde Mineralton als Rohstoff verwendet. Die Düngstoffe wurden in festem, pulverförmigen oder körnigen Zustand, oder in Suspension erhalten.

Die Haupteingenschaft dieser Düngemittel ist, dass sie sich leicht in die Erde einschwämmen. Das Freilassen in asymmilierbarer Form der Nährelemente wird durch einen komplexen ionischen Wechselvorgang im Düngemittel-Boden-Pflanze-System durchgeführt.

In vorliegender Arbeit werden einige, durch biologische Proben erzielten Ergebnisse wiedergegeben, mit deren Hilfe die Benützung und der Wirkungsgrad dieser Düngemittel bestätigt wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 539.3/.4 : 621-22 : 66.046.37/.38

Gh. Ioniță, D. Grigorescu, St. Dima

Désémulsification du gas-oil au moyen des échangeurs d'ions.

Le travail représente une nouvelle méthode pour la désémulsification du gas-oil en se basant sur des échangeurs d'ions puissamment acides, de fabrication roumaine. Le processus d'échange d'ions s'effectue grâce aux groupes hydrophiles et aux ions de calcium que l'echangeur de cations contient et qu'il cède à l'émulsion, tout en captant ses ions de sodium.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 539.3/.4 : 621-22 : 66.046.37/.35

I. Mincă

Contributions au calcul des efforts unitaires en cylindres à parois épaisses non-uniformément chauffées.

On présente une méthode simple pour le calcul des efforts unitaires en cylindres à parois épaisses non-uniformément chauffées, tenant compte aussi de la variation du module d'élasticité, du coefficient de contraction transversale et du coefficient de dilatation thermique linéaire sur l'épaisseur de la paroi, en fonction de la température.

La méthode a à la base l'utilisation d'une relation de récurrence en résultant un système d'équations linéaires à matrices Jacobi, dont la résolution est très simple.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 621-42 : 621.833 : 621.233 : 621-58 : 627.13 : 532.5

Gh. Zidaru

Réseau linéaire de profils minces et avec petite courvature en mouvement potentiel.

L'ouvrage représente une extension de la méthode Birnbaum-Glauert à un réseau linéaire à direction parallèle aux cordes des profils. On calcule : la circulation, la portance et le moment des préssions sur le profil.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 66.066.6 : 665.521.4 : 661.183

Gh. Ionită, D. Grigorescu, St. Dima

Entemulsionierung des Gasöls mit Hilfe der Ionenaustauscher.

Die Arbeit stellt eine neue Methode vor zur Entemulsionierung des Gasöls mittels stark saueren Ionenaustauschern, rumänischen Ursprungs. Der Ionenaustauschvorgang wird zufolge der hydrophilen Gruppen und der Kalziumionen durchgeführt, die der Kationenaustauscher enthalten und an die Emulsion abgibt indem er aus dieser Natriumionen einfängt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 539.3/4 : 621-22 : 66.046.37/.38

I. Mincă

Beitrag zu der Berechnung der Spannungen in dickwandigen, ungleichmässig erwärmten Zylindern.

Es wird eine einfache Methode der Berechnung der Spannungen in Zylindern mit dicken, ungleichmässig erwärmten Wänden angegeben, wobei die Veränderung des Elastizitätsmoduls der Querschwindungszahl und der linearen Wärmeausdehnungszahl über die Wandstärke in Abhängigkeit der Temperatur berücksichtigt wird.

Der vorgeschlagenen Methode liegt die Benützung einer Rekurrenz-beziehung zugrunde, woraus sich ein lineares Gleichungssystem mit Jacobi-Matrix ergibt, dessen Lösung sehr einfach ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 621-42 : 621.833 : 621.233 : 621-58 : 627.13 : 532.5

Gh. Zidaru

Ebenes Gitter aus den dünnen und schwach gewölbten Profilen in der Potentialströmung.

Die Arbeit stellt eine Erweiterung der Birnbaum - Glauertschen Methode an ein ebenes Gitter mit der parallelen Achse an den Sehnen der Profile dar. Man bestimmt : die Zirkulation, den Auftrieb und das Moment der Drücken auf dem Gitterprofil.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 621.432.4 : 621-22 : 621-232 : 621-9

G. Bărănescu

Certains problèmes concernant l'équilibrage du moment extérieur des termes du premier ordre pour le moteur en ligne à deux temps, nombre pair de cylindres et allumages uniformément répartis.

L'auteur analyse les possibilités d'équilibrage du moment extérieur des termes de premier ordre des forces d'inertie des masses en mouvement de translation pour le moteur en ligne à deux temps, nombre pair de cylindres et allumages uniformément répartis. Il étudie les variantes d'organisation des vecteurs moment et le couplage des manivelles en opposition.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 621.18 : 621.165 : 662.9 : 662.76

M. Postelnicescu

Sur la température minima d'évacuation des gaz de combustion des chaudières.

La limite supérieure du rendement d'une chaudière est conditionnée surtout par la température jusqu'à laquelle les gaz de combustion peuvent être refroidis lors de évacuation de l'agrégat.

Dans l'ouvrage, l'auteur établit la température minima d'évacuation des gaz de combustion des chaudières, et il fait ensuite une analyse multilatérale de la manière dont les divers facteurs conditionnent cette température, en déduisant ainsi toute une série de conclusions concernant la construction des chaudières.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

C.D. 621.385 : 621.314.7 : 537.213 : 621.3.014

C. Bulucea, S. Cserveny

La non-constance des potentiels quasi-Fermi le long de la région de transition d'une jonction p^+-n inversement polarisée et ses implications dans le calcul de la capacité de la région de transition.

Les auteurs analysent la variation spatiale des potentiels quasi-Fermi dans des jonctions p^+-n asymétriques abruptes, inversement polarisées suivant un procédé approximatif décrit dans la littérature pour les jonctions symétriques.

Les résultats obtenus par cette analyse sont utilisés pour vérifier la valabilité de l'approximation de quasiéquilibre dans le calcul de la capacité. Les auteurs montrent que les relations de quasi-équilibre peuvent être utilisées pour calculer la capacité de la région de transition, sans tenir compte de la grandeur de la tension inverse, si les temps de vie des porteurs minoritaires sont plus grands que certaines valeurs spécifiques. Ces valeurs ne sont pas restrictives dans les dispositifs rencontrés habituellement. Les auteurs donnent des criteriums explicites pour la détermination des valeurs mentionnées plus haut.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 621.432.4 : 621-22 : 621-232 : 621-9

G. Bărănescu

Einige Aufgaben betreffend den Ausgleich des Aussenmoments der Glieder ersten Grades bei dem zweitakt Reihenmotor mit geradzahligen Zylindern und gleichmässig verteilter Zündung.

Es werden die Ausgleichmöglichkeiten des Aussenmoments der Glieder erster Ordnung der Trägheitskräfte der Massen mit fortschreitender Bewegung bei dem zweitakt Reihenmotor mit gradzahligen Zylindern und gleichmässig verteilter Zündung analysiert. Es werden die Varianten zur Organisierung der Moment — und Kupplung-Vektoren der gegengesetzten Kurbeln untersucht.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 621.18 : 621.165 : 662.9 : 662.76

M. Postelnicescu

Uber die minimale Kesselabgastemperatur.

Die obere Grenze des Kesselwirkungsgrades ist hauptsächlich durch die niedrigst mögliche Temperatur der Rauchgase bedingt.

Es wird diese minimale Temperatur der Rauchgase bestimmt und eine Untersuchung der Einflüsse der verschidenen Faktoren über die Rauchgastemperatur durchgeführt.

Es entsteht eine Reihe von Schlussfolgerungen betreffend den Kesselbau.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

D.K. 621.385 : 621.314.7 : 537.213 : 621.3.014

C. Bulucea, S. Cserveny

Die Unbeständigkeit der Quasi-Fermi-Potentiale längs des Übergangsgebiet eines gesperrten p -n-Übergangs und ihre Folgen bei der Berechnung der Ubergangsgebiet-Kapazität.

Einem im Schrifttum für symmetrische Übergänge beschriebenen Verfahren folgend, wird die räumliche Verteilung Quasi-Fermi-Potentiale in gesperrten steilen asymmetrischen p -n-Übergängen untersucht.

Die durch diese Untersuchung erzielten Ergebnisse werden zur Gültigkeitsprüfung der Quasi-Gleichgewichtsannäherung bei der Kapazitätsberechnung benützt. Es wird gezeigt, dass die Quasi-Gleichgewichtsbeziehungen unabhängig vom Wert der Sperrspannung zur Berechnung der Übergangsgebiet-Kapazität verwendet werden können, falls die Lebensdauer der Minoritätsträger einen gewissen gegebenen Wert überschreitet.

Diese Werte sind für allgemein verwendete Bauelemente nicht einschränkend. Es werden ausführliche Kriterien zur Bestimmung dieser Werte angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI Nr. 2/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 2

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.9

ASUPRA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE*

HARALAMBIE P. IONESCU

1. În unele probleme de transformări de cîmpuri din domeniul radio sau al hidrodinamicei, ca și în cadrul unor probleme de transmitere, transpunerea pe forma matematică a fenomenului conduce la construirea unor ecuații diferențiale de forme speciale sau cazuri particulare ale unor ecuații funcționale.

Astfel o mulțime de asemenea ecuații diferențiale pot fi cu ușurință cuprinse drept cazuri particulare ale unor ecuații diferențiale în care funcția necunoscută și derivatele acesteia sînt, unele, funcții de argumentul x, iar altele funcții de un argument funcțional $T(x)$, definit pentru punctele unei mulțimi E. Deci fiecărui punct $x \in E_1$ va corespunde unui punct $X \in E$, așa încît $X = T(x)$. Evident că atunci cînd argumentul funcțional $T(x)$ va face să corespundă unui acelaș $x \in E_1$ mai multe puncte $X \in E$, vom impune atari condiții sau vom preciza care anume punct să fie reținut drept corespunzător. Mulțimile E_1 și E sînt submulțimi ale lui R.

Considerînd, că va fi util, ne propunem în cele următoare studierea cîtorva ecuații diferențiale, de asemenea gen.

Pentru ecuațiile ce vom considera, argumentul funcțional va fi definit de:

$$T(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = X\,; \quad ad - bc \neq 0\,. \tag{1}$$

unde a, b, c, d sînt constante reale date, iar x variabila reală. Vom considera, mai mult, că relația (1) definește o transformare involutivă, așa că va trebui să avem simultan:

$$cxX + dX - ax - b = 0\,, \quad cXx + dx - aX - b = 0$$

cu $c \neq 0$. Aceste condiții implică însă $d = -a$, $bc + a^2 \neq 0$ și atunci (1) devine

$$\frac{ax + b}{cx - a} = X \Leftrightarrow x = \frac{aX + b}{cX - a}\,; \quad cx - a \neq 0\,. \tag{2}$$

* Manuscris predat la erdacție la 5 noiembrie 1968.

Dacă vom nota ca mai sus pe (2) prin

$$T(x)=X=T_1(x)\ ;\quad T(X)=T(T_1(x))=T_2(x);\ldots..$$

atunci vom putea scrie :

$$T_n(x)=\begin{cases} x & \text{, pentru oricare } n \text{ par} \\ X & \text{, pentru oricare } n \text{ impar} \end{cases} \tag{3}$$

Asemenea precizări ne vor fi utile pe parcurs și de la caz la caz.

Funcția $T(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}=X$, care constitue operatorul funcțional, este definită pentru $x\in R-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$; $c\neq 0$, ca și inversa sa $T^{-1}(x)$, și transformă punctele lui R tot în puncte ale lui R, iar pentru punctele de la infinit ale axei avem $X=\dfrac{a}{c}$ așa că vom considera și invers.

Punctele fixe ale transformatei (2) sînt date de

$$\frac{ax+b}{cx-a}=x\Leftrightarrow cx^2-2ax+b=0\Rightarrow x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+bc}}{c}$$

și care trebuie să aparțină tot lui R.

Așa fiind vom distinge :

1° — Dacă $a^2+bc<0$, atunci $a\pm\sqrt{a^2+bc}$ fiind complexe, transformarea (2) nu are puncte fixe.

2° — Dacă $a^2+bc=0\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{-a}\Rightarrow T(x)\equiv\dfrac{a}{c}$,

deci nu are sens, dealtfel mai sus s-a impus $a^2+bc\neq 0$

3° — Dacă $a^2+bc>0$, atunci există două puncte fixe ale transformării situate simetric față de punctul $x=\dfrac{a}{c}$.

2. — Considerăm că un prim caz o ecuație diferențială de forma :

$$f'\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Af(x)=0, \tag{4}$$

avînd îndeplinite condițiile din § 1 și A = constant.

Derivînd ecuația (4) obținem :

$$\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2}f''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-Af'(x)=0.$$

Aplicînd acestei ecuații transformarea (2) obținem ecuația :

$$(cX-a)^2\cdot f''(X)-A(a^2+bc)f'\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right)=0$$

sau

$$(cX-a)^2 f''(X)+A^2(a^2+bc)f(X)=0 \tag{5}$$

ecuație de formă cunoscută, care pentru mai multă ușurință cu schimbarea de variabilă $cX-a=t$ și cu notația $f(x)=Y$ devine:

$$t^2\frac{d^2Y}{dt^2}+A^2\frac{a^2+bc}{c^2}Y=0;\quad c\neq 0 \tag{5'}$$

adică o ecuație diferențială de tip Euler, omogenă și de ordinul al doilea. Ecuația caracteristică a lui (5') este

$$r(r-1)+A^2\frac{a^2+bc}{c^2}=0 \tag{6}$$

și are rădăcinile:

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4A^2\frac{a^2+bc}{c^2}}=\frac{1}{2}\pm p. \tag{7}$$

Atît pentru cazul rădăcinilor reale cît și pentru cazul celor complexe ale ecuației (6) vom folosi tot forma exponențială a soluțiilor particulare, pentru scrierea soluției generale a ecuației (5) sau (4). Vom proceda astfel pentru evitarea unor calcule laborioase inutile. Vom scrie separat soluția generală numai pentru cazul cînd ecuația caracteristică are rădăcini confundate.

1° — Dacă $c^2-4A^2(a^2+bc)\neq 0\Rightarrow p\neq 0$ avem ca soluție generală pentru ecuația diferențială (5):

$$f(X)=k_1(cX-a)^{\frac{1}{2}+p}+k_2(cX-a)^{\frac{1}{2}-p} \tag{8}$$

care nu verifică ecuația diferențială (4) pentru oricare k_1 și k_2.

Impunînd atunci condiția ca (8) să verifice pe (4) avem:

$$k_1\left(\frac{1}{2}+p\right)c\,(cX-a)^{p-\frac{1}{2}}+k_2\left(\frac{1}{2}-p\right)c\,(cX-a)^{-p-\frac{1}{2}}+$$

$$Ak_1\frac{(a^2+bc)^{\frac{1}{2}+p}}{(cX-a)^{\frac{1}{2}+p}}+Ak_2\frac{(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}{(cX-a)^{\frac{1}{2}-p}}\equiv 0$$

sau:

$$\left[k_1\left(\frac{1}{2}+p\right)c+A\,k_2(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}\right](cX-a)^p+$$

$$+\left[k_2\left(\frac{1}{2}-p\right)c+A\,k_1(a^2+bc)^{\frac{1}{2}+p}\right](cX-a)^{-p}\equiv 0,$$

condiție din care rezultă pentru k_1 două valori egale :

$$k_1 = -k_2 \frac{A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}{c\left(\frac{1}{2}+p\right)} = -k_2 \frac{\left(\frac{1}{2}-p\right)c}{A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}+p}}$$

după cum ușor se poate verifica.
Așa fiind putem scrie :

$$f(X) = k_1(cX-a)^{\frac{1}{2}+p} - k_1 \frac{c\left(\frac{1}{2}+p\right)}{A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}(cX-a)^{\frac{1}{2}-p} \tag{9}$$

sau

$$f(X) = k(cX-a)^{\frac{1}{2}-p} - k\frac{A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}{c\left(\frac{1}{2}+p\right)}(cX-a)^{\frac{1}{2}+p} \tag{10}$$

ca soluție generală a ecuației diferențiale (4) cu transformarea imediată.

Evident $p \neq \pm \frac{1}{2}$, căci altfel din (7) ar rezulta sau $A=0$, sau $a^2+bc=0$ ceea ce am eliminat.

2° — Dacă $c^2 - 4A^2(a^2+bc) = 0 \Rightarrow p = 0$, deci ecuația(6) are rădăcini confundate, avem și $bc+a^2 = \frac{c^2}{4A^2} > 0$; $A \neq 0$ și atunci soluția generală a ecuației diferențiale (5) este :

$$f(X) = k_1(cX-a)^{\frac{1}{2}} + k_2(cX-a)^{\frac{1}{2}} ln(cX-a) \tag{10'}$$

Scriind condiția de a verifica pe (4) obținem :

$$k_1 = -\frac{2c+2A(a^2+bc)^{1/2} \cdot ln(a^2+bc)}{c+2A(a^2+bc)^{1/2}} k_2$$

deoarece coeficientul lui $ln\,[cX-a]$ este evident nul, el fiind $k_2(c-A(a^2+bc)^{1/2})$.

În aceste condiții soluția generală a lui (4) devine :

$$f(X) = k(cX-a)^{1/2} ln(cX-a) - k\frac{2c+2A(a^2+bc)^{1/2} ln(a^2+bc)}{c+2A(a^2+bc)^{1/2}}(cX-a)^{1/2} \tag{11}$$

3° — *Observație.* Pentru a transforma ecuația diferențială considerată în (5) am folosit derivarea, deci am presupus că $f'(u)$ este derivabilă, dacă $u(x)$ este derivabilă, cel puțin pentru $x \in E \subset R$.

Evident că $f(u)$ este derivabilă, căci este condiția implicată de soluția existentă a ecuației date ca o ecuație diferențială de primul ordin. Funcția $X = \dfrac{ax+b}{cx-c} = u(x)$ este derivabilă pentru oricare $x \neq \dfrac{a}{c}$.

Dacă funcția $f(u)$ ca soluție a ecuației diferențiale (4) este definită și derivabilă pentru $xE \in \subset R$, atunci ea este derivabilă de orice ordin pentru $x \in E$ cel puțin, este deci de clasa C^∞, pentru $x \in E \subset R$.

Fie $\dfrac{a}{c} \notin E$ și deci $x_0 \in E \Rightarrow x_0 \neq \dfrac{a}{c}$ atunci folosind și pe (4) putem scrie

$$f'(X) - f'(X_0) + A\,[f(x) - f(x_0)] = 0$$

și deci

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ x \to x_0}} \frac{f'(X) - f'(X_0)}{X - X_0} \lim_{x \to x_0} \frac{X - X_0}{x - x_0} = -A \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{și } X \neq \frac{a}{c},$$

sau

$$\frac{a^2 + bc}{(cx_0 - a)^2} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x}} \frac{f'(X) - f'(X_0)}{X - X_0} = -A f'(x_0) \Rightarrow \text{existența lui}$$

$f''(X)$ pentru $x \in E$. În mod analog putem continua. Dar să considerăm un alt exemplu.

Dacă pentru ecuația diferențială liniară

$$a_2 f''(u) + a_1 f'(v) + a_0 f(x) = g(x)$$

coeficienții $a_2(x), a_1(x), a_0(x), g(x)$ și $u(x), v(x)$ sînt funcții definite și derivabile de ordinul p, cel puțin pentru $x \in E_1 \subset R$, atunci $f(x)$, soluția ecuației date, pentru $x \in E_2$ este derivabilă de ordinul $(p+2)$ cel puțin pentru $x \in E_1 \cap E_2 \subset R$.
Dacă $x_0 \in E_1 \cap E_2$ avem

$$[a_2(x) f''(u) - a_2(x_0) f''(u_0)] + [a_1(x) f'(v) - a_1(x_0) f'(v_0)] +$$
$$+ [a_0(x) f(x) - a_0(x_0) f(x_0)] = g(x) - g(x_0)$$

sau

$$\lim_{x\to x_0} a_2(x) \lim_{\substack{u\to u_0\\(x\to x_0)}} \frac{f''(u)-f''(u_0)}{u-u_0}\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+$$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{a_2(x)-a_2(x_0)}{x-x_0}f''(u_0)$$

$$+\lim_{(x\to x_0)} a_1(x)\lim_{\substack{v\to v_0\\(x\to x_0)}}\frac{f'(v)-f'(v_0)}{v-v_0}\lim_{x\to x_0}\frac{v-v_0}{x-x_0}+$$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{a_1(x)-a_1(x_0)}{x-x_0}f'(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{a_0(x)-a_0(x)}{x-x_0}f(x)+$$

$$+\lim_{x\to x_0} a_0(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

relație care implică existența lui $\lim\limits_{\substack{u\to u_0\\(x\to x_0)}}\dfrac{f''(u)-f''(u)}{u-u_0}=f''(u_0)$, căci celelalte limite există.

Cum acestea ne dau dreptul să derivăm ecuația considerată o vom folosi în continuare pe aceasta și vom obține existența lui $f^{(IV)}_{(u)}$ și așa mai departe pînă apar derivatele de ordinul p ale funcțiilor a_2, a_1, a_0, g, u, v.

3. — Considerăm ca un al doilea caz ecuația diferențială de forma :

$$f''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Af(x)=0 \tag{12}$$

Impunînd aceleași condiții din §1 și dacă derivăm succesiv de două ori (§ 2, 3°) avem :

$$\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2}f'''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-Af'(x)=0 \tag{12'}$$

$$\frac{(a^2+bc)^2}{(cx-a)^4}f^{IV}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+2c\frac{a^2+bc}{(cx-a)^3}f'''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Af''(x)=0 \tag{12''}$$

iar în virtutea lui (2) și (12) obținem :

$$(cX-a)^4 f^{IV}(X)+2c(cX-a)^3 f'''(X)-A^2(a^2+bc)^2 f(X)=0 \tag{13}$$

și care în aceleași condiții ca mai sus : $cX-a=t$; $f(X)=Y$ devine

$$t^4\frac{d^4Y}{dt^4}+2t^3\frac{d^3Y}{dt^3}-A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2 Y=0 \tag{14}$$

Ecuație diferențială Euler omogenă și cu ecuația caracteristică

$$r(r-1)(r-2)(r-3)+2r(r-1)(r-2)-A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2=0 \tag{15}$$

care se mai poate scrie sub forma :

$$r(r-1)^2(r-2)-A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2=0\Leftrightarrow(r-1)^4-(r-1)^2-$$

$$-A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2=0 \tag{15'}$$

cu rădăcinile :

$$r_{1,2}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1+4A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2}}=1\pm p$$

$$r_{3,4}=1\pm\frac{i}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{1+4A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^2}}=1\pm iq\,;\,i=\sqrt{-1}$$

deoarece cantitatea de sub radicalul interior este supraunitară.

Putem acum scrie soluția generală a ecuației (13) sub forma :

$$f(X)=k_1(cX-a)^{1+p}+k_3(cX-a)^{1-p}+k_2(cX-a)^{1+iq}+$$
$$+k_4(cX-a)^{1-iq} \tag{16}$$

Această soluție trebuie să verifice atît pe (12) cît și pe (12'), deci parametrii de integrare k_1, k_2, k_3, k_4 nu pot fi oarecari.

Dacă vom scrie că (16) verifică pe (12) după unele calcule ajungem la

$$[k_1c^2p(p-1)(a^2+bc)^{p-1}+Ak_3]+$$
$$+[Ak_4+c^2k_2(1+iq)iq(a^2+bc)^{-1+iq}](cX-a)^{p-iq}+$$
$$+[Ak_2-c^2k_4(1-iq)iq(a^2+bc)^{-1-iq}](cX-a)^{p+iq}+$$
$$+[Ak_1+c^2k_3p(p-1)(a^2+bc)^{-1-p}](cX-a)^{2p}\equiv 0$$

condiție care implică să existe simultan relațiile :

$$\begin{cases} c^2p(p+1)(a^2+bc)^{p-1}k_1+Ak_3=0 \\ Ak_1-c^2p(1-p)(a^2+bc)^{-1-p}k_3=0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} Ak_2-c^2iq(1-iq)(a^2+bc)^{-1-iq}k_4=0 \\ c^2(1+iq)iq(a^2+bc)^{-1+iq}k_2+Ak_4=0 \end{cases} \tag{18}$$

ceea ce se verifică cu ușurință deoarece scriind determinanții celor două sisteme rezultă imediat că sînt nuli. Așa fiind avem :

$$k_3=-\frac{p(p+1)c^2}{A}(a^2+bc)^{p-1}k_1$$

și

$$k_4=-\frac{q(q-1)c^2}{A}(a^2+bc)^{iq-1}k_2 \tag{19}$$

În aceste condiţiuni soluţia (15) devine :

$$f(X) = k_1 (cX - a)^{1+p} - k_1 \frac{p(p+1)c^2}{A} (a^2 + bc)^{p-1} (cX - a)^{1-p} + \tag{20}$$

$$k_2 (cX - a)^{1+iq} - k_2 \frac{q(1-iq)c^2}{A} (a^2 + bc)^{iq-1} \cdot (cX - a)^{1-iq}$$

Dacă impunem ca (16) să verifice şi pe (12'), sau ca (20) să-l verifice pe (12') ajungem la aceleaşi condiţii din (19), deci (20) reprezintă soluţie generală a lui (12).

Observaţii : 1° — Am presupus $A \neq 0$. Pentru $A = 0$ avem

$$f''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = 0 \Longrightarrow f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = C_1 \frac{ax+b}{cx-a} + C_2 .$$

Adică avem ca soluţie o funcţie liniară de funcţia omografică $\frac{ax+b}{cx-a}$

Acestea arată că ecuaţia (15) nu poate admite rădăcina $r=1$ decît pentru cazul simplu $A=0 \Longrightarrow p=1$ şi $q=0$; deasemeni şi pentru rădăcinile $r=0$ sau $r=2$.

2° — Dacă $A \neq O$ ecuaţia (15) nu admite rădăcini multiple căci şi $a^2+bc \neq 0$.

3° — Forma generală a soluţiei ecuaţiei diferenţiale (12) este deci numai :

$$f(x) = k_1 (cx - a)^{1+p} - k_1 \frac{p(1+p)}{A} \left(\frac{a^2+bc}{cx-a}\right)^{p-1} + \tag{21}$$

$$k_2 (cx - a)^{1+iq} - k_2 \frac{q(q-i)}{A} \left(\frac{cx-a}{a^2+bc}\right)^{1-iq}$$

Sau făcînd calculele corespunzătoare putem scrie soluţia şi sub forma:

$$f(x) = k_1 (cx - a)^{1+p} - k_1 \frac{c^2 p(p+1)}{A} \left(\frac{cx-a}{a^2+bc}\right)^{1-p} +$$

$$+ k_3 (cx - a) \cos(q \ln(x - a)) -$$

$$- k_3 (cx - a) \frac{c^2 q - A(a^2+bc) \sin(q \ln(a^2+bc))}{c^2 q^2 + A(a^2+bc) \cos(q \ln(a^2+bc))} \sin(q \ln(cx - a)) . \tag{21'}$$

4. — Ca o generalizare a ecuațiilor diferențiale (4) și (12) vom considera ecuațiile diferențiale distincte de forma :

$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f^{(m-1)}(x)=0 \tag{22}$$

$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f^{(m-2)}(x)=0 \tag{23}$$

cu $a^2+bc\neq 0$ și $c\neq 0$.

Se vede cu ușurință că integrarea acestor două ecuații diferențiale se reduce tot la integrarea ecuațiilor diferențiale (4) și (12) dacă notăm

$$f^{(n-1)}(u)=F(u) \text{ și } f^{(m-2)}(u)=G(u)$$

respectiv pentru (22) și pentru (23), deoarece avem :

$$F'\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A F(x)=0 \tag{22'}$$

$$a^2+bc\neq 0$$

$$G''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A G(x)=0 \tag{23'}$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații diferențiale sînt determinate respectiv de (10) sau (11) și de (21).

După ce l-am construit pe $F(X)=f^{(m-1)}(X)$, rezultă că soluția generală a lui (22) se obține integrînd de $(m\text{-}1)$ ori soluția (10) sau (11) după caz și apoi adăogăm rezultatului obținut un polinom în X de gradul $(m\text{-}2)$ și cu $(m\text{-}1)$ coeficienți arbitrari $k_1, k_2 \ldots, k_{m-1}$.

Astfel din (9) vom avea :

$$f^{(m-1)}(X)=F(X)=k(cX-a)^{\frac{1}{2}+p}-k\frac{c\left(\frac{1}{2}+p\right)}{A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}(cX-a)^{\frac{1}{2}-p}$$

și integrînd de $(m\text{-}1)$ ori sîntem conduși la :

$$f(X)=k\frac{c^{1-m}(cX-a)^{m+p-\frac{1}{2}}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(p+\frac{2m-1}{2}\right)}-$$

$$-k\frac{c^{2-m}\left(\frac{1}{2}+p\right)(cX-a)^{m-p-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{2}-p\right)\left(\frac{5}{2}-p\right)\cdots\left(\frac{2m-1}{2}-p\right)A(a^2+bc)^{\frac{1}{2}-p}}+ \tag{24}$$

$$+k_0+k_1X+k_2X^2+\cdots+k_{m-2}X^{m-2},$$

deoarece p este diferit de un număr impar pe jumătate negativ sau pozitiv după cum se poate vedea din (7).

Construind acum pe $G(x)$ din (21) și apoi integrînd de $(m\text{-}2)$ ori avem :

$$f(x) = k'_1 \frac{c^{2-m}(cx-a)^{p+m-1}}{(p+2)(p+3)\cdots(p+m-1)} - \\ - k'_1 \frac{p(p+1)c^{4-m}(a^2+bc)^{p-1}}{(2-p)(3-p)\cdots(m-1-p)}(cx-a)^{-p+m-1} + \\ + k'_3 \frac{c^{2-m}(cx-a)^{iq+m-1}}{(2+iq)(3+iq)\cdots\cdots(m-1+iq)} - \\ - k'_3 \frac{q(q-i)c^{4-m}(a^2+bc)^{-1+iq}}{(2-iq)(3-iq),.(m-1-iq)}(cx-a)^{m-1-iq} + \\ + k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots k_{m-3} x^{m-3} \tag{25}$$

după ce am adăogat un polinom de gradul $(m\text{-}3)$ în x și cu coeficienți arbitrari. În această expresie a lui $f(x)$ p este diferit de un număr natural $<m\text{-}1$.

Observații : 1° — Din (15') rezultă că $p>1$ și de asemeni că există o mulțime de posibilități de a alege pe A, a, b, c așa încît p să fie un număr dat.

2° — Dacă pentru determinarea lui $f(x)$ din (22) ne aflăm în cazul lui (11) atunci avem de efectuat integrarea succesivă de $(m\text{-}1)$ ori a unei expresii de forma $(\sqrt{u}\,ln\,u)$ așa de exemplu :

$$I_1 = \int \sqrt{u}\,ln\,u\,du = \left[\frac{2}{3}ln\,u - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] u^{3/2}.$$

Vom nota ultimul rezultat al integrării de efectuat cu I_{m-1}. Avem de integrat succesiv deci expresii de forma $(u^\alpha\,ln\,u)$ și dacă folosim integrarea prin părți obținem pentru integrala în cauză :

$$I_{m-1} = \left[ln(cx-a) - 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2m-1}\right)\right] \cdot \\ \frac{2^{2m-1}\,m!}{(2m)!\,c^{m-1}}(cx-a)^{\frac{2m-1}{2}}.$$

În mod analog acum putem scrie pe $G(x)$.

3° — Dacă pentru construirea lui $G(x)$ cu (10) exponentul p este un număr natural atunci termenul $(cx\text{-}a)^{1-p}$ va introduce la un moment dat pe $ln\,(cx\text{-}a)$ și soluția nu mai este de forma lui (25) decît pentru $p>m$, iar dacă $p<m$ intervine logaritmul.

4° — Se poate spune că în general soluțiile obținute sînt definite dacă $(cx-a)>0$, dar în unele cazuri pot fi situații mai avantajoase.

5° — Atît pentru § 2, § 3 cît și pentru § 4 cum nu avem puncte fixe ale transformării decît dacă $a^2+bc>0$ și cum elementul de bază în construirea funcțiilor soluții este $(cx-a)$ pentru punctul fix avem :

$$(cx'-a)=\sqrt{a^2+bc}>0;$$

deci funcțiile soluții sînt definite în acest punct. O discuție mai amănunțită o formează cazul soluțiilor definite în afara lui $x=\frac{a}{c}$.

5. Forma ecuațiilor din (4) și (12) poate fi extinsă și altfel decît în sensul din (22) și (23). Așa de exemplu mai putem considera și ecuațiile :

$$f'''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f(x)=0 \; ; \qquad f^{IV}\left(\frac{ax-b}{cx-a}\right)+A f(x)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{26}$$
$$f^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f(x)=0$$

precum și pe cele de forma :

$$f^{(m+n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f^{(n)}(x)=0 \tag{27}$$

dar pentru care notînd $f^{(n)}(u)=F(u)$ obținem

$$F^{(m)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A F(u)=0$$

așa încît este suficient a ne opri la cele de forma din (26).

În cele următoare ne vom ocupa numai de primele două ecuații din (26).

a) Fie ecuația diferențială :

$$f'''\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+A f(x)=0 \text{ sau } f'''(X)+A f(x)=0 \tag{28}$$

care în aceleași condițiuni și prin trei derivări succesive urmate de operațiuni asemănătoare ne conduce la

$$(cX-a)^6 f^{(VI)}(X)+6c(cX-a)^5 f^{(V)}(X)+6c^2(cX-a)^4$$
$$f^{(IV)}(X)+A^2(a^2+bc)^3(X)=0 \tag{29}$$

și care prin $cX-a=t$; $f(X)=Y$ ne dă :

$$t^6\frac{d^6Y}{dt^6}+6t^5\frac{d^5Y}{dt^5}+6t^4\frac{d^4Y}{dt^4}+A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^3 Y=0$$

adică o ecuație Euler omogenă și cu o ecuație caracteristică ce poate ușor fi scrisă sub forma :

$$r(r-1)^2(r-2)^2(r-3)+A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)=0 \tag{30}$$

sau sub forma :

$$[(r-1)(r-2)]^3-2[(3-1)(r-2)]^2+A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^3=0 \tag{31}$$

în care notînd $(r-1)(r-2)=W=V+\frac{2}{3}$ obținem :

$$V^3-\frac{4}{3}V+A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^3-\frac{16}{17}=0$$

ale cărei rădăcini se scriu cu formulele lui Cardan și după aceea folosind și

$$r=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+4W}$$

construim cele șase rădăcini ale ecuației (30) și deci cele șase soluții particulare ale ecuației (29) cu care apoi vom scrie soluția generală a lui (29), după ce am impus condițiile necesare pentru a determina relațiile dintre cei șase parametri de integrare.

b) Fie ecuația diferențială :

$$f^{(IV)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Af(x)=0 \quad \text{sau} \quad f^{(IV)}(X)+Af(x)=0 \tag{32}$$

pentru care vom considera aceleași condiții ca mai sus la § 1 și care prin patru derivări succesive ne conduce la ecuația diferențială :

$$\frac{(a^2+bc)^4}{(cx-a)^8}f^{(VIII)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+(6+4+2)c\,\frac{(a^2+bc)^3}{(cx-a)^7}f^{(VII)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+$$

$$+(5.4+5.2+3.2)c^2\frac{(a^2+bc)^2}{(cx-a)^6}f^{(VI)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+4.3.2.c^3\,\frac{(a^2+bc)}{(cx-a)^5}\cdot$$

$$f^{(V)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Af^{(V)}(x)=0$$

sau

$$(cX-a)^8f^{(VIII)}(X)+12c(cX-a)^7f^{(VII)}(X)+36c^2(cX-a)^6f^{(VI)}(X)+$$
$$+24c^3(cX-a)^5f^{(V)}(X)-A^2(a^2+bc)^4f(X)=0 \tag{33}$$

sau

$$t^8\frac{d^8Y}{dt^8}+12t^7\frac{d^7Y}{dt^7}+36t^6\frac{d^6Y}{dt^6}+24t^5\frac{d^5Y}{dt^5}-A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^4Y=0$$

o ecuație diferențială Euler, a cărei ecuație caracteristică în r, dacă notăm $(r—1)\,(r—3) = W$ se scrie sub forma

$$W^4 - 2W^3 - 3W^2 - A^2\left(\frac{a^2+bc}{c^2}\right)^4 = 0 \qquad (34)$$

care rezolvată, împreună cu $r = 2 \pm \sqrt{1+W}$ dă posibilitatea construirii celor opt rădăcini necesare pentru construirea soluției lui (33). În mod analog apoi ca la celelalte cazuri se ajunge la constituirea soluției generale a ecuației (32) care conține numai patru parametri de integrare.

6. — În această parte vom mai menționa unele observații legate de aceste tipuri de ecuații diferențiale.

1° — Dacă în loc de ecuația diferențială (4) am fi considerat în aceleași condiții ecuația :

$$f'\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + A f(x) = g(x) \qquad (35)$$

unde $g(x)$ este o funcțiune dată, definită și integrabilă cel puțin pe un sub interval al axei reale, atunci prin aceeași metodă am fi ajuns la o ecuație diferențială de forma :

$$t^2\frac{d^2Y}{dt^2} + A^2\frac{a^2+bc}{c^2}\,Y = \frac{a^2+bc}{c^2}\,g'\left(\frac{a}{c} + \frac{a^2+bc}{ct}\right)$$

care nu prezintă alte dificultăți față de cele studiate mai sus.

2° — De asemeni ecuațiile diferențiale :

$$f'(x) + A f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = g(x) \qquad (36)$$

$$f''(x) + A f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = g\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) \qquad (37)$$

$$f^{(m)}(x) + A f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = f(x) \qquad (38)$$

nu formează cazuri diferite de cele de mai sus, căci folosind aceeași transformare $X = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ avem :

$$f'\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right) + A f(X) = g_1(X)$$

$$f''\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right) + A f(X) = g(X)$$

$$f^{(m)}\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right) + A f(X) = g_2(X)$$

deci analoage celor studiate pentru $g(x) \equiv 0$.

3° — O altă categorie care corespunde unei mai mari extinderi a ecuației inițiale, o pot forma și următoarele ecuații diferențiale :

$$f'\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+Bf\left(\frac{ax+b}{cx-b}\right)+Af(x)=g(x) \tag{39}$$

$$f'(X)+Bf(X)+Af'(x)=g(x) \tag{40}$$

$$f''(X)+Bf(X)+Af(x)=g(x) \tag{41}$$

$$f''(X)+Bf(X)+Af'(x)=g(x) \tag{42}$$

$$f''(X)+Bf'(X)+Af(x)=g(x) \tag{43}$$

Evident că se mai pot considera și alte extinderi. (A ; B = const.).

4° — Dintre ecuațiile diferențiale de la 3° ne vom ocupa de un exemplu de forma (39) considerînd ecuația.

$$f'\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+f(x)=0 \tag{44}$$

sau în aceleași condiții de la § 1 — transformata corespunzătoare :

$$f'(X)+f(X)+f\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right)=0: \quad f'(X)+f(X)+f(x)=0 \tag{45}$$

Procedînd după aceleași metode, prin derivare avem :

$$f''(X)+f'(X)-\frac{a^2+bc}{(cX-a)^2}f'\left(\frac{aX+b}{cX-a}\right)=0$$

și care se poate reduce la :

$$f''(X)+\frac{1}{c}\left[1-\frac{a^2+bc}{(cX-a)^2}\right]f'(X)=0 \tag{46}$$

sau prin $cX-a=t$; $f(X)=Y$ avem :

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{1}{c}\left[1-\frac{a^2+bc}{t^2}\right]\frac{dY}{dt}=0 \tag{46'}$$

care integrată conduce la soluția :

$$Y=k_2+k_1\int e^{-\frac{1}{c}\left[\frac{a^2+bc}{t}+t\right]}\cdot dt$$

sau

$$f(X)=k_2+k_1\int e^{-\frac{1}{c}\left[\frac{a^2+bc}{cX-a}+(cX-a)\right]}dX \tag{47}$$

care reprezintă soluția generală a lui (46).

Impunînd condiția ca (47) să verifice pe (45) se găsește $k_2=0$ așa că soluția generală a lui (45) este

$$f(X)=k_1\int e^{-\frac{1}{c}\left[\frac{a^2+bc}{cX-a}+(cX-a)\right]}dX. \tag{48}$$

Mai observăm că integrala (47) conține o funcție legată de funcțiile Bessel. Ne limităm la aceste observații în legătură cu ecuațiile diferențiale din 3° precum și cu integrala folosită *).

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ghermănescu, M.* — Ecuații funcționale — Editura Academiei R.S.R. — București, 1960.

2. *Ionescu, V. D.* — Ecuații diferențiale ordinare și cu derivate parțiale — Editura Didactică și Pedagogică — București — 1952.

3. *Picard Emile* — Leçons sur quelques équations fonctionnélles — Paris — 1928.

4. *Petrovschi, G. I.* — Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare — Editura tehnică — București — 1952.

5. *Marinescu, Gh.* — Teoria ecuațiilor diferențiale — Editura Didactică și Pedagogică — București — 1963.

*) Un studiu mai amănunțit va face obiectul altei lucrări.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

C.Z.: 517 : 535

UNELE TRANSFORMĂRI GEOMETRICE ÎN OPTICĂ ȘI GRUPURILE LIE *

DUMITRU FILIPESCU

C. Ionescu Bujor a definit în lucrările [1] și [2] o transformare pe care o numește translație convergentă și a studiat proprietățile acestei transformări.

În lucrarea [5], s-a arătat că translațiile convergente cu același centru formează grupuri Lie, respectiv cu 2,3 parametri apoi s-a studiat cazurile particulare cînd vectorul respectiv este paralel cu o direcție dată.

În această lucrare, se studiază cazul general pentru translațiile convergente în plan și spațiu.

I. Translațiile convergente în plan

1) Formulele de transformare pentru translațiile convergente în plan sînt date de relațiile :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1-\frac{x V_x + y V_y}{x^2+y^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1-\frac{x V_x + y V_y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

pe care le vom scrie sub forma :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1-\frac{a x + b y}{x^2+y^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1-\frac{a x + b y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

care formează grup Lie cu doi parametri.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 1—3 noiembrie 1968.

2) Operatorii $X_h = \xi_h^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$

sînt :

$$X_1 f = -\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_2 f = -\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

3) Există relația :

$$(X_1 . X_2) f = 0$$

unde s-a notat cu (X_1, X_2) f paranteza lui Poisson.

4) Grupul este definit cu ajutorul acestor doi operatori.

Într-adevăr considerînd transformarea infinitezimală,

$$Xf = m X_1 f + n X_2 f$$

adică

$$Xf = -\frac{mx^2+nxy}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{mxy+ny^2}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Acesteia i se atașează sistemul diferențial :

$$\frac{dx}{mx^2+nxy} = \frac{dy}{mxy+ny^2} = \frac{-dt}{x^2+y^2}$$

care are integralele prime :

$$\frac{y}{x} = C_1$$

$$\frac{x^2+y^2}{mx+ny} = C_2 - t$$

Notînd cu y_1, x_1 valorile lui x, y corespunzătoare valorii t a parametrului și cu x, y, valorile corespunzătoare lui $t=0$, relațiile de mai sus devin :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{mx_1+ny_1} = -t + \frac{x^2+y^2}{mx+ny}$$

care rezolvate în raport cu y_1, x_1 dau tocmai relațiile (1') dacă se notează $mt=a$, $nt=b$.

5) Funcțiile invariante sînt de forma :

$$F = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

II. Translațiile convergente în spațiu

1) Formulele de transformare, pentru translațiile convergente în spațiu sînt date de relațiile :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1-\frac{x V_x + y V_y + z V_z}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1-\frac{x V_x + y V_y + z V_z}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ z_1 &= z\left(1-\frac{x V_x + y V_y + z V_z}{x^2+y^2+z^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

care pot fi scrise sub forma :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1-\frac{a x + b y + c z}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1-\frac{a x + b y + c z}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ z_1 &= z\left(1=\frac{a x + b y + c z}{x^2+y^2+z^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

care formează grup Lie cu 3 parametri.

2) Există relațiile

$$(X_i, X_j) f = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (i \neq j)$$

3) Transformările infinitezimale ale grupului sînt date de operatorii :

$$X_1 f = \frac{-x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x y}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{x z}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = \frac{-x y}{x^2+y^2+z^4}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{y z}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial c}$$

$$X_3 f = \frac{-r z}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{y z}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

4) Grupul este definit de acești 3 operatori.

Considerăm transformarea infinitezimală

$$X f = m X_1 f + n X_2 f + p X_3 f$$

adică

$$Xf = \frac{-(mx^2 + nxy + pxz)}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{mxy + ny^2 + pyz}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{mxz + nyz + pz^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

căreia îi atașăm sistemul diferențial

$$\frac{dx}{mx^2 + nxy + pxz} = \frac{dy}{mxy + ny^2 + pyz} = \frac{dz}{mxz + nyz + pz^2} = \frac{-dt}{x^2+y^2+z^2}$$

care conduce integralele prime

$$\frac{z}{x} + C_1$$

$$\frac{y}{x} = C_1$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{my + nx + pz} = -t + C_3$$

Dacă se notează cu x_1, y_1, z_1, valorile lui x, y, z corespunzătoare valorii t a parametrului și cu x, y, z valorile corespunzătoare lui $t=o$, relațiile precedente devin :

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{mx_1 + ny_1 + pz_1} = -t + \frac{x^2+y^2+z^2}{mx + ny + pz}$$

care rezolvate în raport cu x_1, y_1, z_1 și notînd cu $mt=a$, $nt=b$, $pt=c$ dau tocmai relațiile (1').

5) Funcțiile invariante sînt de forma

$$F = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$$

6) Grupul este intranzitiv și abelian.

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ionescu Bujor, C.* — Transformări geometrice în optică G.M.F. 5 mai 1961.

2. *Ionescu Bujor, C.* — Asupra unor transformări optice. Buletinul I.P.B. Tom. XXIII, Fascicola 2, aprilie-iunie 1961.

3. *Vrînceanu, Gh.* — Lecții de geometrie diferențială, vol. I, Ed. Didactică și Pedagogică, 1962.

4. *Ionescu Bujor, C.* — Sur le transformations optique de l'espace. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", martie-aprilie 1965.

5. *Filipescu, D.* — Asupra unor transformări geometrice în optică și grupurile Lie. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Tom. XXIX, nr. 2, martie-aprilie, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2.

GEOMETRIE

C.Z.: 515 : 517

PERSPEKTIVSTUDIUM DER ÄQUIRESULTANTEN GERADEN *

AURELIAN TĂNĂSESCU

1. *Einleitung*

Die äquiresultanten Geraden wurden erstmals von M. Paul Appel [1] mit dieser Benennung eingeführt. Das sind vier konkurrente Geraden, die in Verbindung mit irgendeinem Dreikant eine räumliche besondere Konfiguration bilden.

Sodann, wenn wir auf den drei Kanten (Achsen) irgendeinen Dreikants $Oxyz$ drei gleiche Vektoren annehmen, werden wir die vier Geraden $o\bar{\alpha}$, $o\bar{\beta}$, $o\bar{\gamma}$, $o\bar{\delta}$ (in Appels Bezeichnung) der besonderen räumlichen Konfiguration erhalten. Wenn als Achsen die Kanten des Dreikants gewählt werden, haben die äquiresultanten Geraden die Gleichungen $\pm x = \pm y = \pm z$ mit allen möglichen Vorzeichen kombinationen. Eine willkürliche Ebene, die nicht durch den Anfangspunkt O des Dreikants geht, wird die Kanten des Dreikantes schneiden, uzw. in den Punkten A, B, C, und die äquiresultanten Geraden werden in den Punkten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ geschnitten. Die Punkte A, B, C sind die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare die durch die vier Punkte $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ gehen. In dieser Weise wird das klassische Bild des vollständigen Vierecks $\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\delta}$ erhalten das als Diagonalschnittpunkte die drei Punkte ABC hat. Diese Tatsache ist klar erisichtlich, da z.B. die äquiresultanten Geraden $o\bar{\alpha}$ und $o\bar{\beta}$, die die Gleichungen $x=y=\pm z$ haben, koplanar mit der Achse Z sind und folglich die Punkte $\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,C$ kollinear sind. Analoge Uberlegungen sind gültig auch für die anderen äquiresultanten Geraden.

2. *Der Riss der äquiresultanten Geraden*

Wenn aus diesem Gesichtspunkt das Problem einfach erscheint, sind die mit der deskriptiven oder perspektivischen Darstellung dieser besonderen räumlichen Konfiguration verbundenen Studien schwieri-

* Mitteilung vorgetragen an der Tagung über konstruktive Geometrie, DDR, Merseburg 11—13.09.968.

ger. Die durch orthogonale Projektionen im Mongeschen Projektionssystem zu erzielende Darstellung ist nicht unbedingt notwendig, da das Dreikant schräg, ist, und die orthogonale Projektion könnte in diesem Fall als künstlich erscheinen.

Ein erster Versuch einer besonderen Darstellung der äquiresultanten Geraden auf einen Riss wurde von G. Nichifor [2] gemacht, u.zw. durch das Betrachten einer schrägen Parallel-Projektion mit den Kanten irgendeines Dreikants, durch die sich in irgendeinem Mass das Mongesche System verallgemeinert. Um auf diese Weise den Riss zu erhalten ist aber eine Umklappung der Fläche *zox* auf der Ebene *xoy* notwendig. Die Punkte des Raumes werden schräg auf die Flächen des entsprechenden Dreikants parallel zu der ausserhalb dieser Ebene liegenden Kante projiziert. Wenn wir nun die äquiresultanten Geraden in diesem Projektionssystem projizieren, merken wir, dass die Projektion einer äquiresultanten Geraden auf die Flächen des Dreikants eben die Halbierenden dieser Achsen sind. — So z.B., wenn wir die Vektoren $(\vec{01}, \vec{02}, \vec{03})$ zusammensetzen, können wir die äquiresultante Gerade (α), (α') erhalten, die als Projektion die Halbierende der Projektionen der Achsen des schrägen Dreikants im oben präzisierten Projektionssystem (Abb. 1) hat. Dieselbe äquiresultante Gerade kann ausserdem

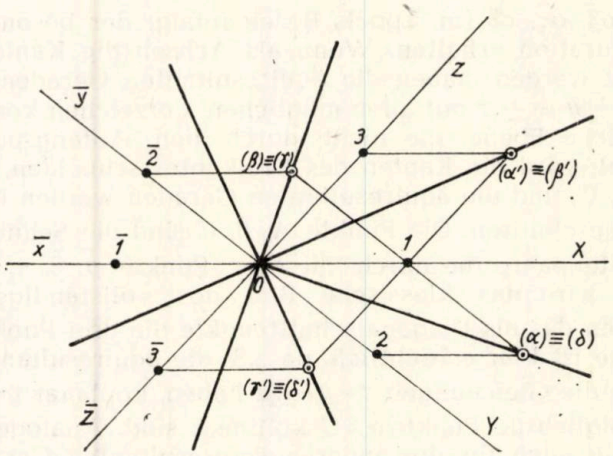


Abb. 1.

auch durch die Zusammensetzung der Einheits-Vektoren des entgegengesetzten Dreikants bestimmt werden. Wenn wir eine gewisse Reihenfolge der vier schrägen Dreikante wählen (was auf vier verschiedene Wege, durchgeführt werden kann, die ausser der Notation, zu demselben Ergebnis führen), werden wir die besondere räumliche Konfiguration der vier äquiresultanten Geraden erhalten, wobei die Zusammensetzung

der Vektoren aus der folgenden Tafel oder aus der Äquivalenzentafel befolgt werden muss :

$\frac{oxyz}{0123}\,\alpha$	$\frac{ox\bar{y}z}{01\bar{2}3}\,\beta$	$\frac{ox\bar{y}\bar{z}}{01\bar{2}\bar{3}}\,\gamma$	$\frac{oxy\bar{z}}{012\bar{3}}\,\delta$

Die vier äquiresultanten Geraden werden also durch die Projektionen $(\alpha),(\alpha')$; $(\beta),(\beta')$; $(\gamma),(\gamma')$; $(\delta),(\delta')$ bestimmt, worin die Vertauschung je zweier Projektionen in $(\alpha)\equiv(\delta)$; $(\alpha')\equiv(\beta')$; $(\beta)\equiv(\gamma)$; $(\gamma')\equiv(\delta')$ erscheint.

Wie wir weiter sehen werden (und ohne dabei eine Konfusion zu erzeugen,) gestattet diese Vertauschung dieser Paare nacheinander (im Gegenteil) das Studium des Riesses einiger geometrischer bemerkenswerter Eigenschaften dieser besonderen räumlichen Konfigurationen.

3. *Bestimmung des Kompletten Vierkants*

Wir betrachten in Abb. 2 irgendein schrägens Dreikant *oxyz*, die besondere räumliche Konfiguration der äquiresultanten Geraden und einew Willkürliche Schnittebene *P*, die nicht durch den Anfangspunkt des Dreikants geht und die im Verhältnis zu den Achsen des Dreikants keine besondere Stellung einnimmt, Im speziell gewählten Projektionssystem [3] werden wir den Schnitt dieser Ebene mit der besonderen räumlichen Konfiguration der äquiresultanten Geraden bestimmen. Folglich kann der Schnittpunkt $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha'})$ mit der Ebene *P* der äquiresultanten (α), (α') mittels der durch diese Geraden gezogenen „projizierenden Ebene" $Q_1\equiv y$, $Q_1\equiv(\alpha')$ bestimmt werden. Die Schnittgerade $(hv, h'v')$ der beiden Ebenen führt zuersts zur Projektion $\bar{\alpha}$, dann zu $\bar{\alpha'}$, da diese die zwei Projektionen der ersten Ecke des vollständiges Viereck sind. In diesem allgemeinen Fall können wir auf dieselbe Art die anderen drei Spitzen des kompletten Vierecks bestimmen, wobei wir nacheinander die projizierenden Ebenen $Q_2\equiv y$. $Q_2'\equiv(\beta')$ $R_3\equiv(\beta)$, $R_3'\equiv z$ und $R_4\equiv(\delta)$, $R_4'\equiv z$ betrachten. Diese Spitzen werden $\bar{\beta}$, $\bar{\beta'}$; $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma'}$ und $\bar{\delta}$, $\bar{\delta'}$ sein. Zur Überprüfung kann z.B. benutzt werden, dass die Punkte $A\,\bar{\alpha}\,\bar{\gamma}$, $B\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}$, $\bar{\beta}\,A\,\bar{\delta}$, $\bar{\gamma}\,B\,\bar{\delta}$, $\bar{\beta}^0\bar{\gamma}$ kollinear in der ersten Projektion und die Punkten $A\,\bar{\alpha'}\,\bar{\gamma'}$, $O\,\bar{\alpha'}\,\bar{\beta'}$, $\bar{\beta'}\,C\,\bar{\gamma'}$, $\bar{\beta'}\,A\,\bar{\delta'}$, $\bar{\delta'}\,O\,\bar{\gamma'}$, kollinear in der zweiten Projektion sind [4.]

4. *Bemerkung*

Im gewählten Projektionssystem bilden die vollständigen Vierecke eine „Wiederspiegelung" in beiden Projektionen. Die kompletten Vierecke der Projektionen können willkürlich oder orthogonal sein. Auf dem Riss können einige Sonderfälle des kompletten Vierecks $\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\delta}$ leicht abgelesen werden. Diese Projektion verjüngts sich um so weiter, je weiter entfernt vom Anfangspunkt die Schnittebene die entgegengestzte

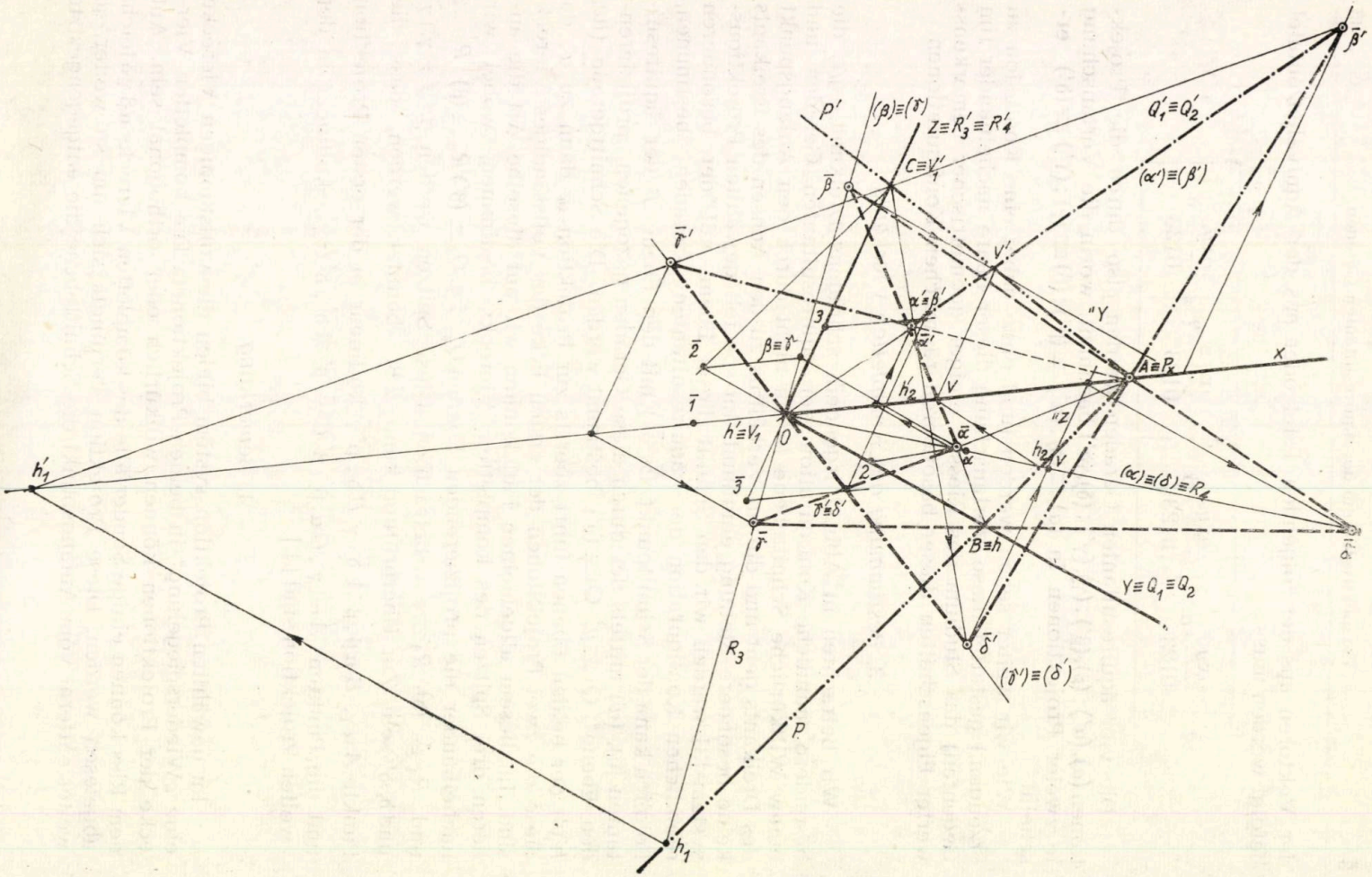

h'_1
h_1
p'
p
$(\beta)\equiv(\delta)$
$Z\equiv R'_3\equiv R'_4$
$C\equiv V'_1$
$Q'_1\equiv Q'_2$
$(\alpha')\equiv(\beta')$
$\bar{\beta}$
$\bar{\beta}'$
$\bar{\gamma}'$
V'
$\alpha'\equiv\beta'$
$\bar{\alpha}'$
"Y
$\beta\equiv\gamma'$
$\bar{2}$
$\bar{1}$
$A\equiv P_x$
x
h'_2
V
"Z
$h'\equiv V_1$
0
$\bar{\alpha}$
α
h_2
V
$(\alpha)\equiv(\delta)\equiv R_4$
2
$\bar{3}$
$\bar{\gamma}\equiv\delta'$
$\bar{\gamma}$
$B\equiv h$
$Y\equiv Q_1\equiv Q_2$
R_3
$\bar{\delta}'$
$(\delta')\equiv(\delta')$

Abb. 2.

Achse des Schrägen Dreikants schneidet. Wenn auch $C \to \infty$ auf der Achse *oz* ist, wird die Schnittebene „projizierend" gegenüber *xoy*, und das Viereck $\bar{\alpha}'\,\bar{\beta}'\,\bar{\gamma}'\,\bar{\delta}'$ wird ein eventuelles orthogonales Trapez. Falls auch $A \to \infty$ auf der Achse *ox* ist, wird das Trapez ein Rhombus in einer „frontalen" Ebene $\bar{\alpha}'\,\bar{\beta}'\,\bar{\gamma}'\,\bar{\delta}'$ liegend, und die zweite Projektion $\bar{\alpha}'\,\bar{\beta}'\,\bar{\gamma}'\,\bar{\delta}'$ wird die wirkliche Grösse des Raumrhombuses darstellen. Für den Leser könnte die Konstruktion dieser Risse von Nutzen sein.

5. *Besonderer Fall mit perspektivischen Anwendungen*

Nehmen wir an, dass die Schnittebene gleiche „Schnitte" auf den Achsen des schrägen Dreikants bestimmen, so dass $OA = OB = OC$. In diesem Fall ist leicht einzusehen, dass die Äquiresultante (α_0), (α') der Durchschnitt der „projizierenden" Ebenen ZO (α) und YO (α_0') ist, die verschiedene Verfasser mit dem Namen „mittlere Ebenen" (FGM Seite 870) bezeichnen. So wird der Punkt $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}_0'$ der Schnitt-Punkt der Seitenhalbierenden im Dreieck *ABC* und die Spuren $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}'$; $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$ und $\bar{\delta}$, $\bar{\delta}'$ der anderen drei äkuiresultanten Geraden auf der Dreieckebene *ABC* bilden das dem Dreieck *ABC* antikomplementäre Dreieck. Analoge Dreiecke bilden sich auch auf den beiden Projektionsebenen *xoy* und *zox*.

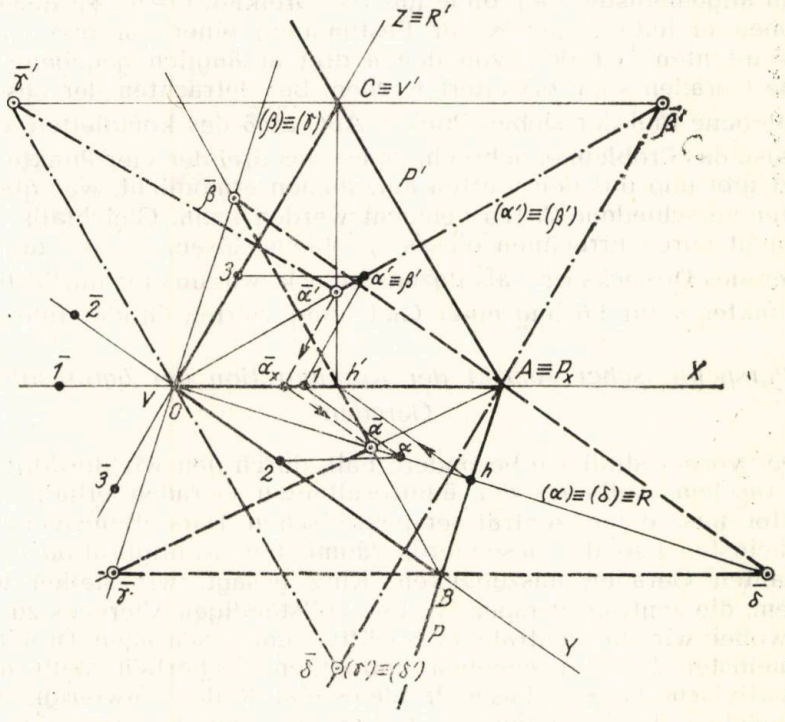


Abb. 3.

Dieses Ergebnis gestattet eine rasche Konstruktion der äquiresultanten Geraden entsprechend einem durch Verbindung des Anfangspunktes O mit dem Schwerpunkt des Dreiecks der Einheitsvektoren und mit den Ecken des antikomplementären Dreiecks gegebenen Dreikants. Dieser Tatsache wegen kann eine Erweiterung der perspektivischen Darstellung im allgemeinsten Fall der räumlichen besonderen Konfiguration der äquiresultanten Geraden ausgedacht werden.

Überprüfen wir diese Behauptungen durch effektive Konstruktionen auf dem Riss.. Sei also *oxys* irgendein schräges Dreikant (Abb. 3) und die Ebene *P* derart gewählt, dass wir $OA=OB=OC$ haben. Der Punkt $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}')$ wird der Schwerpunkt des Dreieks *ABC*, bzw. der Projektionsdreiecke *OAB*, *OAC*. sein. Beim Aufbau der beiden dieser antikomplementären Dreiecke und durch Ziehen der Parallelen zu den entgegengesetzten Seiten erhalten wir direkt bzw. die Spitzen $\bar{\delta}\ \bar{\gamma}\ \bar{\delta}$, $\bar{\beta}'\ \bar{\gamma}'\ \bar{\delta}'$ der beiden vollständigen Vierecke und dadurch die besondere räumliche Konfiguration der äquiresultanten Geraden. Dieses Ergebnis kann unmittelbar überprüft werden, u.zw. mittels Schneiden jeder Äquiresultanten mit der Schnittebene. Auf dem Riss wird die Konstruktion der Äquiresultante (α), (α') (durch die „projizierende" Ebene $R\equiv(\alpha)$, $R'\equiv z$ die sich mit der Schnittebene *P*, nach dem Durchschnitt hv, $h'v'$ durchschneidet) überprüft.

Im allgemeinsten Fall, ohne uns das Dreikant *OABC* zu geben, kann das oben erzielte Ergebnis zur Bestimmung einer Gruppe von vier äquiresultanten Geraden, von denen drei anfänglich gegebene irgendwelche Geraden sind, erweitert werden. Bei Betrachten der besonderen Schnittebene und der sieben Punkte *ABC* $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}$ des kompletten Vierecks wird also das Problem ersichtlich, da es uns drei der vier Punkte $\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma}\ \bar{\delta}$ wieder gibt und uns den vierten aufzubauen ermöglicht, was gleich und auf vier verschiedene Arten gemacht werden kann. Gleichfalls könnten wir leicht durch Errechnen dieses Problem lösen, u.zw. durch das Wählen des Dreiecks $\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma}$ als Bezugsdreieck, was uns für die Bestimmung des Punktes $\bar{\delta}$ zur Lösung einer Gleichung vierten Grades führen wird.

6. *Perspektivischer Aspekt der Konfiguration der äquiresultanten Geraden*

Der vorher studierte besondere Fall, durch den wir die Möglichkeit eines raschen Aufbaues der äquiresultanten Geraden erhalten haben, gestattet uns, einen zentral-perspektivischen Darstellungsversuch im allgemeinsten Fall der besonderen räumlichen Konfiguration der äquiresultanten Geraden auszudenken. Kurz gesagt, wir stellen uns das Problem, die zentrale Perspektive des vollständigen Vierecks zu bestimmen wobei wir die zentrale Perspektive eines schrägen Dreikants im allgemeinsten Fall als gegeben betrachten. Sicherlich stellt die rein perspektivische Lösung dieses Problems eine Reihe Schwierigkeiten auf, von welchen die bedeutendste die Bestimmung der Perspektiven der

äquiresultanten Geraden ist. Gerade diese hauptsächliche Schwierigkeit kann auf Grund des vorher studierten Spezial-Falles, beseitigt werden. Im Übrigen könnten die sich daraus ergebenden Fragen folgende sein ;

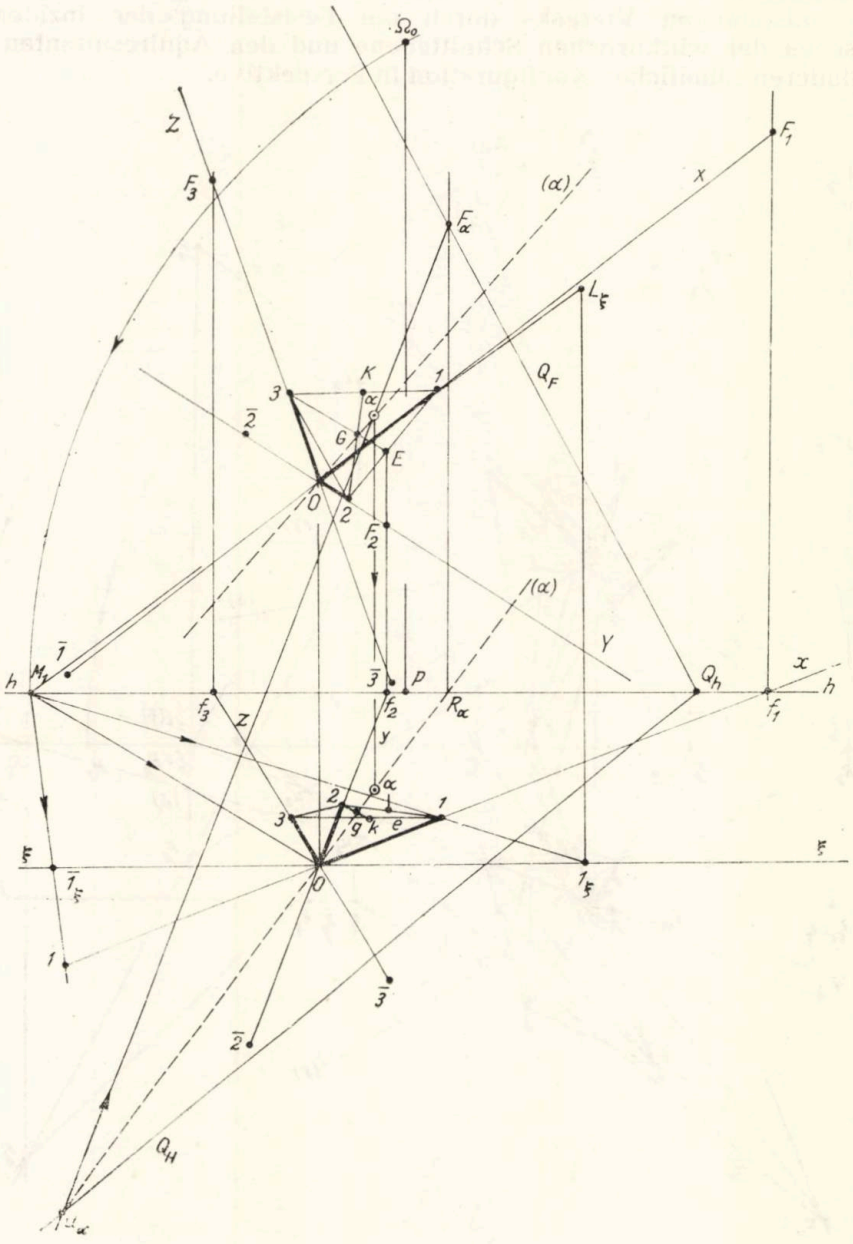


Abb. 4.

die Auswahl der Perspektive des schrägen Dreikants *oxyz*, die Anwendung der Einheitsvektoren in beiden Richtungen auf den Achsen dieses Dreikants in Perspektive, die Bestimmung der Perspektiven der äquiresultanten Geraden und schliesslich die Bestimmung der Perspektive des vollständigen Vierecks durch die Feststellung der Inzidenzen zwischen der willkürlichen Schnittebene und den Äquiresultanten der besonderen räumlichen Konfiguration in Perspektive.

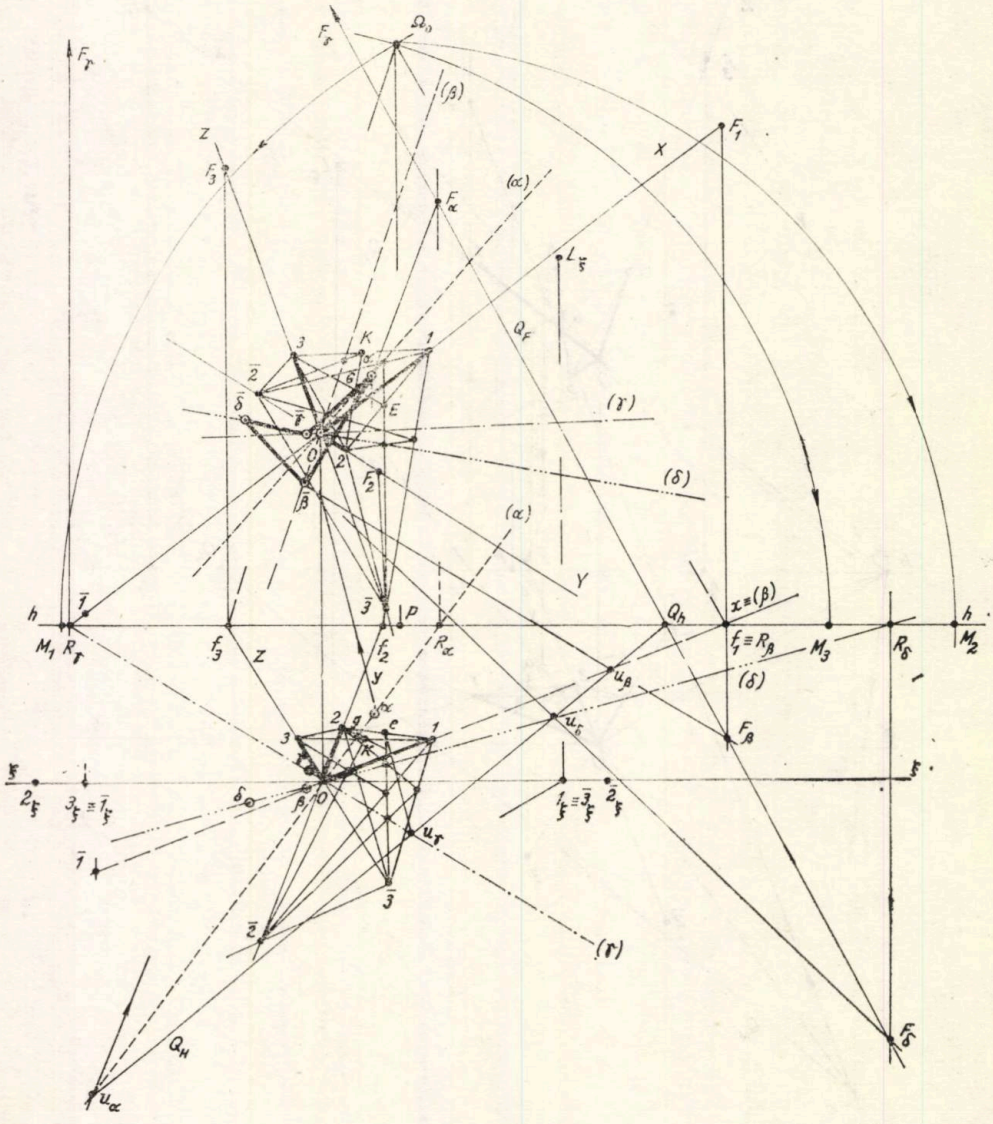


Abb. 5.

Sodann, in dem Perspektivriss der Abb. 4 sind alle sukzessiven Konstruktionen [5] wiedergegeben die zur Perspektivlösung dieser Etappen für die Äquiresultante (α_l) notwendig sind. Sei $OXYZ$ die Perspektive des schrägen willkürlichen Dreikants im Raum und $oxyz$ die Perspektive seiner horizontalen Projektion, wo wir ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, den Anfgangspunkt O des Dreikants eben aus der Tafel (o gehört zur Basis $\xi\xi$ der Tafel) wählen. Die Fluchtpunkte der Achsen des Dreikants sind bzw. in Reihenfolge F_1f_1, F_2f_2 und F_3f_3. Bei betrachten des Messpunktes M_1 der Achsrichtung Xx, wo hh die Horizontlinie und Ω_0 die Umklappung des Gesichtspunktes auf die Tafel und der Einheitsvektor OL_ξ ist, erhalten wir durch die Punkte 1_ξ , $\overline{1}_\xi$ die Perspektiven 1, $\overline{1}$ der Extremitäten der entsprechenden Einheitsvektoren der Achse Xx. Durch Anwendung des am vorhergehenden Punkt erzielten Ergebnisses werden wir sogleich die Perspektive (α_l), (α) der ersten Äquiresultanten erhalten durch Verbinden der Perspektive Oo des Anfangpunktes des Dreikants mit der Perspektive Gg des Schwerpunktes der Perspektive des Dreiecks der entsprechenden Einheitsvektoren.

Die Perspektive $\overline{\alpha_l\alpha}$ der ersten Spitze des vollständigen Vierecks wird sich durch Lösung der Inzidenz zwischen der Äquiresultanten (α), (α_l) und der willkürlichen Schnittebene $Q_H\,Q_F$ ergeben.

Im Perspektivriss der Abb. 5 haben wir für dieselben anfänglich gegebenen Daten alle perspektivischen Konstruktionen, bezogen auf alle Äquiresultanten, die die besondere räumliche Konfiguration bilden und die dem betrachteten schrägen Dreikant charakteristisch sind, kumuliert. Zum Schluss erhalten wir die Perspektive $\overline{\alpha\beta\delta\gamma}$ des vollständigen Vierecks sowie die Perspektive $\alpha\beta\delta\gamma$ seiner horizontalen Projektion. Die Reihenfolge der Verbindung der Punkte ist analog der Risse der Abb. 2 und 3, da das Perspektivproblem durch Betrachtung derselben Reihenfolge der vier schrägen Dreikante gelöst worden war. Der Perspektivriss ist nicht zu sehr belastet, die Konstruktionen befinden sich innerhalb der Grenzen der Tafel und die bemerkenswerten geometrischen Eigenschaften, die in den vorhergehenden Punkten festgestellt wurden, können unmittelbar aus der Perspektive abgelesen werden.

7. *Der axonometrische Perspektivaspekt des Problems*

Da hier die Rede von irgendeinem schrägen Dreikant ist, könnte das Studium der Darstellung in orthogonaler Axonometrie dieser besonderen räumlichen Geradenkonfiguration genau so künstlich erscheinen wie ein deskriptives Darstellungsstudium auf dem Mongeschen Riss, wie wir dies am Anfang dieser Arbeit gezeigt haben. Trotzdem, die erwänte Tatsache, dass eine zentrale Darstellungsperspektive im allgemeinsten Fall dieser besonderen räumlichen Konfiguration der äquiresultanten Geraden möglich ist, gestattet uns die Darstellung auch im Falle der schrägen Axonometrie, z.B. in irgendeiner parallelen Pers-

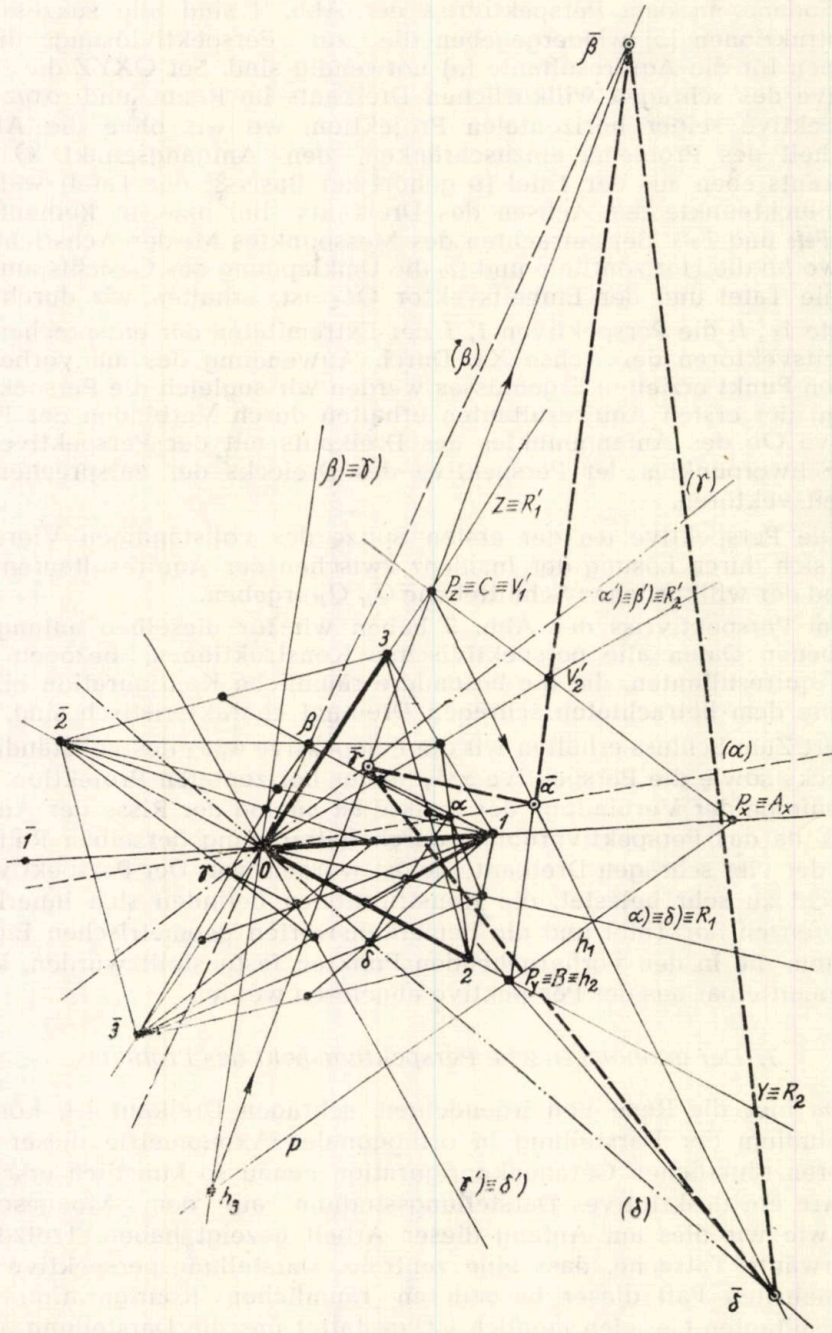

$\bar{\beta}$
(β)
$\beta)\equiv\delta')$
$Z\equiv R_1'$
(γ')
$P_Z\equiv C\equiv V_1'$
$\alpha')\equiv\beta')\equiv R_2'$
V_2'
3
$\bar{2}$
β
$\bar{\gamma}$
$\bar{\alpha}$
(α)
$P_x\equiv A_x$
α
1
$\bar{1}$
$\bar{\delta}$
0
$\alpha)\equiv\delta)\equiv R_1$
h_1
δ
2
$P_Y\equiv\beta\equiv h_2$
$\bar{3}$
$Y\equiv R_2$
p
$\gamma')\equiv\delta')$
h_3
(δ)
$\bar{\delta}$

Abb. 6.

pektive, zu speziallisieren. In dem axonometrischen Riss der Abb. 6 ist in diesem Sinn die parallele Perspektive der Konstruktion wiedergegebenen, die zur Axonometrie des vollständigen Vierecks führen wird.

Katheder der darstellenden Geometrie II
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bukarest

LITERATUR

1. *Appel, M. Paul* — Sur un système particulier de quatre droites concourentes dans l'éspace; Droites équirésultantes. Bull. de la Soc. Math. de France, Tome L, Fasc. III, IV, Paris 1922.

2. *Nichifor, G.* — Eine besondere Darstellung der äquiresultanten Geraden. (O reprezentare specială a dreptelor echirezultante). Bul. Asoc. Mat. Anul II, nr. 8, București 1923.

3. *Tănăsescu, A.* — Über einige Veränderungen auf dem generalisierten Riss. Wiss. Zeitsch. der Hochschule für Arch. und Bauw., Weimar, 1968.

4. *Tănăsescu, A.* — Application of a product of affinal transformation to the generalized draught, Com. Ses. St. I.P.B., București, 1964.

5. *Tănăsescu, A.* — Curs de perspectivă (Lehrbuch der Perspektive). Ed. Did. și Ped., București, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

FIZICĂ

C.Z.: 621.315.592 : 621.38

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИК ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНОК PbTe

И. ДРЕГИЧ М. ПЕТРЕСКУ

Бухарестский политехнический институт им. „Г. Г. Дежа",
Факультет электроники и телесообщений, Кафедра электронных ламп и транзисторов

И СПЫНУЛЕСКУ-КАРНАРУ

Бухарестский университет, Факультет физики,
Кафедра электричества

Изучение электрофизических свойств тонких пленок полупроводниковых соединений имеет большое значение, как для выяснения явлений, протекающих в них, так и для их практического применения. Полупроводниковые тонкие пленки теллурида свинца были изучены в относительно малом количестве работ [I—3] и их свойства, полученные разными авторами, отличаются между собой иногда очень много; это различие можент быть объяснено разными условиями, в которых соответствующие образцы были получены различными авторами.

В настоящей работе исследовались зависимости удельного сопротив, ления пленок PbTe от их толщины и от температуры подложки, на которой они образовались, подвижности носителей от температуры подложки, а также зависимость электропроводности пленок от температуры как в воздухе, так и в вакууме.

Тонкие пленки PbTe были получены термическим испарением в вакууме (5.10^{-4} — 10^{-5} мм рт. столба), согласно методике [4, 5], в разных экспериментальных условиях. Температура испарения исходного вещества (в виде поликристаллического конгломерата) была изменена в интервале 350—1200°C. Это позволило получить скорости осаждения между 15 и 18.000 Å/минут. Температура подложки была изменена в интервале 25—400°C. Большинство образцов выло получено испарением свежего вещества из тигля С целью удаления примеси или составляющих (Pb или Te) присутствующих в сбоводном состоянии в исходном веществе,

несколько образцов были изготовлены испарением вещества после его предварительной термической обработки в вакууме (15 минут при 450—550°С).

Как показали опыты, электрические свойства тонких пленок теллурида свинца сильно зависят от условия приготовления и особенно от температуры подложки.

Было найдено, что удельное сопротивление тонких пленок PbTe зависит также от толщины пленок, полученных в разных условиях (Рис. 1).

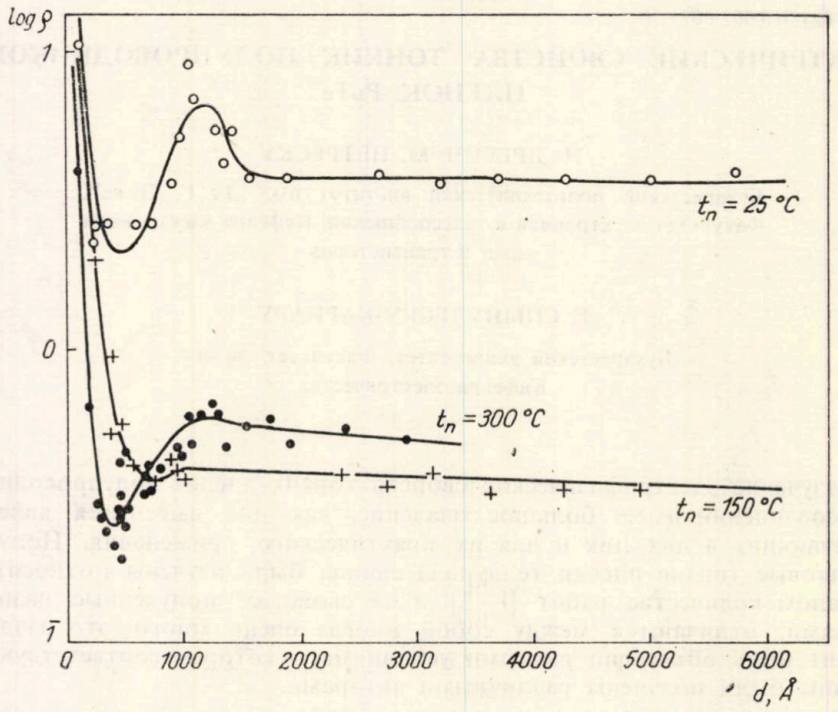


Рис. 1. Зависимость удельного сопротивления тонких пленок PbTe от их толщины.

Как явствует из рисунка 1, эта зависимость сильна для более высоких температур подложки (>150°С) и для толщины ниже 2 000 Å.

Зависимость удельного сопротивления тонких пленок PbTe от температуры подложки показана на рисунке 2. Кривая 1 указывает эту зависимость для пленок, полученных из исходного вещества, предварительно термически необработанного, а кривая 2 для пленок, полученных из предварительно термически обработанного в вакууме (15 минут при 450—550°С) вещества.

Такое поведение удельного сопротивлеиия полученных пленок может быть объяснено допуская гипотезу о присутствии в исходном веществе одной составляющей в избытке над стехиометрическим составом, которая

после термической обработки удаляется. В случае теллурида свинца, как показали данные зависимости упругости паров от температуры для теллура [6] и свинца [7], свинец является менее летучим. С другой стороны, согласно термодинамическим законам, во время синтеза теллурида свинца имеет место частичная термическая диссоциация исходного вещества. Таким образом, конечный продукт будет содержать помимо PbTe, также и какое-то количество атомов теллура и свинца, которые не реагировали

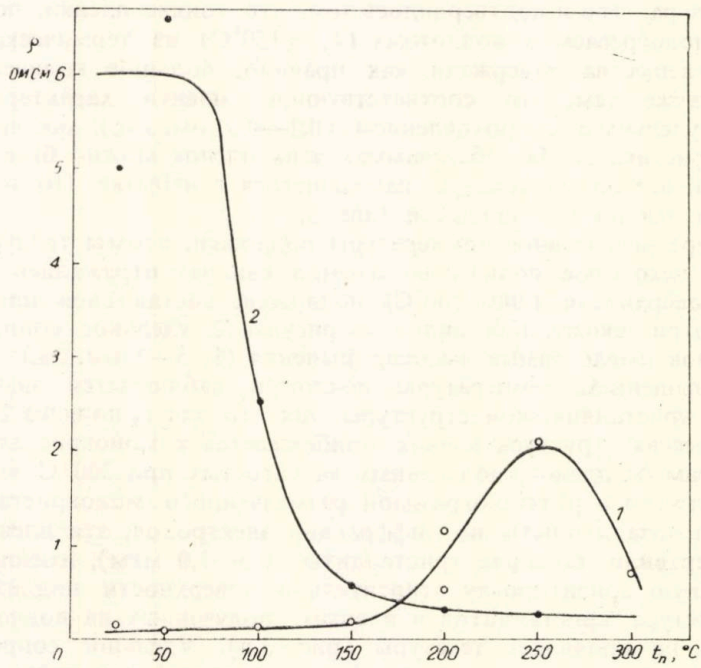


Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления тонких пленок PbTe от температуры подложки: 1 — для пленок, полученных из исходного вещества, предварительно термически необработанного; 2 — для пленок, полученных их исходного вещества, предварительно термически обработанного в вакууме.

между собой или появились вследствие термической диссоциации. Поскольку свинец менее летучий, в исходном веществе количество атомов свинца будет больше чем теллура. Действительно, знак носителей заряда, измеренный для свежеизготовленных монокристаллов (или конгломерата, образованного из большого числа монокристаллов) в большинстве случаев соответствовал материалу n-типа. Как показано в работе [8], ионы свинца диффундируют легче чем ионы теллура в кристаллической решетке PbTe. Поэтому свинец в избытке будет входить в решетку исходного вещества, двигаясь в междуузлие как положительные ионы, в то время как большинство атомов теллура остается вне решетки в свободном состоянии. Количество атомов теллура в свободном состоянии растет также

вследствие диссоциации теллурида свинца во времени, под действием влажности или других факторов. Измеренный знак носителей для монокристаллов (конгломератов) после большого промежутка времени с момента их изготовления соответствует материалу p-типа. Рентгенографический анализ показал в этом случае присутствие атомов теллура в свободном состоянии. Таким образом, можно было предположить, что и тонкие пленки, изготовленные из теллурида свинца с большим количеством теллура в свободном состоянии, будут содержать также большое количество таллура. Это и подтвердилось тем, что тонкие пленки, полученные на слабо подогреваемых подложках ($t_n = 150°C$) из термически необработанного вещества, содержали, как правило, большое количество теллура, а также тем, что соответствующие пленки характеризовались меньшим удельным сопротивлением (0,1—0,3 ом. см.), как явствует из кривой 1 рисунка 2. На дебаеграммах этих пленок можно было обнаружить почти все линии теллура, находящегося в избытке. По знаку носителей тока эти пленки являются типа p.

По мере возрастания температуры подложки, атомы теллура (и возможно, и некоторое количество атомов свинца) отражались назад от горячей поверхности (200—300°C) подложки, состав слоя приближаясь к стехиометрическому. Как видно из рисунка 2, удельное сопротивление таких пленок имело самые высокие значения (1, 5—2 ом. см.).

С повышением температуры подложки наблюдается значительное улучшение кристаллической структуры, так что для t_n порядка 250—350°C кристаллическая структура пленок приближается к монокристаллической. Рентгенограммы пленок, полученных на нагретых при 300°C подложках. были идентичны с рентгенограммой размелченного монокристалла (рис 3 а). Как показали опыты по диффракции электронов, эти пленки содержат, как правило, большие кристаллиты (0,5—1,0 мкм), имеющие преимущественную ориентировку относительно поверхности подложки (рис. 3 б). Структура кристаллитов в пленках, полученных на подложках при $t_n = 100°C$, не проявляет текстуры (рис. 3 в). Удельное сопротивление этих пленок вследствие улучшения кристаллической структуры в них содержащихся кристаллов — меньше и имеет значение между 0,75—1,5 ом. см (рис. 2). Не исключено, что уменьшение удельного сопротивления пленок, изготовленных на сильно нагретых полложках, имело место также и вследствие присутствия какого-то лишнего количества атомов свинца, как результат диссоциации исходного вещества на самой горячей проверхностки подложки *. Подложка, будучи сильно нагретой, ($t_n > 250°C$) атомы теллура в избытке испаряются назад с ней. Измеренный знак указал на наличие носителей n-типа.

На основе вышеуказанных рассуждений может быть объяснена и кривая 2 (рисунка 2), полученная для пленок, изготовленных из предварительно термически обработанного (15 минут при 450—550°C) в вакууме исходного вещества. После такой термической обработки, находящийся

* Для получения пленок PbTe на сильно нагретых подложках (300—400°C) необходимо сильно увеличить температуру испарения исх дного вещества, что приведет к сильной диссоциации.

в избытке теллур испаряется и таким образом полученные пленки имели состав ближе к стехиометрическому, даже при меньших температурах подложки (25—200°С). Для больших температур подложки удельное со-

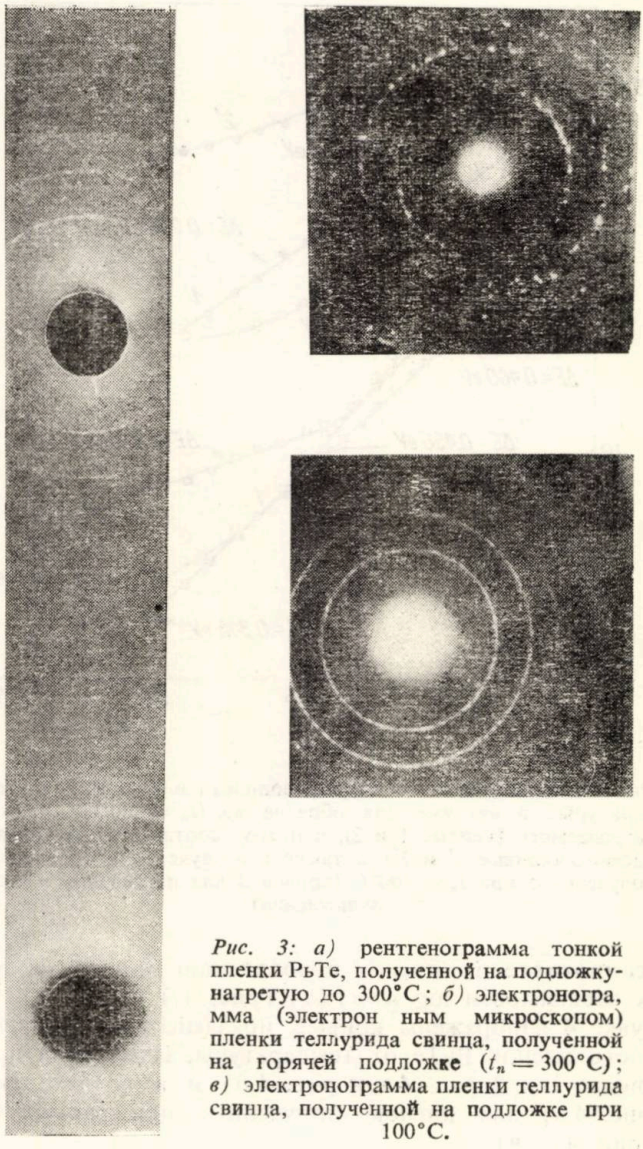


Рис. 3: а) рентгенограмма тонкой пленки PbTe, полученной на подложку-нагретую до 300°С; *б)* электронограмма (электронным микроскопом) пленки теллурида свинца, полученной на горячей подложке ($t_n = 300$°С); *в)* электронограмма пленки теллурида свинца, полученной на подложке при 100°С.

противление падает вследствие улучшения кристаллической структуры и возможно, вследствие прусутствия атомов свинца в избытке в соответствующих пленках.

Благодаря присутствию в свободном состоянии теллура в исходном веществе, первые осаждающиеся на подложке слои (до толщины 300—500 Å) содержали большое количество теллура, что привело к уменьшению

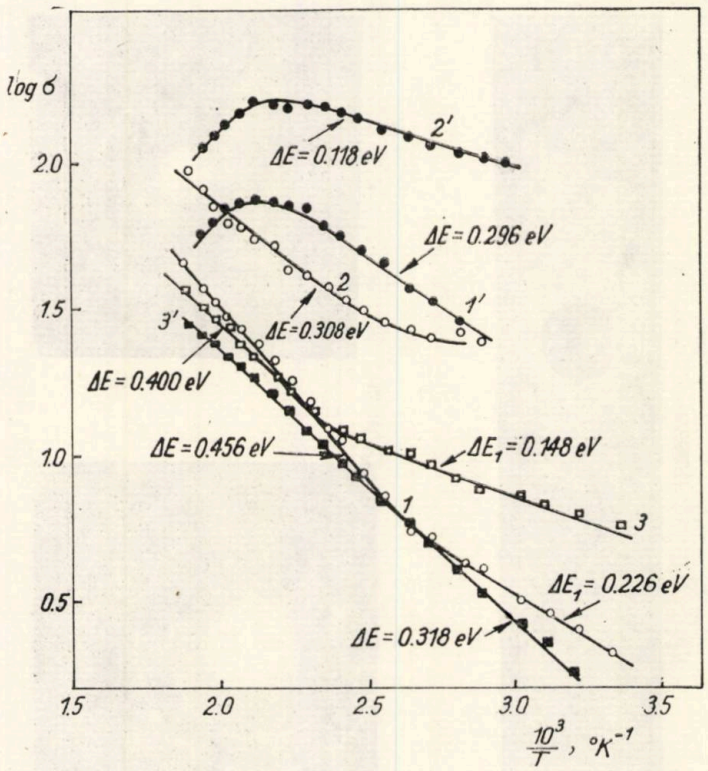


Рис. 4 а. Зависимость электропроводности пленок PbTe от температуры: в вакууме для образца 83 ($t_n = 300$°C), дважды нагреваемого (кривые 1 и 2), и потом соответственно охлаждаемого (кривые 1′ и 2′), а также в воздухе, для образца 20, полученного при $t_n = 300$°C (кривая 3 для нагревания и 3′ для охлаждения);

удельного сопротивления пленок и появлению минимума, у кривых показывающих зависимости $\log \rho = f(d)$ (рис. 1.)

На рисунке 4 изображены кривые, показывающие зависимость электропроводности пленок PbTe от температуры. Измерения проводились в вакууме (кривые 1 и 2 рис. 4 а и рис. 4 б) и в воздухе (кривые 3 для рис. 4 а и рис. 4 в) для пленок, полученных при разных температурах подложки (рис. 4 б, в).

Как показали опыты, для пленок, полученных на слабо нагретых подложках (25—150°C) энергия активации, соответствующая примесным уровням, составляет величину порядка 0,15—0,20 eV (образцы 24, 48 и 23 рисунка 4 б) По знаку носителей тока, это примесные уровни *p*-типа,

Как раньше отмечалось, эти образцы содержат значительное количество атомов теллура (пленки были получены на слабо нагретых подложкак из термически необработанного вещества). Для пленок, полученных на силь-

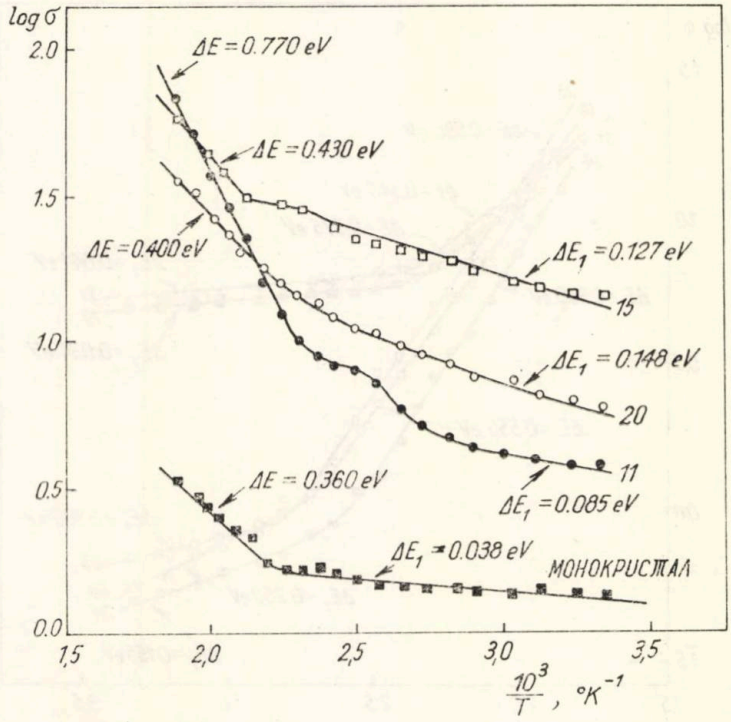


Рис. 4 б. Зависимость электропроводности пленок PbTe от температуры в вакууме для пленок, полученных при разных температурах подложки: 48 — $t_n = 25°C$; 24 — $t_n = 50°C$; 23 — $t_n = 100°C$; 19 — $t_n = 250°C$; 31 — $t_n = 300°C$;

но нагретых подложках (250—350°C), энергия активации, соответствующая примесным уровням, намного меньше, составляет 0,035—0,040 eV (образцы 19 и 31 рисунка 4 б). По знаку носителей заряда, эти пленки соответствовали материалу *n*-типа; эксперименты показали, что соответствующие пленки характеризуются избытком атомов свинца. Как раньше указалось, избыток атомов свинца находится и в свеже приготовленном основном веществе. Действительно, наклон, соответствующий энергии активации примесей в монокристалле PbTe, такой же как и для пленок, полученных на сильно нагретых подложках (см. кривую для монокристалла рис. 4 в), т.е. энергия активации порядка 0,038 eV. Знак носителей указывает, что речь идет о донорных примесях.

На рисунке 4а показана зависимость $\log \sigma = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$ для образца, два раза нагреваемого (кривые 1 и 2) и соответственно охлаждаемого

(кривые 1′ и 2′) в вакууме. Как видно, в первом цикле появляется наклон, соответствующий акценторным уровням ($\Delta E = 0226$ eV) а после второго цикла при охлаждении наблюдается наклон намного меньше,

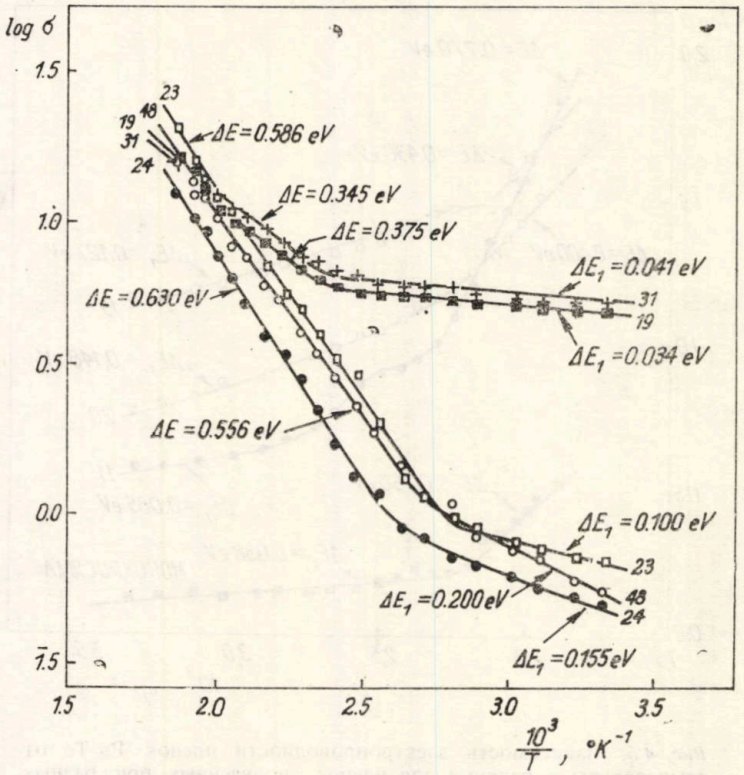


Рис. 4 е. Зависимость электропроводности пленок PbTe от температуры в воздухе для пленок, полученных при разных температурах подложки: 11 — $t_n = 100°C$; 15 — $t_n = 200°C$; 20 — $t_n = 300°C$. Показана также такая же зависимость для монокристалла [III].

вследствие частичной компенсации акценторных и донорных уровней. Кривые 3 и 3′ указывают такую же зависимость для нагревания и охлаждения пленки соответственно в воздухе.

Рассматривая значения ширины запрещенной зоны, полученные из зависимости $\log \sigma = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$ можно сделать следующие заключения. Энергия активации существенно зависит от температуры подложки, вообще падая с повышением температуры подложки для пленок, измеренных в вакууме. Ширины запрещенной зоны, ΔE, полученные из кривых для пленок, подвергающихся термической обработке в вакууме, меньше чем для пленок, измеренных в воздухе и в обоих случаях они больше чем для монокристалла.

В таблице 1 даны значения коэффициента термо-э.д.с., α, для пленок, полученных при разных температурах подложки.

Таблица 1

Значения коэффициента термо-э.д.с. для некоторых пленок PbTe

№	Номер образца	t_n °C	α мкв/°C	Исходное вещество предварительно в вакууме
1	45	25	+300	необработанное
2	46	25	+220	обработанное
3	47	25	+190	обработанное
4	48	25	+170	обработанное
5	49	25	+140	обработанное
6	50	25	+90	обработанное
7	51	25	+40	обработанное
8	52	25	—100	обработанное
9	11	100	+260	необработанное
10	8	100	+200	обработанное
11	76	150	+200	необработанное
12	78	150	+320	обработанное
13	14	150	+400	обработанное
14	79	150	+450	обработанное
15	15	200	+350	необработанное
16	28	300	+250	необработанное
17	29	300	+270	необработанное
18	20	300	+200	обработанное
19	19	250	— 75	обработанное
20	17	300	— 25	обработанное
21	18	300	—130	обработанное
22	31	300	— 70	обработанное

Измерения по эффекту Холла показывают, что исследуемые пленки имели постоянную Холла порядка 0,025—18,6 $см^3$/кулон, что соответствует значениям концентрации носителей между $2{,}10^{20}$ и $2{,}8.10^{17}$ $см^{-3}$ и значениям подвижности между 0,01 и 10 $см^2$/в.сек.

Зависимость подвижности Холла от температуры подложки показана на рисунке 5. Кривая 1 указывает зависимость для пленок, лолученных из исходного вещества, термически необработанного, а кривая 2 — когда это вещество предварительно термически обрабатывалось (15 минут при 450—550°С) в вакууме. Измерения показали, что подвижность больше

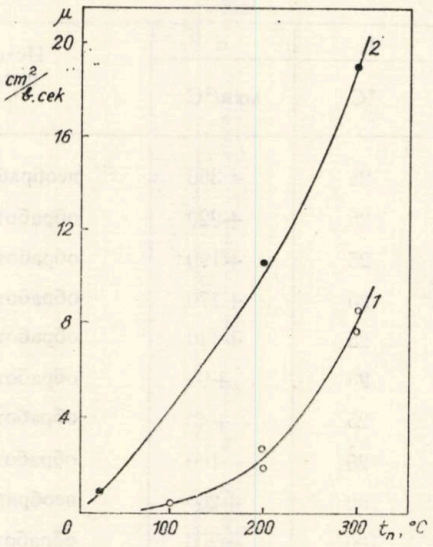


Рис. 5. Зависимость подвижности Холла от температуры подложки: 1 — для пленок, полученных из исходного вещества, термически необработанного: 2 — для пленок, полученных из исходного вещества, предварительно термически обработанного в вакууме.

для пленок, полученных из предварительно термически обработанного испаряемого вещества (с целью удаления летучих примесей), а также для пленок, изготовленных на сильно нагретых подложках, для которых имеется меньшее число примесей и хорошая кристаллическая структуры (рис. 3).

Отмечался также рост удельного сопротивления по мере возрастания скорости испарения (температуры испарителя) для пленок одинаковой толщины, когда остальные экспериментальные условия одинаковые. Это согласуется с предположением, что для больших скоростей испарения колисество примесей, содержащихся в пленке должно расти вследствие сильнойд иссоциации вещества в момент испарения.

4. ВЫВОДЫ

Электрические свойства тонких пленок телурида свинца сильно зависят от условия приготовления образцов и особенно от температуры подложки.

На слабых нагретых подложках (30—190°C), из термонеобработанного порошка PbTe получаются низкоомные слои (0,5—1,0 Ω см), тогда как из термообработанного порошка получаются высокоомные слои PbTe (5,0—6,0 Ω см).

Избыточные атомы Pb создают донорные уровни, расположенные на расстоянии 0,035—0,04 эв над валентной зоной, а избыточные атомы Te создают акцепторные уровни, расположенные на расстоянии 0,15—0,20 эв ниже зоны проводимости.

Исследуемые нами пленки имели постоянную Холла порядка 0,025—18,6 $см^2$/кулон, что соответствует значениям концентрации носителей между 2.10^{20} и $2{,}8.10^{17}$ $см^{-3}$ и значению подвижности между 0,01 и 19,00 $см^2$/в.сек. Подвижность носителей тока растет с ростом температуры подложки, при которой получаются соответствующие слои.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. E. Bobe* and *H. Levinstein*, Phys. Rev. 96, 2, 259 (1954).

2. *A. Goswani* and *S. S. Koli*, Proc. of the Int. Symp. held at Clousthal-Götingen in Sept. 1965 on Basic Problems in thin Film Physics, edited by R. Niedermayer and H. Mayer, VANDEN HOECK and RUPRECHT in Götingen, 646.

3. *P C. Bourgeois* et *M. Moulin*, C. R. Acad. Sci. 264, B, 1830 (1967).

4. *И. Спынулеску-Карнару*, Кандидатская диссертация, Москва, 1964 г.

5. *I. Spinulescu-Carnaru*, Phys. Stat. sol., *18*, 769 (1966).

6. *Д. М. Чижиков и В. П. Счастливый*, Теллур и теллуриды, Наука, Москва, 1966 г.

7. *F. Oprea*, Teoria proceselor metalurgice, EDP, Bucureşti, 1966.

8. *В. И. Балтакс*, Диффузия в полупроводниках в Полупроводники в науке и технике, том. I, Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1957 г.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

CHIMIE ANORGANICĂ

C.Z.: 545.38 : 544.17 : 661.8 : 661.634 : 546.815

ETUDE CONDUCTOMETRIQUE DE LA REACTION DE PRECIPITATION DE L'ION DE PLOMB AVEC L'ACIDE PHOSPHOREUX *

GR. TEODORESCU, ILEANA NICULESCU, ANA MARIA LUPU, FLORICA POPESCU

L'étude présente les résultats réalisés par la méthode conductométrique sur la précipitation de l'ion de plomb avec l'anion phosphoreux.

Le phosphite de plomb peut être obténu à la suite de la réaction entre un scl de plomb et le phosphite d'ammonium (H. Rose, J. Berzelius) ou avec l'acide phosphoreux (L. Amatt). Le phosphite se dissout dans l'acide azotique à froid ; il se transforme en pirophosphate, à chaud (1).

Dans certaines conditions, on obtient des phosphites basiques. Traitant le phosphite de plomb avec de l'acide phosphoreux, on obtient le phosphite avec la composition $PbH_2(HPO_3)_2$ (1) ; à chaud, le phosphite de plomb avec une solution de NH_4OH se transforme en dioxydiphosphite de plomb $2PbO.2PbHPO_3.H_2O$. On obient le phosphite bibasique $2Pb0.PbH\ PO_3$ (2) en traitant le phosphite d'ammonium avec de l'acetate basique de plomb.

Etant donné le nombre réduit d'indications existant dans la littérature, concernant les phosphites de plomb, afin de connaître d'une façon plus approfondie la réaction entre les ions de plomb et de phosphite, nous avons entrepris une étude conductométrique de la précipitation des ions de plomb avec du phosphite.

Les déterminations ont été faites avec un conductomètre type O.K. 102.

Le résultat des titrages conductométriques figure dans les diagrammes 1—10, l'abscisse montrant le volume de réactif ajouté et l'ordonnée, la conductibilité de la solution.

Le diagramme Nr. I montre la marche du titrage conductométrique de l'ion de plomb (Pb) avec l'ion phosphite, utilisant le $Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m et H_3PO_3 1 m. Des dates du diagramme on observe une rupture de la courbe de titrage conductométrique qui correspond au point d'équi-

* Ouvrage reçu chez rédaction à 4 May 1968.

valence à 4,5 cc. H_3PO_3 1 m, qui correspond au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{7}{6}$ ou Pb % 74,90 et PO_3 % 23,22.

Dans le diagrame Nr. II, on a gardé la même concentration de la solution $Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m, mais on a varié la concentration de

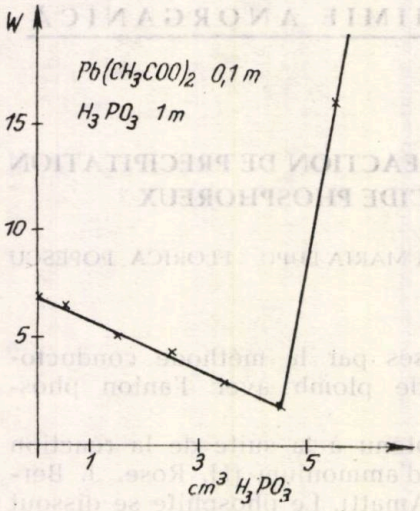


Diagramme No. I

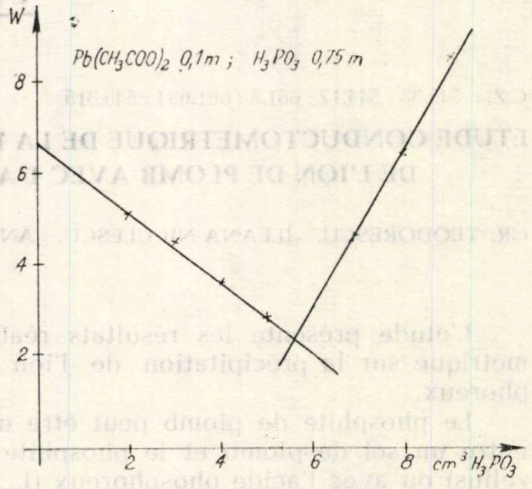


Diagramme No. II

l'acide phosphoreux, utilisant une solution de 0,75 m. On obtient un diagramme avec un seul angle, le point d'équivalence étant au 5,5 cc. $H_3PO_3 \cdot 0{,}75$ m, ce qui correspond au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{7}{6}$.

Le diagrame No. III montre le titrage du $Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m avec l'acide phosphoreux 0,5 m. On obtient une rupture à 6,5 cm^3 H_3PO_3

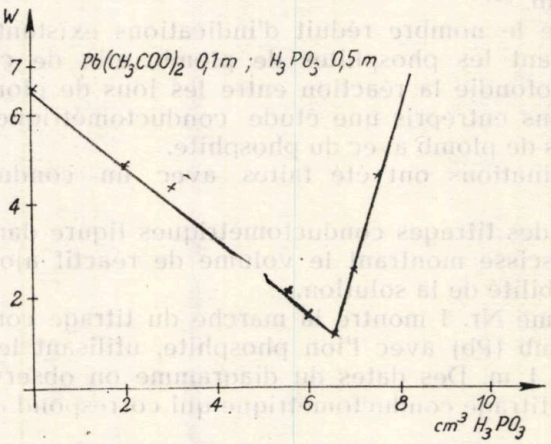


Diagramme No. III

0,5 m. En analysant le précipité qui apparaît à l'équivalence, on obtient le rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{7}{6}$.

Le diagramme No. IV représente le titrage du $Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m avec H_3PO_3 0,25 m. La rupture de la courbe s'observe à 13 cc. H_3PO_3 0,25 m et correspond au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{8}{7}$.

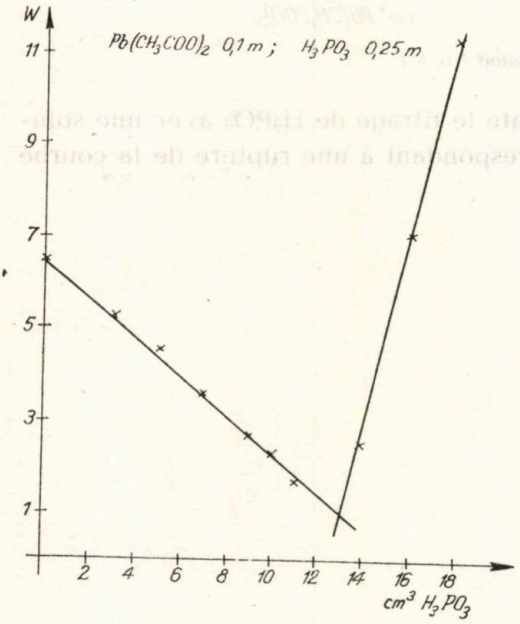


Diagramme No. IV

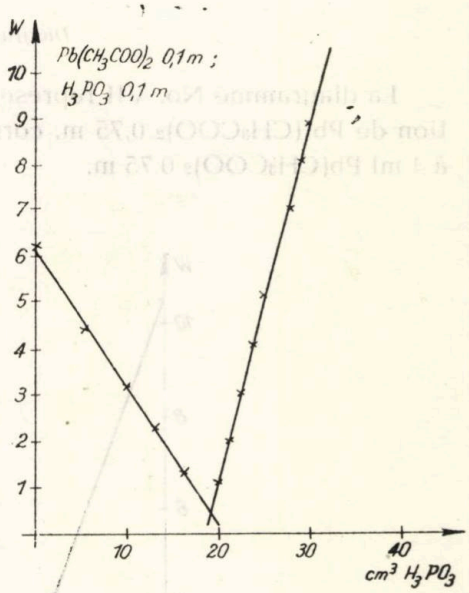


Diagramme No. V

Le diagramme No. V, le dernier de la série des titrages du $Pb(CH_3COO)_2$ avec H_3PO_3, représente le titrage du $Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m avec H_3PO_3 0,1 m.

On obtient la rupture à 27 cm^3 H_3PO_3 0,1 m qui correspond au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{8}{7}$.

Dans le titrages conductométriques suivants on a étudié le titrage inverse de l'ion de phospite avec l'ion de plomb.

Ainsi, dans le diagramme No. VI, on a titré H_3PO_3 0,1 m avec du $Pb(CH_3COO)_2$ 1 m. On observe la rupture de la courbe à 2,5 ml $Pb(CH_3COO)_2$ 1 m ; les dates de l'analyse précisent le rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{7}{6}$.

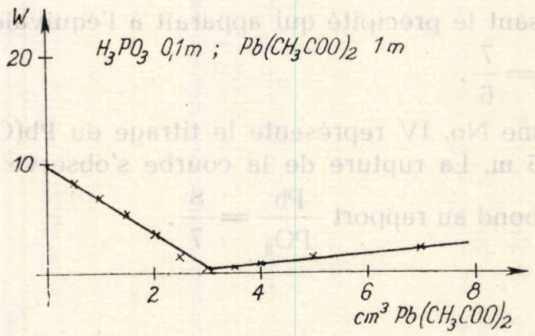
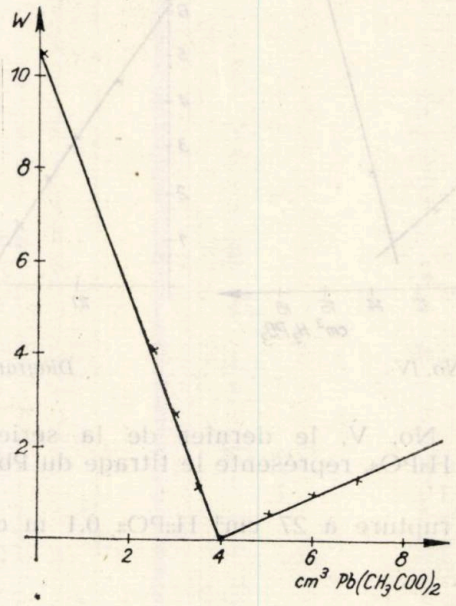


Diagramme No. VI

La diagramme No. VII représente le titrage de H_3PO_3 avec une solution de Pb $(CH_3COO)_2$ 0,75 m. correspondant à une rupture de la courbe à 4 ml $Pb(CH_3COO)_2$ 0,75 m.



Daig:amme No. VII

Le rapport $\frac{Pb}{PO_3}$ calculé resulte $\frac{8}{7}$.

Les diagrammes No-s VIII, IX et X représentent les titrages H_3PO_3 0,1 m avec des solutions plus dilluées de $Pb(CH_3COO)_2$.

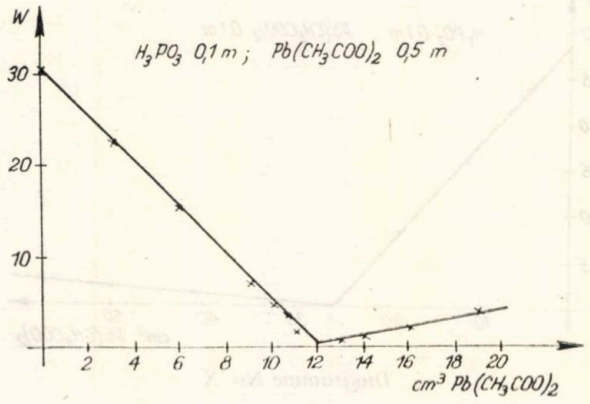


Diagramme No. VIII

Dans le diagramme No. VIII on utilise le $Pb(CH_3COO)_2$ 0,5 m, au quel correspond au titrage une rupture de la courbe à 12 ml $Pb(CH_3COO)_2$ 0,5 m, correspondant au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{8}{7}$.

Les diagrames nos IX et X représentent le titrage H_3PO_3 0,1 m avec quel correspond au titrage une rupture de la courbe à 12 ml

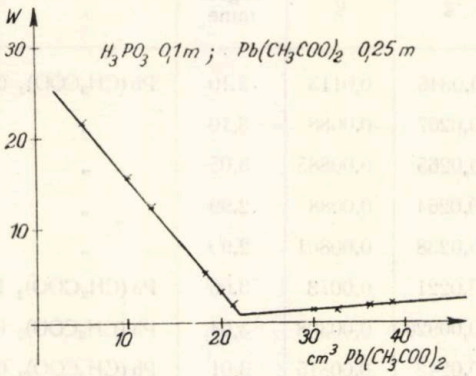


Diagramme No. IX

On obtient une rupture de la courbe à 22 ml $Pb(CH_3COO)_2$ 0,25 m, correspondant au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{8}{7}$ et une rupture de la courbe à 25 ml $Pb(CH_3COO)_2$ O,1 m, qui correspond au rapport $\frac{Pb}{PO_3} = \frac{8}{7}$.

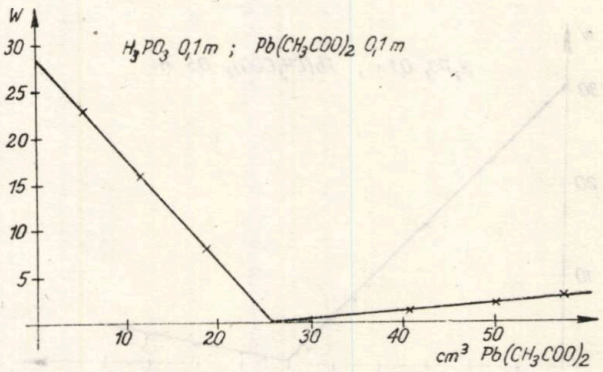


Diagramme No. X

Le tableau No. 1 contient les rapports Pb/PO_3 résultants du diagramme, calculés également à l'aide des analyses chimiques. On observe qu'en fonction des concentrations d'acide ou de sel de plomb on obtient des composés basiques non-unitaires. Le rapport entre le Pb et le PO_3 varie de 3,05 à 2,96 et la formation de deux phosphites basiques ayant comme formule 6 $PbHPO_3.PbO$, et 7 $PbHPO_3.PbO$ est possible.

La substance reste stable par séchage dans le vide à l'aide du pentoxyde de phosphore.

Tableau No 1

No. déter.	Pb/PO_3 calc.	Pb g	PO_3 g	Pb/PO_3 diagramme	Réactifs.
I	3,06	0,0346	0,0113	3.10	$Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m, H_3PO_3 1 m
II	3,03	0,0267	0,0088	3,10	„ H_3PO_3 0,75 m
III	3,01	0,0265	0,00885	3,05	„ H_3PO_3 0,5 m
IV	2,99	0,0264	0,0088	2,99	„ H_3PO_3 0,25 m
V	2,97	0,0238	0,00801	2,9)	„ H_3PO_3 0,1 m
VI	3,02	0,0221	0,0073	3,06	$Pb(CH_3COO)_2$ 1 m H_3PO_3 0,1 m
VII	3,00	0,00926	0,00308	3,04	$Pb(CH_3COO)_2$ 0,75 m, H_3PO_3 0,1 m
VIII	2,96	0,0242	0,00815	3,01	$Pb(CH_3COO)_2$ 0,5 m, „
IX	2,95	0,0251	0,0085	2,90	$Pb(CH_3COO)_2$ 0,25 m, „
X	2,965	0,0219	0,0074	2,92	$Pb(CH_3COO)_2$ 0,1 m, „

Analyse chimique

Le phosphite de plomb se prépare dans les conditions établies par équivalence. Le précipité de couleur blanche obtenu se filtre dans un creuset filtrant G3 et se sèche dans le vide.

Méthode No. 1

On prend une preuve de phosphite de plomb qu'on traite avec de l'acide sulphurique 20% ; le sulphate de plomb obtenu se filtre, se dissout dans une solution saturée d'acétate d'ammonium et on fait le dosage complexonométrique du plomb. Dans le filtrat, on fait le dosage iodométrique de l'ion phosphite.

Méthode No. 2

On prend une preuve de phosphite de plomb (0,1—1 g). On dissout dans une solution saturée d'acétate d'ammonium et on le met dans un balon jaugé de 250 cm^3. Sur cette solution on dose le plomb complexonométrique, en présence du phosphite ; sur une autre preuve on fait le dosage iodométrique de l'anion phosphite, en présence du plomb. Cette méthode est plus rapide que la première par ce qu'elle ne nécessite la séparation des ions étudiés. Le phosphite peut être dosé par la méthode iodométrique en présence du plomb sans la formation de la iodure de plomb, étant donné que le plomb est bloqué par l'acétate d'ammonium.

Le dosage du cation de plomb

Dans une preuve de 5 cm^3 de solution a analyser, on ajoute 20 cm^3 complexonate de magnesium, 20 cm^3 solution tampon basique (pH=10), 1 mg indicateur noir eriochrome T et on titre avec une solution complexon III, jusqu'au virage de la couleur rouge dans un bleu net.

Calcul :

1 cm^3 solution 0,01 m Complexon III corespund a 0,00207 g Pb
g Pb (en preuve) = no. ml complexon III $\times$ 0,00207.

Le dosage de l'anion phosphite

Dans une preuve de 25 cm^3 de solution on ajoute 50 cm^3 de solution saturée de borax, 10 cm^3 solution d'iode et on la laisse dans l'obscurité, pendant 20 minutes. On ajoute 2 cm^3 acide acétique glacial et on titre avec du tiosulphate de sodium en présence d'amidon.

Calcul :

1 cm^3 solution de thiosulphate de sodium 0,1 n correspond à 0,00407 g PO_3.

g.PO_3 (en preuve) = $(N_1f_1—N_2F_2)$ 0,00407

on :

N_1—No de cm^3 solution de l'iode 0,01 n.
f_1 — le facteur de la solution de l'iode
N_2 — No de cm^3 solution de thiosulphate de sodium 0,1 n.
f_2 — le facteur de la solution de thiosulphate de sodium.

Réactifs utilisés

Solution 0,01 m complexon III ; solution 0,01 m complexonat de magnesium ; solution tampon basique (pH=10) contenant 54 g clorure d'ammonium et 350 cm^3 amoniac concentré au litre ; indicateur solide de noir eriochrome T et chlorure de sodium en rapport 1/100 ; solution 0,1 n de l'iode ; solution 0,1 n de l'iode ; solution 0,1 n de thiosulphate de sodium ; solution saturée d'acétate d'ammonium ; solution saturée de borax.

Laboratoire de chimie minerale.
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest.

BIBLIOGRAFIE

1. *Mellor I. W.* — Inorganic and theoretical chemistry vol. VIII. N. P., p. 155, p. 156.
2. *Pascal* — Nouveau traité de chimie minérale. Ed. 1956. Tome X — Azote-Phosphore.
3. *Kebrich N. S.* — Patents 2.483, 496, 1949.
4. *Kolthoff I. M.* — Sandell — Manual de analiză cantitativă anorganică. New York 1955.
5. *Pribil* — Complexonii în chimia analitică Ed. 1961.
6. *I. Van Wazer* — Phosphores and its compounds Ed. 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 2

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 66.0 : 631.82 : 541.132 : 633

SUBSTANȚE IONITICE NATURALE — MATERII PRIME PENTRU OBȚINEREA UNOR NOI SORTIMENTE DE ÎNGRĂȘĂMINTE MINERALE*

T. IONESCU, I. GH. CONSTANTINESCU

Sarcina principală pentru creșterea producției agricole, revine în mare parte industriei chimice, cu ramurile ei multiple de producere a îngrășămintelor, antidăunătorilor și biostimulatorilor.

În ultima vreme, cu toate că producția mondială de produse agroalimentare a crescut mai rapid decît populația, înregistrînd în perioada 1958—1968 o creștere de 16% față de 13,4% a populației, peste jumătate din omenire persistă într-o stare de subalimentație cronică.

Specialiștii consideră că sînt suficiente posibilități pentru mărirea substanțială a nivelului recoltelor și a productivității agricole prin: extinderea suprafeței arabile; utilizarea celor mai avansate procedee agrotehnice; îmbunătățirea structurii agrare; utilizarea eficientă a îngrășămintelor.

Creșterea necontenită a producției de îngrășăminte datorită cerințelor sporite ale agriculturii, ridică probleme tehnico-economice de mare importanță teoretică și practică. Trebuiesc îmbunătățite procedeele tehnologice de fabricație; trebuie lărgit sortimentul acestora; trebuiesc găsite căile de micșorare a prețului de cost și implicit de mărire a randamentului de utilizare.

Agricultura ridică și problema legată de necesitatea reducerii pierderilor în substanță activă, care intervin la administrarea îngrășămintelor în sol. Din cca. 400 kg îngrășăminte azotoase administrate la ha, numai 250 kg sînt consumate direct de plante. Pierderile sînt tot atît de mari și la îngrășămintele fosfatice și cele potasice.

Plecînd de la necesitatea obținerii unor noi sortimente de îngrășăminte a căror calități să contribuie la micșorarea pierderilor în substanță activă prin levigare și la reglarea proceselor în sol, ne-am propus să studiem posibilitatea sintetizării unor îngrășăminte ionitice, greu levigabile, folosind ca materie primă substanțele ionitice-naturale.

Un asemenea îngrășămînt ar trebui să aibe calități ca: să fie cît mai complex conținînd cantități suficiente din principalele elemente

* Manuscris predat la redacție la 10 octombrie 1968.

nutritive ; să aibe rezistență mecanică mare ; să nu fie ușor levigabile ; prețul de cost să fie cît mai mic ; să poată pune la dispoziția plantelor în mod treptat cantitățile necesare de elemente nutritive, putînd în acest fel să asigure culturilor în rotație o rezervă suficientă în elemente nutritive.

Introducerea în sol a îngrășămintelor ionitice va permite reglarea circulației elementelor nutritive în cadrul procesului complex de nutriție a plantelor, prin eliberarea acestora numai în doze solicitate.

La introducerea în sol a îngrășămintelor în forme clasice la o viteză (V_I) de migrare a elementelor nutritive (solubilizate în apă), mai mare decît viteza (V_{II}) de asimilare a elementelor nutritive de către plante, interveneau pierderi întrucît într-un timp scurt elementele nutritive neasimilate ajungeau în zonă (H_{II}) de unde planta nu-și mai putea procura hrana (Fig. A).

Spre deosebire de îngrășămintele clasice, îngrășămintele ionitice, greu levigabile, vor rămîne timp îndelungat în zona de administrare

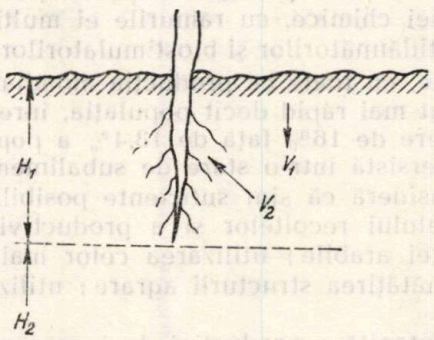


Fig. A.

(H_I) și în acest caz viteza (V_{II}) de asimilare nu va mai putea influența negativ procesele de nutriție.

Îngrășămintele ionitice sintetizate sînt de tipul : R-X ; R-Y ; R-XY (R-suportul mineral, X-ioni de amoniu, Y-ioni de potasiu).

Materialele folosite

În determinările experimentale ne-am axat pe folosirea unor substanțe minerale ionitice indigene, care se găsesc în zăcăminte industrializabile. La alegerea acestor minerale s-a ținut cont de compoziția chimico-mineralogică, forma de zăcămînt, modul de prezentare a mineralizației, calitatea minereului, rezervele și în primul rînd dacă prezintă proprietăți de schimb ionic.

Dintre minerale, s-au folosit argilele. Formate prin procese de sedimentare care au loc la suprafața scoarței ele sînt rezultatul acumulării în diverse condiții și medii a materialului rezultat de pe urma ero-

ziunii, căruia i se adaogă resturile organismelor, materialul vulcanic sau piroelastic și în cantități minime materialul cosmic.

Principalele grupe de minerale argiloase cu care s-a lucrat sînt: grupa micelor hidrate din care am folosit vermiculitul și glauconitul; grupa montmorilonitului din care am folosit bentonita.

Ca surse de elemente nutritive s-au folosit azotatul de amoniu, ureea, clorura de amoniu, soluții amoniacale, clorura de potasiu și sulfatul de potasiu.

1. *Glauconitul.* Este un silicat complex de fier, aluminiu, calciu și potasiu. Se găsește în rocile sedimentare. Este un mineral de origină exclusiv marină, de mică adîncime. Se formează în ape relativ liniștite în condiții de oxigenare moderată, prin precipitarea unor complecși de geluri coloidale sau prin transformarea unor minerale ferice (biotit, piroxen).

La noi în țară se găsește sub formă de nisipuri verzi glauconitice, în formațiunile cretacice și terțiare și anume în depozitele albiene și cenomaniene din sudul Dobrogei, lîngă Cernavodă.

Prezintă proprietatea de schimb ionic datorită cationilor de potasiu care pot fi înlocuiți ușor.

Analizele efectuate asupra nisipului glauconitic indigen au urmărit determinarea compoziției chimice, a capacității de schimb ionic și a unor proprietăți fizice.

Compoziția glauconitului analizat este:

K_2O 9,5%; Na_2O 2%; Fe_2O_3 16,1%; FeO 1,8%;

MgO 4,5%; Al_2O_3 10,6%; $Si\,O_2$ 54%.

2. *Vermiculitul,* are o situație intermediară între mineralele de tip mică și mineralele argiloase tipice — bentonita.

Vermiculitul este format din biotită stratificată. Posedă o rețea neregulată cu incluziuni de înlocuire în straturile tetraedice. Prin încălzire, apa dintre particole se evaporă, ceea ce duce la o dilatare importantă a grăunciorilor în direcția perpendiculară cu planul cristalelor din rețea. Cationul de schimb este potasiul.

În țara noastră se găsește în Banat, în comuna Berzasca.

Compoziția chimică determinată indică:

$Si\,O_2$ — 33,7%; H_2O — 19,3%; Al_2O_3 — 15%; $Mg\,O$ — 25%

Fe_2O_3 — 3,5%; $Ca\,O$ — 1,2%; K_2O — 0,9%.

3. *Bentonita.* Se caracterizează printr-o structură stratificată alcătuită din pachete de straturi formate din oxid de siliciu și oxid de aluminiu legate prin cationi Na^+, K^+, Ca^{2+}, Mg^{2+}. În stare uscată distanța dintre pachete este de 8,6 Å, iar la saturare cu apă 19,6 Å. Această structură conferă bentonitei proprietatea de a-și mări volumul prin îmbibare cu apa care poate pătrunde între pachetele de straturi ale rețelei cristaline.

Ionii de Na^+, K^+ și Ca^{2+} foarte mobili conferă bentonitei proprietăți de schimbător de ioni.

Capacitatea de schimb ionic este cu atît mai pronunțată, cu cît capacitatea de gonflare este mai mare. Aceasta se explică prin pătrunderea soluțiilor prin interstițiile cristaline pînă la ionii de schimb.

În experimentări au fost folosite bentonite de Valea Chioarului, bentonite de Răzoare și bentonite de Orașul Nou a căror compoziție este :

	SiO_2%	Al_2O_3%	Fe_2O_3%	CaO%	MgO%	K_2O%
Bentonită de Răzoare	50	25	0,4	8,83	1	1,75
Bentonită de Orașul Nou	74	15	3	1,5	3	0,2
Bentonită de Răzoare	75	14	1,5	1,2	2,3	0,3

Bentonita a fost activată prin tratare cu acizi minerali cînd se formează acizi alumino-silicici, care-i conferă caracter acid și totodată o capacitate mai mare de schimb cationic.

Procesul tehnologic utilizat

În laborator a fost preconizată și realizată o instalație în care s-au preparat îngrășămintele ionitice (fig. 1).

Materia primă este introdusă într-un concasor (1) cu ambele fălci mobile în care se realizează sfărîmarea bulgărilor. Materialul ieșit de

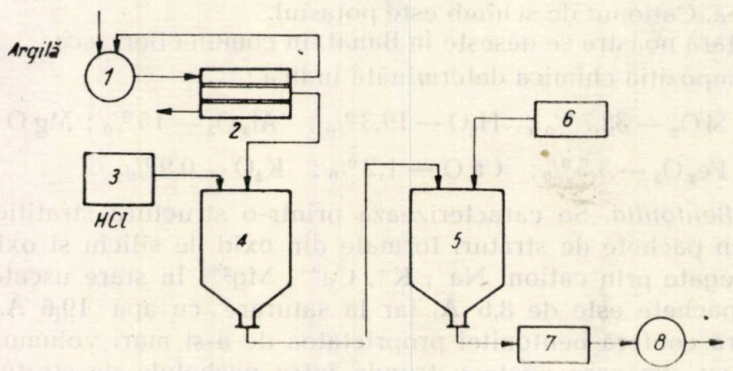


Fig. 1. Instalație pentru producerea îngrășămintelor ionitice.

la concasor este introdus într-un aparat de cernut (2) de unde fracțiunea grosieră este reluată și introdusă în concasor iar praful evacuat. Fracțiunea de 1,5—4 mm este reținută și introdusă într-un reactor (4) unde are loc procesul de preparare a argilei-ionitice. Argila activată este introdusă în reactorul (5) principal unde simultan din rezervorul (6) se introduce și soluția care conține elementul nutritiv. Procesul de schimb ionic care are loc în acest reactor conduce la obținerea îngrășământului ionitic.

După saturarea completă a argilei ionitice cu ioni nutritivi, îngrășământul este introdus într-un uscător (7) apoi într-un granulator (8) de unde este condus spre depozitare.

Instalația simplă, nu necesită materiale speciale de execuție și nici condiții tehnologice deosebite de funcționare.

Aceste îngrășăminte au fost experimentate în cadrul unor probe biologice de scurtă durată, care au consfințit utilitatea și eficiența lor sporită. În prezenta notă vom reda cîteva din rezultatele cele mai interesante care au determinat continuarea și dezvoltarea cercetărilor în această direcție.

Determinări experimentale

Pentru stabilirea eficienței îngrășămintelor ionitice, au fost montate experiențe în vase de vegetație tip Mitscherlich, în care s-au studiat calitativ efectele produse de acestea în comparație cu îngrășămintele clasice.

În experimentări s-au folosit vase de vegetație cu o capacitate de 1,5 kg umplute cu nisip de Văleni levigat. Au fost folosite soluții nutritive Prianișnicov : NO_3NH_4 — 0,24 g/l ; Ca HPO_4–$_2H_2O$ — 0,172 g/l ; Mg SO_4 — 0,06 g/l ; Ca SO_4 — 0.344 g/l ; Hcl — 0,160 g/l ; $Fecl_3$ — 0,025 g/l din care lipsea azotatul de amoniu.

Ca plantă de studiu a fost folosit porumbul din soiul Minhibrid 511.

Experiențele au fost efectuate în 3 repetiții. Dozele de elemente nutritive au fost în concordanță cu dozele uzuale folosite în agricultură.

Influența ionilor de amoniu și potasiu fixați pe bentonită

În experiență au fost montate vase martori fără ioni de azot și potasiu ; vase cu doze de 0,5 ; 1 și 1,5 g. N_2/vas sub formă de NO_3NH_4 ; vase cu doze de 0,5 ; 1 și 1,5 g.K/vas, sub formă de ClK ; vase cu doze de 4,5 ; 9 și 13,5 g. bentonită pură/vas ; vase cu doze de 0,5; 1; și 1,5 g.N_2/vas fixat pe bentonită ; vase cu doze de 0,5; 1; și 1,5 g.K/vas, fixat pe bentonită, și vase cu doze de 0,5 g. N_2—0,5 g.K ; 1 g. N_2—1 g. K și 1,5 g. N_2—1,5 g. K fixat pe bentonită.

Măsurătorile biometrice au fost făcute la fiecare 5 zile în cursul dezvoltării plantelor, acestea urmărindu-se numai în primele 50 zile de la însămînțare.

În vasele tratate cu bentonită, s-a observat o dezvoltare mai rapidă a tuturor plantelor, decît la probele martor, maximum obținîndu-se la o doză de 9 g bentonită/vas (Fig. 2).

Influența favorabilă exercitată de bentonită se datorește ionilor de K^+, Mg^{2+}, Al^{3+} și Fe^{3+} pe care-i conține bentonita și pe care-i poate pune la dispoziția plantei.

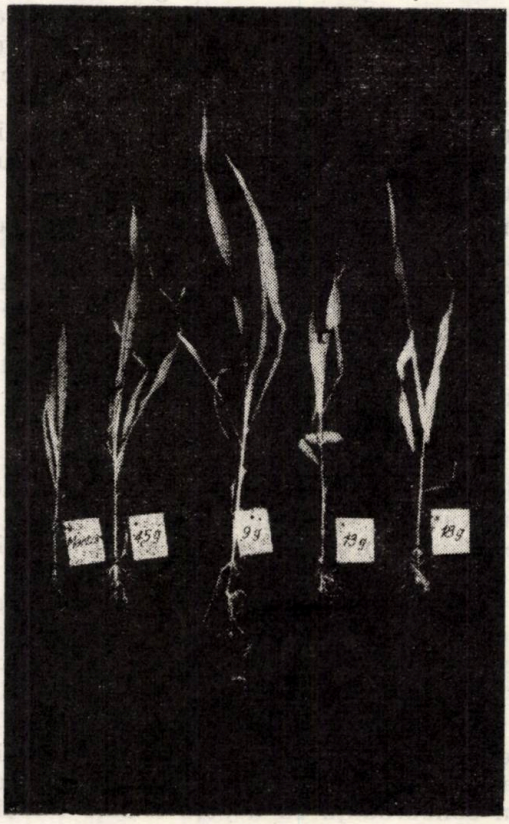


Fig. 2. Plante tratate cu diferite doze de bentonită a) Martor b) 4,5 g bentonită c) 9 g. bentonită d) 13 g. bentonită e) 19 g. bentonită

Evoluția creșterii plantelor în vasele tratate cu NH_4^+ sub formă de NO_3NH_4, s-a situat sub nivelul celor tratate cu NH_4^+ fixat pe bentonită (Diagrama 1).

Creșterea maximă a fost observată la plantele tratate cu doze de 0,5 g. N_2 încărcat pe bentonită (Fig. 3).

Plantele din vasele tratate cu K^+ fixat pe bentonită s-au dezvoltat mai bine decît cele tratate cu aceleași doze de K^+ sub forma de clK (Diagrama 2), dezvoltarea maximă constatîndu-se la plantele tratate cu 0,5 g. K^+ încărcat pe bentonită (Fig. 4).

Administrarea simultană a ionilor de amoniu și potasiu fixați pe bentonită au dat rezultatele cele mai concludente (Fig. 5), (Diagrama 3).

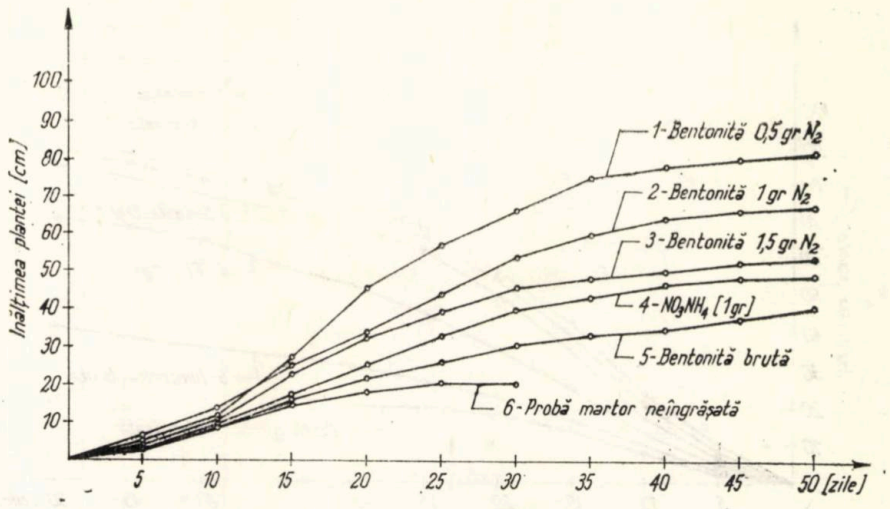


Diagrama nr. 1

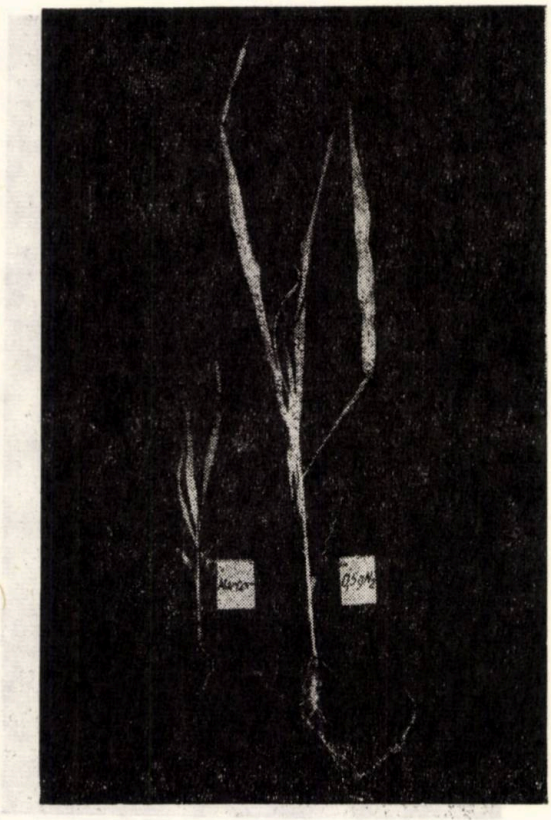


Fig. 3. Plantă tratată cu 0,5 g N_2/var fixat pe bentonită alături de martor.

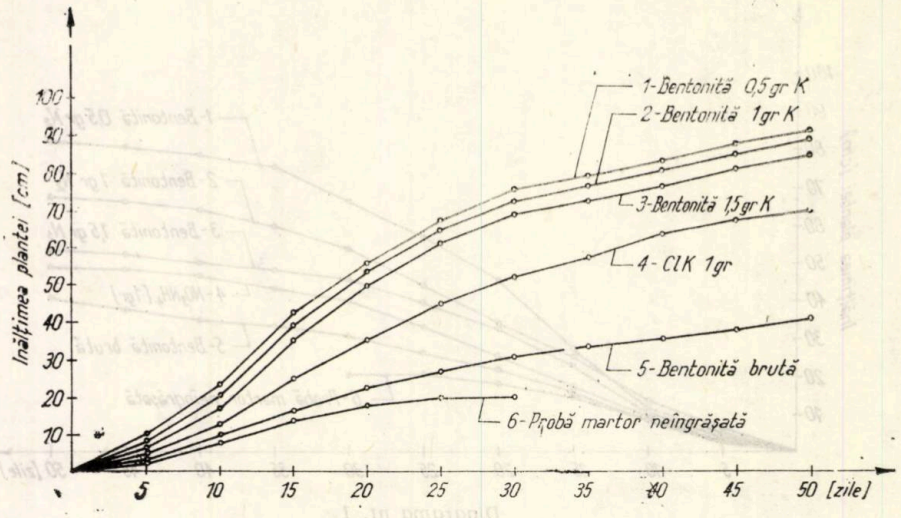


Diagrama nr. 2

Fig. 4. Plantă tratată cu 0,5 g k/vas fixat pe bentonită alături de martor.

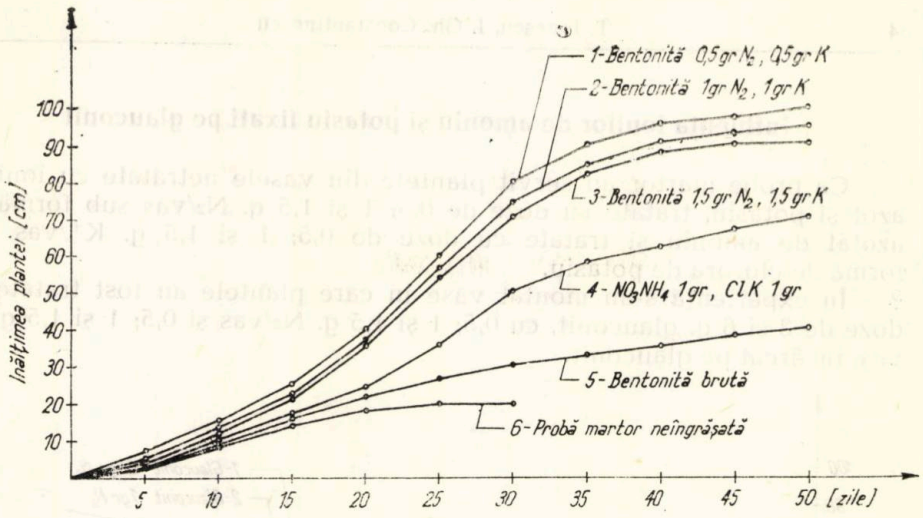


Diagrama nr. 3

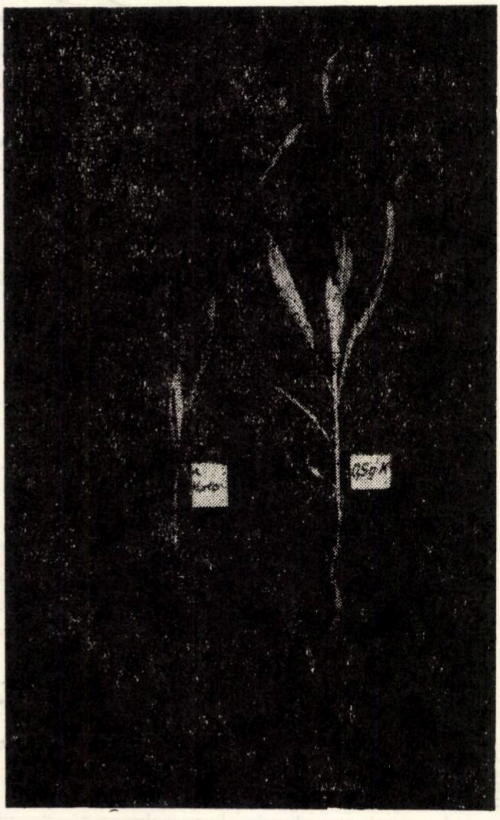


Fig. 5. Plantă tratată cu 0,5 g k și 0,5 g N_2/vas fixat pe bentonită alături de martor.

Influența ionilor de amoniu și potasiu fixați pe glauconit

Ca probe martor au servit plantele din vasele netratate cu ioni de azot și potasiu, tratate cu doze de 0,5; 1 și 1,5 g. N_2/vas sub formă de azotat de amoniu și tratate cu doze de 0,5; 1 și 1,5 g. K^+/vas sub formă de clorură de potasiu.

În experiență s-au montat vase în care plantele au fost tratate cu doze de 3 și 6 g. glauconit, cu 0,5; 1 și 1,5 g. N_2/vas și 0,5; 1 și 1,5 g. K/vas, încărcat pe glauconit.

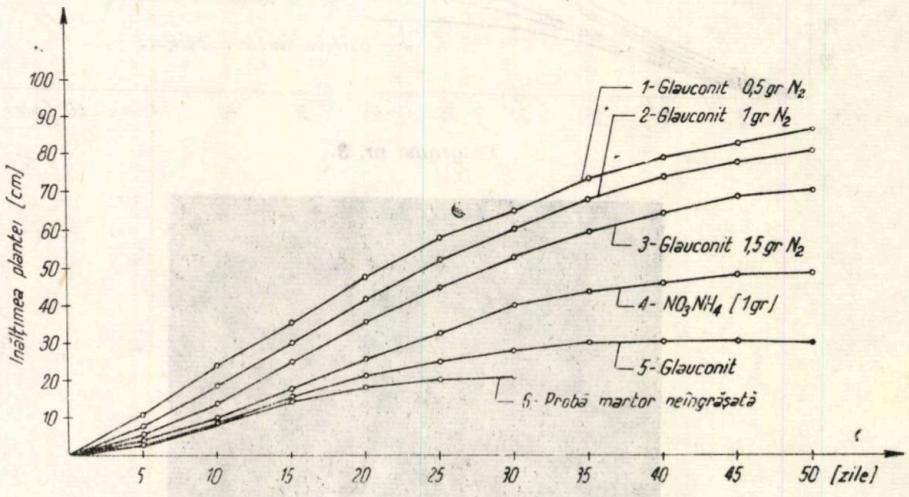


Diagrama nr. 4

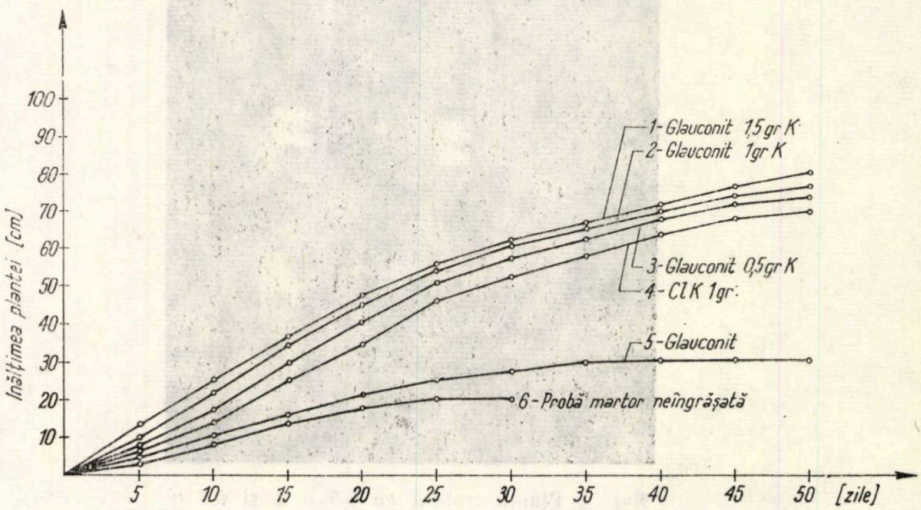


Diagrama nr. 5

La plantele din vasele tratate numai cu glauconit, nu s-a observat o dezvoltare deosebită care să confirme vreo influență a acestuia.

S-a putut constata că plantele din vasele tratate cu azot și potasiu fixat pe glauconit s-au dezvoltat mai bine, decît cele tratate cu amoniu și potasiu sub formă de azotat de amoniu și clorură de potasiu.

Creșterea maximă au prezentat-o plantele tratate cu 0,5 g. N_2/vas fixat pe glauconit (Diagrama 4).

Plantele tratate cu potasiu fixat pe glauconit (Diagrama 5) prezintă o creștere neînsemnată care nu justifică utilitatea acestuia ca îngrășămînt.

Influența ionilor de amoniu și potasiu fixați pe vermiculit

S-au folosit aceiași martori de la experiențele cu glauconit.

Au fost montate vase în care plantele s-au tratat cu doze de 3 și 6 g./vas vermiculit; cu 0,5; 1 și 1,5 g. N_2/vas și 0,5; 1 și 1,5 g K^+/vas încărcat pe vermiculit.

Plantele tratate cu vermiculit brut nu prezintă nici-o particularitate. Plantele tratate cu azot fixat pe vermiculit au avut o dezvoltare superioară martorilor, creșterea maximă fiind obținută pentru doze de 0,5 g. N_2/vas fixat pe vermiculit (Diagrama 6).

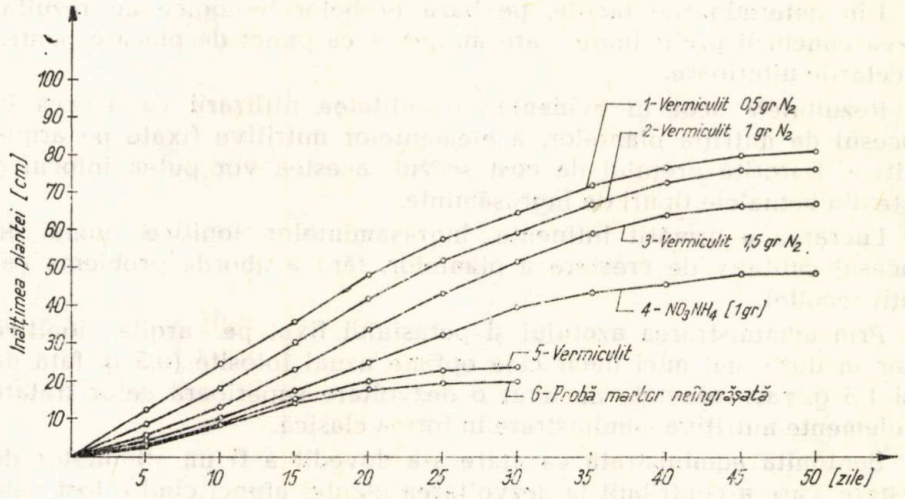


Diagrama nr. 6

Plantele tratate cu potasiu fixat pe vermiculit prezintă o ușoară creștere față de martori, care nu poate justifica administrarea sa pe vermiculit (Diagrama 7).

Dintre cele trei tipuri de îngrășăminte ionitice preparate, cele mai bune rezultate le-au dat îngrășămintele bentonitice.

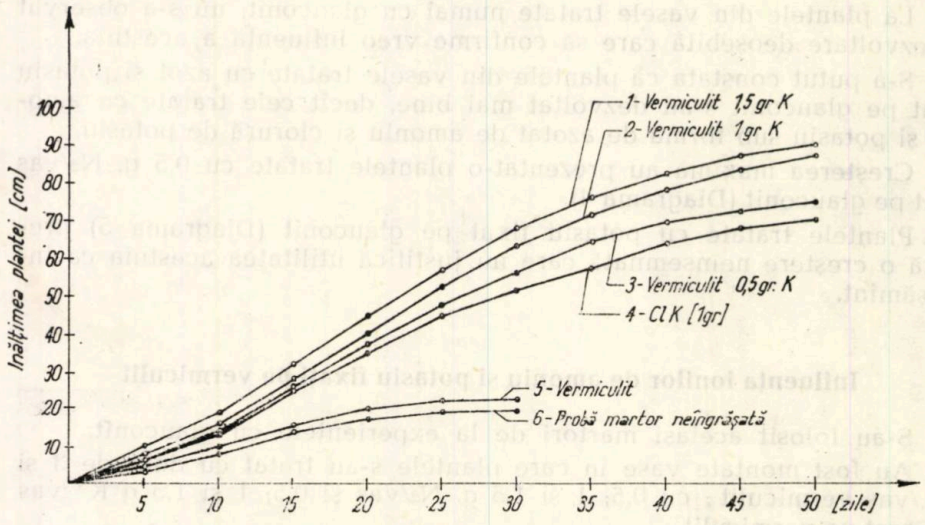


Diagrama nr. 7

Concluzii

Din determinările făcute, pe baza probelor biologice au rezultat cîteva concluzii preliminare, care au servit ca punct de plecare pentru cercetările ulterioare.

Rezultatele scot în evidență posibilitatea utilizării cu succes în procesul de nutriția plantelor, a elementelor nutritive fixate pe argile ionitice. Datorită prețului de cost scăzut, acestea vor putea înlocui o parte din actualele tipuri de îngrășăminte.

Lucrarea a urmărit influența îngrășămintelor ionitice numai în procesul calitativ de creștere a plantelor, fără a aborda problema calității recoltei.

Prin administrarea azotului și potasiului fixat pe argile ionitice chiar în doze mai mici decît cele optime uzual folosite (0,5 g. față de 1 și 1,5 g./vas), plantele au avut o dezvoltare superioară celor tratate cu elemente nutritive administrate în forma clasică.

Bentonita administrată ca atare s-a dovedit a fi un stimulator de creștere, care a contribuit la dezvoltarea plantei atunci cînd a fost dată în doze corespunzătoare.

Obținerea îngrășămintelor pe bază de argile ionitice naturale, vor deschide noi perspective în procesul de chimizare a agriculturii.

Catedra de tehnologia substanțelor anorganice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Adamson, A. W.* — J. Am. Che. Soc. Nr. 69 — 1967.
2. *Amphlett, C. B.* — Inorganic Ion Exchangers. Elsevier Publishing, London, 1964.
3. *Bergman, W.* — Pflanzenernahr — Düng Bodenk 93, 1961.
4. *Davidescu, D.* — Agrochimia — Ed. agricolă. București, 1960.
5. *Davidescu, D.* — Contribuții la problema eficienței îngrășămintelor cu azot. Ed. Academiei, București, 1960.
6. *Fisman, M. A.* — Substanțe minerale utile, ed. Tehnică, Buc., 1953.
7. *Ionescu, T.* — Schimbători de ioni. Ed. Tehnică, București, 1964.
8. *Moldovan, I.* — Tehnologia îngrășămintelor minerale. Vol. I și II, Ed. Tehnică, București, 1964.
9. *Peterburgskii, A. B.* — Schimbul de ioni în sol și asimilarea de către plante a substanțelor nutritive. Izdat. Vișaia Scola. Moskva, 1959.
10. *Prianișnicov, D. N.* — Agrochimia, Vol. I, Moskva, 1956.
11. *Slack, V. I.* — Agricultural Chemicals. Nr. 1, 1964.
12. *Sugita, S.* — Japan Monp. Cont. Res. Inst. Papers. 105, 1963.
13. *Sycara, V.* — Brevet CSR, 110 155/15 Martie 1964.
14. *Szepesi, K.* — Brevet RPU, 147 543/1 Oct. 1960.
15. *Tarabrin, C. A.* — Analele Academiei Timireazev. Moskva, Nr. 3, 1961.
16. *Tendelov, N. I.* — Disc. Farad. Soc. Nr. 1, 1947.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

C.Z.: 66.066.6 : 665.521.4 : 661.183

DESEMULSIONAREA MOTORINEI CU AJUTORUL SCHIMBĂTORILOR DE IONI *

GH. IONIȚĂ, D. GRIGORESCU, S. DIMA

1. **Scopul lucrării:**

In procesul de stripare a motorinei cu abur supraîncălzit se formează o emulsie care prezintă o stabilitate foarte mare, necesitînd pentru sedimentare 10—20 zile. Avînd în vedere calitățile pe care le are aburul supraîncălzit în acest proces nu se poate renunța la utilizarea acestuia. Formarea bulelor mici de vapori de apă creează o suprafață liberă enormă în interiorul masei de motorină, care se vaporizează la contactul cu această suprafață. Vaporii de apă creează nenumărate suprafețe de contact, la care transmiterea căldurii se face cu ușurință. Afară de acțiunea termică de ușurare a vaporizării motorinei (a părților mai ușoare), vaporii de apă au și o acțiune mecanică care ușurează desprinderea vaporilor de motorină din masa lichidă, avînd în acest caz o acțiune de vehiculare.

Pentru distrugerea emulsiei formate în procesul de stripare sînt indicate metodele clasice (filtrarea prin vată de sticlă, încălzirea emulsiei etc.), dar care nu dau rezultate mulțumitoare; din această cauză în lucrarea de față pentru desemulsionarea motorinei s-a încercat o nouă metodă pe baza schimbătorilor de ioni (puternic acizi) CS—1 și CS—2 a căror utilizare în chimia coloidală va putea lua o mare amploare în viitor.

2. **Rezultatele experimentale și interpretarea lor:** emulsia formată în procesul de stripare este de tipul apă în ulei. Apa reprezintă faza

* Manuscris predat la redacție la 12 octombrie 1968.

dispersă iar motorina mediul dispergent. Apa este distribuită sub forma unor picături fine, sferice, care rezultă sub acțiunea compensată a forțelor superficiale dintre apă și motorină. Această emulsie se formează datorită faptului că tipul legăturilor intramoleculare ale apei și motorinei diferă foarte mult. Faza dispersă este un lichid polar iar faza dispergentă este un lichid nepolar.

Faptul că această emulsie este diluată (3—4 cm^3 apă la un litru motorină) ea există un timp îndelungat dispersată puternic datorită posibilităților reduse de ciocnire a particolelor de apă între ele.

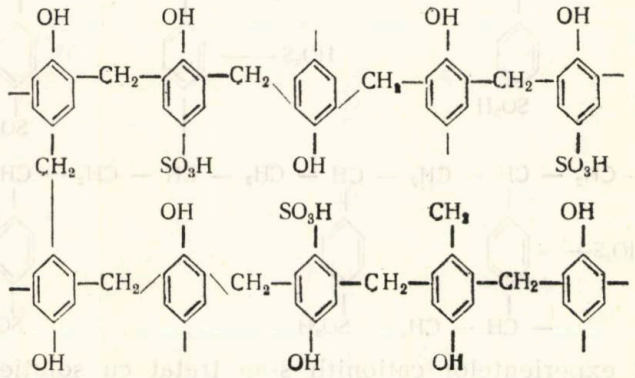
Un rol deosebit în stabilitatea dispersiei îl joacă emulgatorii, care sînt substanțe superficial active, ce micșorează tensiunea superificială dintre faze. Dacă în motorină nu s-ar afla emulgatori (acizi grași, săruri și amino-derivați ai acizilor grași cu numărul atomilor de carbon cuprins între C_{12} și C_{18}, proteine etc.), datorită creșterii mari suprafeței de separare dintre apă și motorină s-ar obține un sistem cu o rezervă mare de energie superficială liberă care ar deveni termodinamic instabil.

Potrivit celui de al doilea principiu al termodinamicii acest sistem trece în forma stabilă prin micșorarea rezervei de energie liberă care se realizează prin micșorarea factorului de intensitate (tensiunea superficială dintre faze). Rolul emulgatorilor sus menționați constă nu numai în micșorarea tensiunii superficiale dintre faze, ci în special în formarea unor pelicule protectoare pe suprafața picăturilor, cu rezistență mecanică, care împiedică coalescența.

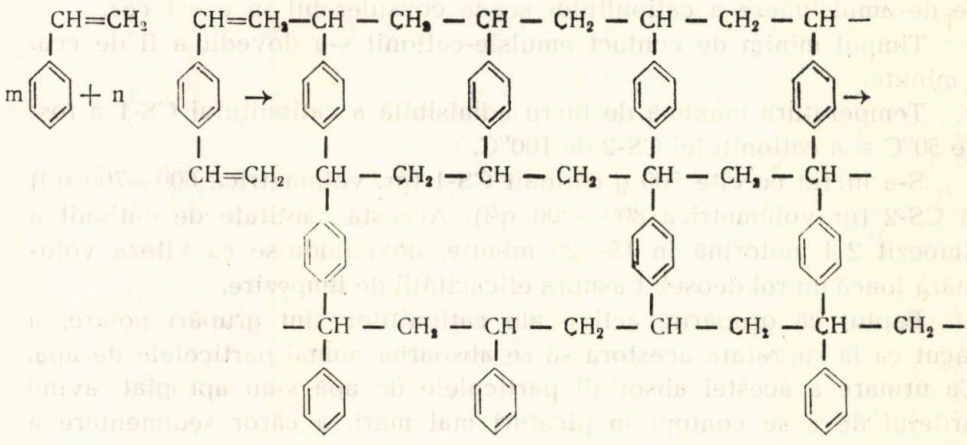
Din cauza acidității ridicate cu mult peste limita admisibilă, motorina se neutralizează cu soluție de NaOH. În urma neutralizării acizii naftenici trec în naftenați de sodiu corespunzători, care se separă de motorină. Datorită acestui proces are loc o reducere a intensității dispersiei, fără a se realiza însă coalescența. Faptul că nu se realizează o suprafață de separare minimă (coalescență) între apă și motorină, se datorește neîndepărtării tuturor emulgatorilor prin neutralizare și antrenării unei cantități infime de NaOH și săruri de sodiu ale acizilor cu un număr mare de atomi de carbon. Sărurile de sodiu ale acizilor cu un număr mare de atomi de carbon provoacă o micșorare foarte mare a tensiunii superficiale ; acțiunea stabilizantă a NaOH se intensifică din cauza adsorbției ionice selective și prin formarea unor straturi electrice duble în jurul particolelor de emulsie.

Pentru distrugerea emulsiei apă/motorină în cadrul lucrării au fost încercate următoarele metode : a) supunerea emulsiei la acțiunea unui cîmp electric de înaltă tensiune. b) filtrarea prin vată de sticlă. c) încălzirea emulsiei.

Rezultatele obținute arată că aceste metode clasice nu pot avea eficacitatea cea mai mare, punîndu-se problema găsirii unui nou procedeu de desemulsionare. Pentru aceasta s-a experimentat o nouă metodă pe baza schimbătorilor de ioni ; astfel s-a putut stabili că pentru distrugerea emulsiei o eficacitate deosebită o pot avea cationiții CS-1 și CS-2 a căror structură se prezintă astfel :



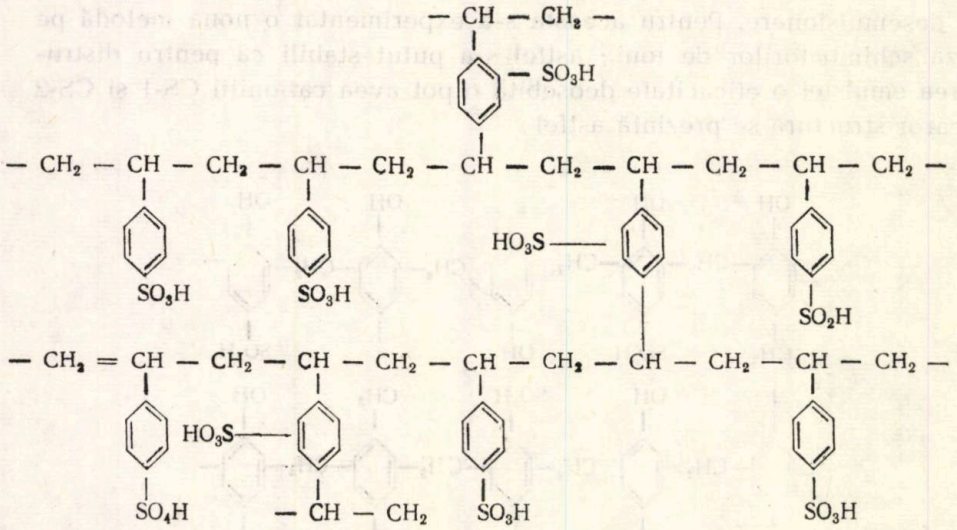
— CS. 1 —



— CS. 2 —

Grupele active ale schimbătorilor de ioni CS-1 și CS-2 sînt funcțiunile SO_3H. Pentru introducerea funcțiunilor SO_3H în cationul CS-2,

copolimerul stiren-divinil-benzen se supune sulfonării obținîndu-se o rășină de tipul :



În cadrul experiențelor cationiții s-au tratat cu soluție de $CaCl_2$ 10%. Soluția de $CaCl_2$ a avut influență hotărîtoare asupra eficacității cationitului. În cadrul lucrărilor s-a evitat soluția de $CaCl_2$ care prezintă o *reacție alcalină* (are ca impuritate CaO) deoarece capacitatea de desemulsionare a cationitului scade considerabil în acest caz.

Timpul minim de contact emulsie-cationit s-a dovedit a fi de cca. 2 minute.

Temperatura maximă de lucru admisibilă a cationitului CS-1 a fost de 50°C și a cationitului CS-2 de 100°C.

S-a lucrat cu cîte 500 g cationit CS-1 (gr. volumetrică 600—700 g/l) și CS-2 (gr volumetrică 800—900 g/l). Această cantitate de cationit a limpezit 2 l motorină în 15—20 minute, dovedindu-se că viteza volumară joacă un rol deosebit asupra eficacității de limpezire.

Faptul că grupările active ale cationiților sînt grupări polare, a făcut ca la suprafața acestora să se absoarbă numai particolele de apă. Ca urmare a acestei absorbții particolele de apă s-au apropiat, avînd prilejul de a se contopi în picături mai mari, a căror sedimentare a fost mult ușurată.

Un alt factor care a contribuit la desemulsionare, a fost înlocuirea ionului de sodiu din emulsie cu ionul de calciu din cationit, care la un anumit raport între ei face ca emulsia să fie foarte nestabilă ; o înlocuire totală ar duce la reversiunea emulsiei, însă acest lucru nu se produce din cauza absorbției apei la suprafața cationitului.

3. Concluzii

În cadrul lucrărilor experimentale s-a dovedit că schimbătorii de ioni CS-1 și CS-2 prezintă o eficacitate bună de desemulsionare a motorinei, datorită grupărilor hidrofile pe care le conține și a ionilor de calciu pe care îi cedează emulsiei captînd din aceasta ionii de sodiu, întregul proces ducînd la instabilitatea emulsiei. Regenerarea cationitului se poate efectua la intervale de timp destul de mari, aceasta constînd în injectarea de soluție de $CaCl_2$ de concentrație 10%.

Catedra de tehnologia substanțelor anorganice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

— *T. Ionescu* — Schimbători de ioni, 1964.

— *Dima M., Scondac, I. Petrariu* — St. cerc. chim. Iași 11, nr. 2/1960.

— *Stach H.* — Angew. chem. 67, 1955, p. 786—787.

— *Trosteanskaia, E. B. ș.a.* — Visokomolek, soedin, 5, nr. 8, 1963, p. 1240—1244.

— *Saldadze, M. K., Paşkov, G. M., Titov, S. V.* — Compuși ionitici polimoleculari, Moscova Goshimizdat 1960.

— *Pepper, K. W., Paisley, H. M. Young, M. A.* — J. Chem. soc. nr. 11, 1953, p. 4097—4105.

— *Polak și Bortel M.* — Prezem Chem. XXXVII, nr. 10, 1958, p. 651.

— *Loiseleur J.* — Techniques de laboratoire. Paris, Ed. Masson, 1949.

— *Isăcescu, A., Păncescu, C., Furnică, S.* — St. cerc. Chim. V, nr. 2. 1957, p. 355 și nr. 4, 1957, p. 655.

— *Vasiliev A. și Vanseidt* — J. prikl. him. XXXI, nr. 7, 1958, p. 1075.

— *Austerwell V. G.* — L'échange d'ions et les échangeurs, Paris. Gauthier Villars. 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 2

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z.: 539.3/.4 : 621-22 : 66.046.37/.38

CONTRIBUȚII LA CALCULUL EFORTURILOR UNITARE ÎN CILINDRI CU PEREȚI GROȘI NEUNIFORM ÎNCĂLZIȚI*

ION MINCĂ

1. *Introducere*

Determinarea eforturilor unitare și deformațiilor în cilindri cu pereți groși neuniform încălziți constitue obiectul a numeroase lucrări de specialitate, relativ recente. Dilatările și scurtările împiedicate, care apar în cazul încălzirii neuniforme a cilindrilor, produc eforturi unitare suplimentare mari, chiar în cazul unor diferențe mici de temperatură între suprafața interioară și cea exterioară [5], (12], [14]. Legea de variație și mărimea eforturilor unitare sînt influențate și de schimbarea modulului de elasticitate (E), coeficientului de contracție transversală (μ) și coeficientului de dilatare termică liniară (α). Influența aceasta e cu atît mai mare cu cît diferențele de temperatură sînt mai mari și de asemeni cu cît temperatura medie este mai mare.

Multe procese industriale, în special în industria chimică, se desfășoară în condiții de temperaturi ridicate și presiune înaltă. Reacțiile chimice care au loc într-un reactor pentru sinteză în stare gazoasă, necesită presiuni de cîteva mii de atmosfere și temperaturi de 800—900°C. În lucrarea [8] se arată că pentru un astfel de reactor, de sinteză a amoniacului, încălzit electric în interior și răcit cu apă în exterior, diferențele de temperatură între cele două suprafețe ale cilindrului ating valori de 800—850°C.

Asupra calculului eforturilor unitare în cilindri cu pereți groși neuniform încălziți se fac aprecieri în lucrările [4], [8], [10], [12] și [13]. În lucrarea [6] sînt determinate relațiile de calcul ale eforturilor unitare, aproximînd variația mărimilor E și α cu temperatura după relații simple. În lucrarea menționată este dat de asemeni și un exemplu de calcul. Ținînd seama de aproximațiile inevitabile care se fac la aprecierea variației modulului de elasticitate, a coeficientului de contracție transversală și a coeficientului de dilatare termică liniară, cu temperatura, problema determinării eforturilor unitare nu poate avea o rezolvare exactă. Admițînd o relație simplă care să aproximeze variația

* Manuscris prezentat la redacție la 4 octombrie 1968.

mărimilor E, μ și α cu temperatura (în acest caz aproximațiile sînt mari), rezultă totuși un calcul laborios, care trebuie efectuat pentru fiecare caz în parte.

În articolul de față se prezintă o metodă simplă de calcul, bazată pe folosirea relațiilor generale de recurență ale metodei celor trei necunoscute. Metoda conduce la un sistem de ecuații liniare cu matrice Jacobi, a cărui rezolvare este foarte simplă [1], [2], [3], [4].

2. *Ipoteze de calcul*

Se consideră un cilindru cu pereți groși încărcat cu presiune interioară și presiune exterioară și încălzit neuniform pe grosimea peretelui. Pe o suprafață cilindrică de rază r toate punctele au aceeași temperatură. Pentru cilindrul de lungime infinită cît și în cazul cilindrului de lungime finită, pentru secțiunile depărtate de fețele frontale, alungirea specifică pe direcția axei cilindrului ε_z este constantă. În aceste condiții, pentru toate punctele de pe suprafața de rază r, oarecare, rezultă aceleași eforturi unitare și deformații. Calculul acestora se face luînd în considerație variația mărimilor E, μ și α cu temperatura. În articolul de față se va considera că funcțiile E, μ și α variază în trepte (v. fig. 1). Împărțind grosimea peretelui într-un număr suficient de

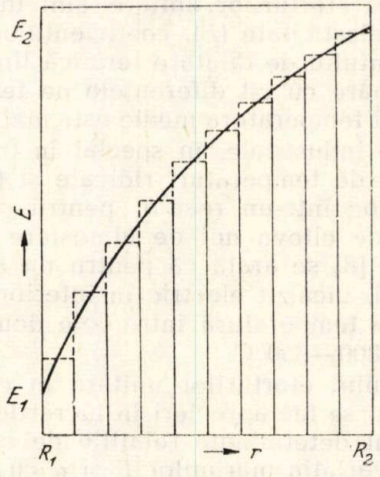


Fig. 1.

mare de intervale, rezultă o aproximare foarte bună a acestor funcții. Diferențele față de valorile reale sînt mai mici decît în cazul cînd se admite aproximarea prin relații simple (parabolice, logaritmice). Pentru un interval (un element din cilindru, cu grosimea peretelui mică) E, μ și α se consideră constante și au valori calculate pentru temperatura corespunzătoare razei medii.

3. *Notații*

Pentru cilindrul dat se vor introduce următoarele notații :

E — modulul de elasticitate, kgf/cm² ;
μ — coeficientul de contracție transversală ;
α — coeficientul de dilatare termică liniară, grd^{-1} ;
r — raza unui punct variabil pe grosimea peretelui cilindrului, cm ;
R_1 — raza interioară a cilindrului, cm ;
R_2 — raza exterioară a cilindrului, cm ;
T — temperatura pentru punctele avînd distanța r față de axa cilindrului, °C ;
T_1 — temperatura suprafeței interioare, °C ;
T_2 — temperatura suprafeței exterioare, °C ;
$\theta = T - T_2$;
$\theta_0 = T_1 - T_2$;
σ_r, σ_t și σ_z — eforturile unitare normale avînd direcțiile razei, tangentei și respectiv direcția axei cilindrului, kgf/cm² ;
ε_r, ε_t și ε_z — alungirile specifice pe direcțiile razei, tangentei și respectiv axei cilindrului ;
u — deplasarea pe direcția razei, cm.

Pentru un element i se va nota :

r_{i-1} — raza interioară, cm ;
r_i — raza exterioară, cm ;
$r_{mi} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$ — raza medie, cm ;
T_{i-1}, T_i și T_{mi} — temperaturile suprafețelor cilindrice avînd razele r_{i-1}, r_i și respectiv r_{mi} ;
$\theta_i = T - T_i$;
$\theta_{0i} = T_{i-1} - T_i$;
E_i, μ_i, α_i — valorile mărimilor E, μ și α, determinate pentru punctele de la jumătatea grosimii elementului ($r = r_{mi}$), corespunzătoare temperaturii T_{mi} ;

$$\sigma_{i-1} = \sigma_{ri-1}, \quad \sigma_i = \sigma_{ri}, \quad \sigma_{i+1} = \sigma_{ri+1}.$$

4. *Relații de calcul pentru eforturile unitare într-un cilindru cu pereți groși neuniform încălziți, considerînd mărimile* E, μ *și* α *constante*

Deformațiile specifice într-un punct oarecare al cilindrului se determină suprapunînd efectele stării de tensiune din punctul respectiv

și al încălzirii. Efectul încălzirii cu temperatura ΔT este o dilatare uniformă pe toate direcțiile :

$$\Delta \varepsilon = \alpha \Delta T \tag{1}$$

Deformațiile specifice totale ε_r , ε_t și ε_z sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\,\sigma_t - \mu\,\sigma_z) + \alpha\,\Delta\,T \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\,\sigma_r - \mu\,\sigma_z) + \alpha\,\Delta\,T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\,\sigma_r - \mu\,\sigma_t) + \alpha\,\Delta\,T \end{aligned} \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații în raport cu σ_r , σ_t și σ_z rezultă :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)}\,[(1-\mu)\,\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_t + \mu\,\varepsilon_z - (1+\mu)\,\alpha\,\Delta T] \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)}\,[(1-\mu)\,\varepsilon_t + \mu\,\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_z - (1+\mu)\,\alpha\,\Delta T] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)}\,[(1-\mu)\,\varepsilon_z + \mu\,\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_t - (1+\mu)\,\alpha\,\Delta T] \end{aligned} \tag{3}$$

Deformațiile ε_r și ε_t se pot exprima în funcție de deplasarea u pe direcția razei, iar ε_z = constant.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}\,, \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \tag{4}$$

Se poate scrie o relație între eforturile unitare σ_r și σ_t din condiția de echilibru, pusă pentru elementul reprezentat în figura 2 :

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r) - \sigma_t = 0 \tag{5}$$

Folosind relațiile (3) și (4) în ecuația (5), după efectuarea calculelor se obține următoarea ecuație diferențială :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+u}{1-u}\,\alpha\,\frac{d(\Delta T)}{dr} \tag{6}$$

În această ecuație, ΔT reprezintă creșterea temperaturii pentru un punct oarecare din materialul cilindrului. Temperatura inițială (T_0) fiind aceeași pentru toate punctele, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T - T_0 = T - T_2 + T_2 - T_0 = \theta + (T_2 - T_0) \\ \frac{d(\Delta T)}{dr} &= \frac{d\theta}{dr} \end{aligned} \tag{7}$$

Soluția ecuației (6) se poate scrie sub forma :

$$u = \frac{1}{r}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{R_1}^{r} \alpha\,\theta\,r\,dr + C_1 r + C_2 \cdot \frac{1}{2} \tag{8}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante.

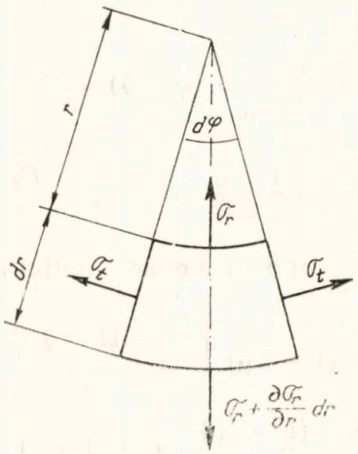


Fig. 2.

Rezultă deformațiile specifice ε_r și ε_t :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{R_1}^{r} \alpha\,\theta\,r\,dr + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\,\theta + C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{R_1}^{r} \alpha\,\theta\,r\,dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \tag{9}$$

Se va nota:

$$\psi = \frac{1}{r^2}\int_{R_1}^{r} r\,\theta\,dr \tag{10}$$

Pentru un flux staționar de căldură prin peretele cilindrului, variația temperaturii pe grosimea acestuia este dată de relația :

$$\theta = \frac{\theta_0}{ln\,\dfrac{R_1}{R_2}}\,ln\,\frac{r}{R_2} \tag{11}$$

Folosind relația (11) în expresia funcției ψ rezultă :

$$\psi = \frac{\theta_0}{ln \frac{R_1}{R_2}} \left[-\frac{1}{4} - \frac{R_1^2}{2} \left(ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} ln \frac{r}{R_2} \right] \tag{12}$$

Introducînd notația (10) pentru funcția ψ în relațiile (9), acestea se scriu sub forma :

$$\varepsilon_r = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (\psi - \theta) + C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \psi + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \tag{13}$$

Rezultă relația de calcul pentru efortul unitar σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)} \left[C_1 - (1-2\mu) \frac{C_2}{r^2} + \mu \varepsilon_z - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{1-\mu} \alpha \psi + (1+\mu) \alpha (\theta - \Delta T) \right. \tag{14}$$

sau,

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)} \left\{ C_1 - (1-2\mu) \frac{C_2}{r^2} + \mu \varepsilon_z + (1+\mu) \alpha (\theta - \Delta T) - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{1-\mu} \alpha \frac{\theta_0}{ln \frac{R_1}{R_2}} \left[-\frac{1}{4} - \frac{R_1^2}{2} \left(ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} ln \frac{r}{R_2} \right] \right\} \tag{15}$$

În paranteză se pot grupa termeni asemenea, r fiind singura variabilă ($\theta - \Delta T = -T_2 + T_0 = \text{constant}$). Se introduc notațiile :

$$A = \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)} \left[C_1 + \mu \varepsilon_z + (1+\mu) \alpha (\theta - \Delta T) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{1-\mu} \frac{\alpha \theta_0}{ln \frac{R_1}{R_2}} \right.$$

$$B = \frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)} \left[(1-2\mu) C_2 - \frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{1-\mu} \right.$$

$$\frac{\alpha\theta_0}{ln\frac{R_1}{R_2}}\ \frac{R_1^2}{2}\left(ln\frac{R_1}{R_2}+\frac{1}{2}\right)\Bigg]$$

$$C=\frac{E}{(1+\mu)\ (1-2\mu)}\ \frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{1-\mu}\ \frac{\alpha\theta_0}{ln\frac{R_1}{R_2}}\ \frac{1}{2}= \tag{16}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{E}{1-\mu}\ \frac{\alpha\theta_0}{ln\frac{R_1}{R_2}}$$

Folosind notațiile A, B și C, date mărimilor constante din relațiile (16), efortul unitar σ_r se poate scrie sub o formă foarte simplă:

$$\sigma_r=A-B\frac{1}{r^2}-C\,ln\frac{r}{R_2} \tag{17}$$

Efortul unitar σ_t se determină din relația:

$$\sigma_t=\frac{d}{dr}(r\sigma_r)=A+B\frac{1}{r^2}-C\left(1+ln\frac{r}{R_2}\right) \tag{18}$$

Pentru efortul unitar σ_z se obține o relație de calcul simplă, eliminînd în relațiile (3) deformațiile specifice ε_r și ε_t:

$$\mu(\sigma_r+\sigma_t)-\sigma_z=E(-\varepsilon_z+\alpha\Delta T)$$

$$\sigma_z=E(\varepsilon_z-\alpha\Delta T)+\mu(\sigma_r+\sigma_t) \tag{19}$$

Cu ajutorul relațiilor (17), (18) și (19) se pot calcula eforturile unitare care apar într-un cilindru avînd temperatura variabilă pe grosimea peretelui, considerînd E, α și μ constante.

5. *Stabilirea relației de recurență*

Împărțind cilindrul în mai multe elemente cu grosimea peretelui foarte mică, așa cum s-a arătat, pentru fiecare element în parte E, μ și α se vor considera constante. Pentru un element oarecare „i", aceste mărimi vor avea valorile E_i, μ_i și respectiv α_i. Pentru acest element se pot calcula valorile constantelor A, B, C, notate prin relațiile (16). Înlocuind și celelalte mărimi care apar în relațiile (17), (18) și (19) — R_1, R_2, θ_0 —, corespunzător elementului „i" — r_{i-1}, r_i și respectiv θ_{0i} —, se obțin relațiile de calcul valabile pentru $r_{i-1}\leqslant r\leqslant r_i$:

$$\sigma_r=A_i-B_i\frac{1}{r^2}-C_i\,ln\frac{r}{r_i}$$

$$\sigma_t=A_i+B_i\frac{1}{r^2}-C_i\left(1+ln\frac{r}{r_i}\right) \tag{20}$$

Pentru elementul următor, $r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$.

$$\sigma_r = A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r^2} - C_{i+1} ln \frac{r}{r_{i+1}}$$

$$\sigma_t = A_{i+1} + B_{i+1}\frac{1}{r^2} - C_{i+1}\left(1 + ln \frac{r}{r_{i+1}}\right) \tag{21}$$

Cu ajutorul relațiilor (20) și (21) se vor calcula eforturile unitare pentru $r = r_{i-1}$, $r = r_i$ și $r = r_{i+1}$:

$$\sigma_{i-1} = A_i - B_i\frac{1}{r_{i-1}^2} - C_i ln \frac{r_{i-1}}{r_i}$$

$$\sigma_i = A_i - B_i\frac{1}{r_i^2}$$

$$\sigma_i = A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r_i^2} - C_{i+1} ln \frac{r_i}{r_{i+1}} \tag{22}$$

$$\sigma_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r_{i+1}^2}$$

$$\sigma_{ti} = A_i + B_i\frac{1}{r_i^2} - C_i$$

$$\sigma_{ti} = A_{i+1} + B_{i+1}\frac{1}{r_i^2} - C_{i+1}\left(1 + ln \frac{r_i}{r_{i+1}}\right)$$

Eliminînd pe σ_{ti} din ultimele două ecuații, sistemul de ecuații se poate scrie sub forma :

$$A_i - B_i\frac{1}{r_{i-1}^2} - \left(C_i ln \frac{r_{i-1}}{r_i} + \sigma_{i-1}\right) = 0$$

$$A_i - B_i\frac{1}{r_i^2} - \sigma_i = 0$$

$$A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r_i^2} - \left(C_{i+1} ln \frac{r_i}{r_{i+1}} + \sigma_i\right) = 0 \tag{23}$$

$$A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r_{i+1}^2} - \sigma_{i+1} = 0$$

$$A_i + B_i\frac{1}{r_i^2} - A_{i+1} - B_{i+1}\frac{1}{r_i^2} - C_i + C_{i+1}\left(1 + ln \frac{r_i}{r_{i+1}}\right) = 0$$

Considerînd necunoscute numai constantele A_i, B_i. A_{i+1} și B_{i+1}, condiția de compatibilitate a sistemului este :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{r_{i-1}^2} & 0 & 0 & -\left(C_i \ln\frac{r_{i-1}}{r_i} + \sigma_{i-1}\right) \\ 1 & -\frac{1}{r_i^2} & 0 & 0 & -\sigma_i \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{r_i^2} & -\left(C_{i+1}\ln\frac{r_i}{r_{i+1}} + \sigma_i\right) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{r_{i+1}^2} & -\sigma_{i+1} \\ 1 & \frac{1}{r_i^2} & -1 & -\frac{1}{r_i^2} & -C_i + C_{i+1}\left(1+\ln\frac{r_i}{r_{i+1}}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

În urma dezvoltării determinantului (24) se obține o relație de recurență între eforturile unitate σ_{i-1}, σ_i și σ_{i+1} :

$$\frac{2}{r_i^2}\left(\frac{1}{r_{i+1}^2}-\frac{1}{r_i^2}\right)\sigma_{i-1}+\frac{2}{r_i^2}\left(\frac{1}{r_{i-1}^2}-\frac{1}{r_{i+1}^2}\right)\sigma_i+\frac{2}{r_i^2}\left(\frac{1}{r_i^2}-\frac{1}{r_{i-1}^2}\right)\sigma_{i+1}+$$

$$+\left(\frac{1}{r_{i+1}^2}-\frac{1}{r_i^2}\right)\left(\frac{2}{r_i^2}\ln\frac{r_{i-1}}{r_i}-\frac{1}{r_i^2}+\frac{1}{r_{i-1}^2}\right)C_i+ \quad (25)$$

$$+\left(\frac{1}{r_{i-1}^2}-\frac{1}{r_i^2}\right)\left(\frac{2}{r_i^2}\ln\frac{r_i}{r_{i+1}}+\frac{1}{r_i^2}-\frac{1}{r_{i+1}^2}\right)C_{i+1}=0$$

Înmulțind ecuația (25) prin $\left(-\frac{r_i^4}{2}\right)$ rezultă :

$$\left(1-\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}\right)\sigma_{i-1}-\left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2}-\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}\right)\sigma_i+\left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2}\right)\sigma_{i+1}+\left(1-\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}\right) \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2}-1\right)+\ln\frac{r_{i-1}}{r_i}\right]C_i+\left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2}-1\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}-1\right)-\ln\frac{r_i}{r_{i+1}}\right]C_{i+1}=0$$

Se vor nota rapoartele subunitare ale razelor succesive prin K_i și K_{i+1}:

$$K_i=\frac{r_{i-1}}{r_i}, \qquad K_{i+1}=\frac{r_i}{r_{i+1}} \quad (27)$$

Coeficienții eforturilor unitare din ecuația (26) se vor nota prin :

$$a_{i+1} = 1 - \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} = 1 - K_{i+1}^2$$

$$a_{i-1} = \frac{r_i^2}{r_{i-1}^2} - 1 = \frac{1 - K_i^2}{K_i^2}$$

$$a_i = \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} - \frac{r_i^2}{r_{i-1}^2} = -(a_{i-1} + a_{i+1}) \tag{28}$$

$$b_i = \left(1 - \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2} - 1\right) + ln\,\frac{r_{i-1}}{r_i}\right] C_i +$$

$$+ \left(\frac{r_i^2}{r_{i-1}^2} - 1\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} - 1\right) - ln\,\frac{r_i}{r_{i+1}}\right] C_{i+1} +$$

$$= a_{i+1}\, C_i \left(\frac{1}{2} a_{i-1} + ln\, K_i\right) + a_{i-1}\, C_{i+1}\left(-\frac{1}{2} a_{i+1} - ln\, K_{i+1}\right)$$

Cu aceste notații rezultă o formă simplă a ecuației de recurență pentru eforturile unitare normale σ_r:

$$a_{i+1}\,\sigma_{i-1} + a_i\,\sigma_i + a_{i-1}\,\sigma_{i+1} + b_i = 0 \tag{29}$$

6. *Metodica de calcul*

Pentru cilindrul împărțit în n elemente se scrie relația de recurență (29) pentru cîte două elemente succesive. Rezultă $n-1$ ecuații cu $n+1$ necunoscute. Necunoscute sînt eforturile unitare pentru punctele de pe suprafețele limită ale elementelor. La cele $n-1$ ecuații se adaugă două rezultînd din condiții la limită: eforturile unitare σ_r pentru $r = R_1$ și $r = R_2$ sînt egale cu presiunea interioară și respectiv cea exterioară, aplicate cilindrului (sînt eforturi unitare de compresiune).

Pentru calculul eforturilor unitare σ_t se scrie sistemul format din trei ecuații ale sistemului (22) :

$$A_i - B_i \frac{1}{r_{i-1}^2} - \left(C_i\, ln\, \frac{r_{i-1}}{r_i} + \sigma_{i-1}\right) = 0$$

$$A_i - B_i \frac{1}{r_i^2} - \sigma_i = 0 \tag{30}$$

$$A_i + B_i \frac{1}{r_i^2} - (C_i + \sigma_{ti}) = 0$$

Se elimină necunoscutele A_i și B_i, rezultînd ecuația :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{r_{i-1}^2} & -\left(C_i \ln \frac{r_{i-1}}{r_i} + \sigma_{i-1}\right) \\ 1 & -\frac{1}{r_i^2} & -\sigma_i \\ 1 & \frac{1}{r_i^2} & -(C_i + \sigma_{ti}) \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

Dezvoltînd determinantul și folosind notațiile (27) și (28), rezultă:

$$\sigma_{ti} = \sigma_i - C_i + \frac{2}{a_{i-1}} (\sigma_i - \sigma_{i-1} - C_i \ln K_i) \quad (32)$$

Cu ajutorul relației (32) se pot calcula eforturile unitare în punctele situate pe suprafața exterioară ($r = r_i$) a fiecărui element. Pentru punctele de pe suprafața interioară a elementului, conform relațiilor (20),

$$\sigma_{ti-1} = A_i + B_i \frac{1}{r_{i-1}^2} - C_i \left(1 + \ln \frac{r_{i-1}}{r_i}\right) \quad (33)$$

Folosind și relațiile (30), se obține, după efectuarea unor calcule simple, următoarea formulă de calcul :

$$\sigma_{ti-1} = \sigma_{ti} - (\sigma_{i-1} - \sigma_i) - 2 C_i \ln K_i \quad (34)$$

Relația (34) este necesară pentru determinarea efortului unitar σ_t în punctele de pe suprafața interioară a cilindrului ($r = R_1$), în toate celelalte puncte folosindu-se relația (32).

Eforturile unitare σ_z se determină cu ajutorul relației (19).

7. *Exemplu de calcul*

Se alege ca exemplu, calculul eforturilor unitare într-un cilindru cu pereți groși, încărcat cu presiune interioară. Se dau :

$p_{int.} = 100$ kgf./cm^2 ;

$R_1 = 100$ mm ; $R_2 = 130$ mm ;

$T_1 = 300$ °C ; $T_2 = 100$ °C.

Materialul cilindrului este un oțel aliat marca 23X2HBΦA (ЭU659), pentru care caracteristicile fizice și mecanice importante sînt date în lucrarea [10]. În lucrarea menționată sînt prezentate tabele de variație a modulului de elasticitate și a coeficientului de dilatare termică liniară cu temperatura. Datele cuprinse în aceste tabele sînt reprezentate grafic în figurile 3 și 4.

Calculul eforturilor unitare se face în ipoteza $\sigma_z = 0$.

Calculul eforturilor unitare ţinînd seamă de variaţia mărimilor E şi α cu temperatura. Se împarte cilindrul în 10 elemente avînd aceeaşi grosime a peretelui, 3 mm. Se pot scrie nouă ecuaţii de recurenţă, pentru cîte două elemente succesive. Calculul coeficienţilor a_{i-1}, a_i, a_{i+1} şi b_i este prezentat, parţial, în tabelul 1.

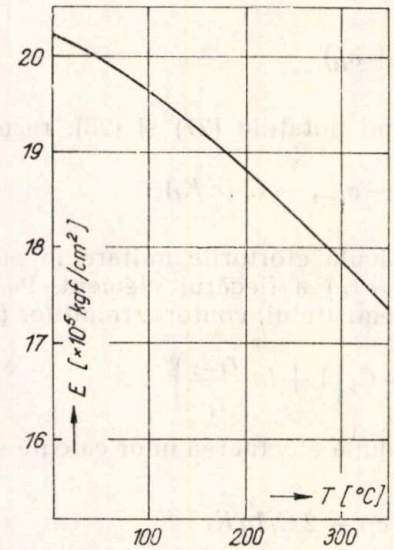


Fig. 3.

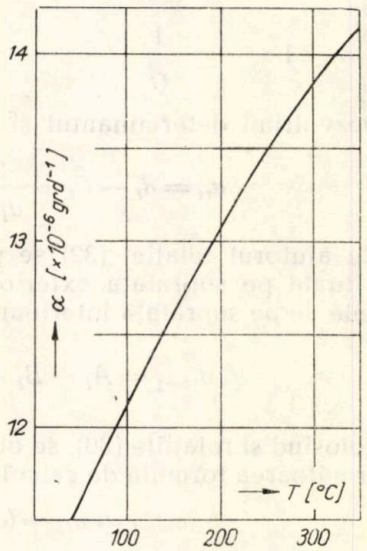


Fig. 4.

În acest exemplu, coeficientul de contracţie transversală se consideră constant $\mu = 0{,}3$. Pentru temperaturi pînă la 400—500°C, variaţiile lui μ sînt foarte mici şi pot fi neglijate [6], [8].

Adăugînd celor nouă ecuaţii de recurenţă condiţiile la limită, rezultă sistemul :

$$\sigma_0 = -100$$

$$0{,}55803\,\sigma_0 - 1{,}167029\,\sigma_1 + 0{,}60899\,\sigma_2 - 1{,}334890 = 0$$

$$0{,}54288\,\sigma_1 - 1{,}133890\,\sigma_2 + 0{,}591010\,\sigma_3 - 1{,}230132 = 0$$

$$0{,}52855\,\sigma_2 - 1{,}102594\,\sigma_3 + 0{,}574040\,\sigma_4 - 1{,}123745 = 0$$

$$0{,}51493\,\sigma_3 - 1{,}072975\,\sigma_4 + 0{,}558045\,\sigma_5 - 1{,}031462 = 0$$

$$0{,}50202\,\sigma_4 - 1{,}044905\,\sigma_5 + 0{,}542885\,\sigma_6 - 0{,}949047 = 0$$

$$0{,}48971\,\sigma_5 - 1{,}018264\,\sigma_6 + 0{,}528554\,\sigma_7 - 0{,}879334 = 0$$

$$0{,}47803\,\sigma_6 - 0{,}992956\,\sigma_7 + 0{,}514926\,\sigma_8 - 0{,}809533 = 0$$

$$0{,}46686\,\sigma_7 - 0{,}968888\,\sigma_8 + 0{,}502028\,\sigma_9 - 0{,}745114 = 0$$

$$0{,}45621\,\sigma_8 - 0{,}945933\,\sigma_9 + 0{,}489723\,\sigma_{10} - 0{,}672549 = 0$$

$$\sigma_{10} = 0$$

Tabelul 1

Nr. crt.	Mărimea (expresia)	Unități de măsură	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
1	r_{i-1}	mm	100	103	106	109	112	115	118	121	124
2	r_i	mm	103	106	109	112	115	118	121	124	127
3	K_i	—	0,990874	0,971698	0,972477	0,973214	0,973913	0,974576	0,975207	0,975806	0,976378
4	K_1^2	—	0,942596	0,944197	0,945712	0,947145	0,948507	0,949798	0,951029	0,952197	0,953314
5	a_{i-1}	$\times 10^{-1}$	0,608999	0,591010	0,574044	0,558045	0,542885	0,528554	0,514926	0,502028	0,489723
6	a_{i+1}	$\times 10^{-1}$	0,55803	0,54288	0,52855	0,51493	0,50202	0,48971	0,47803	0,46686	0,45621
7	θ	$°C$	177,5	155,6	134,3	113,6	93,5	73,9	54,8	36,1	17,9
8	T_i	$°C$	277,5	255,6	234,3	213,6	193,5	173,9	154,8	136,1	117,9
9	θ_{oi}	$°C$	22,5	21,9	21,3	20,7	20,1	19,6	19,1	18,7	18,3
10	r_{mi}	mm	101,5	104,5	107,5	110,5	113,5	116,5	119,5	122,5	125,5
11	T_{mi}	$°C$	288,7	262,8	244,9	223,9	203,5	183,6	164,2	145,3	126,9
12	E_i	$\times 10^6 \frac{kgf.}{cm^2}$	1,800	1,827	1,845	1,862	1,880	1,898	1,912	1,927	1,940
13	α_i	$\times 10^{-5}$ grd^{-1}	1,376	1,360	1,345	1,327	1,309	1,292	1,273	1,259	1,239
14	$Ç_i$	$\times 10^{+3} \frac{kgf.}{cm^2}$	-1,356614	-1,35382	-1,352727	-1,34562	-1,33680	-1,333244	-1,32244	-1,32268	-1,31406
15	C_{i+1}	$\times 10^3 \frac{kgf.}{cm^2}$	-1,35382	-1,35273	-1,34562	-1,33680	-1,33324	-1,32244	-1,32268	-1,31406	-1,31188
16	b_i	$\times 10^{-1} \frac{kgf.}{cm^2}$	-1,33489	-1,23013	-1,12374	-1,03146	-0,94905	-0,87933	-0,80953	-0,74511	-0,67255

Tabelul 2

Nr. crt.	Mărimea (expresia)	Unităţi de măsură	$(i=0)$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$
1	σ_i	kgf/cm²	—100	—97,99	—93,96	—85,95	—76,62	—66,15	—54,73	—42,38	—29,57	—15,80	0
2	$C_i \ ln \ K_i$	—	—	39,806	38,868	37,755	36,534	35,332	34,331	33,206	32,405	31,419	30,619
3	$\sigma_i - \sigma_{i-1} - C_i \ ln \ K_i$	kgf/cm²	—	37,796	34,838	29,745	27,204	24,862	22,911	20,856	19,595	17,649	15,819
4	$\frac{2}{a_{i-1}} (\sigma_i - \sigma_{i-1} - C_i ln K_i)$	kgf/cm²	—	—1171,4	—1098,9	—1036,3	—975,0	—915,9	—866,9	—810,1	—780,6	—720,8	—661,9
5	σ_{ti}	kgf/cm²	9,63	37,23	162,94	230,45	294,00	354,73	411,58	470,00	522,48	577,49	650,02

Tabelul 3

Nr. crt.	Mărimea (expresia)	Unităţi de măsură	Rezultatele calculului numeric										
1	r	mm	100	103	106	109	112	115	118	121	124	127	130
2	$ln \frac{r}{R_2}$	—	—0,2624	—0,2328	—0,2041	—0,1762	—0,1490	—0,1226	—0,0968	—0,0717	—0,0472	—0,0233	0
3	$1 + ln \frac{r}{R_2}$	—	0,7376	0,7672	0,7959	0,8238	0,8510	0,8774	0,9031	0,9283	0,9527	0,9767	1
4	$- C \ ln \frac{r}{R_2}$	kgf/cm²	—351,3	—311,7	—273,3	—235,9	—199,5	—164,2	—129,7	—96,1	—63,3	—31,2	0
5	$- C \left(1 + ln \frac{r}{R_2}\right)$	kgf/cm²	987,7	1027,3	1065,7	1103,1	1139,4	1174,8	1209,3	1242,9	1275,7	1307,7	1339,0
6	r^2	cm²	100,0	106,09	112,36	118,81	125,44	132,25	139,24	146,41	153,76	161,29	169,0
7	$- \frac{B}{r^2}$	kgf/cm²	615,5	580,2	547,8	518,1	490,7	465,4	442,0	420,4	400,3	381,6	364,2
8	σ_r	kgf/cm²	—100,0	—95,7	—89,7	—82,0	—73,0	—63,0	—51,9	—39,9	—27,2	—13,8	0
9	σ_t	kgf/cm²	8,0	82,9	153,7	220,8	284,5	345,2	403,1	458,3	511,2	561,9	610,6

Soluția sistemului se obține prin metoda prezentată în lucrarea [1]. Rezultă următoarele valori ale eforturilor unitare : $\sigma_0 = -100 \frac{kgf}{cm^2}$;

$$\sigma_1 = -97{,}99 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_2 = -93{,}96 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_3 = -85{,}95 \frac{kgf.}{cm^2}\ ;$$

$$\sigma_4 = -76{,}62 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_5 = -66{,}15 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_6 = -54{,}73 \frac{kgf.}{cm^2}\ ;$$

$$\sigma_7 = -42{,}38 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_8 = -29{,}57 \frac{kgf.}{cm^2}\ ; \quad \sigma_9 = -15{,}8 \frac{kgf.}{cm^2}$$

$$\text{și } \sigma_{10} = 0.$$

Eforturile unitare σ_t se determină folosind relațiile (32) și (34). Rezultatele calculului sînt trecute în tabelul 2.

Calculul eforturilor unitare considerînd E și α constante. În cazul cînd E și α se consideră constante pe toată grosimea peretelui, eforturile unitare se vor calcula cu relații (17), (18) și (19). În acest calcul aproximativ se cor determina E și α_i pentru temperatura punctelor de la jumătatea grosimii peretelui cilindrului, $T_m = 193{,}5°C$. Rezultă $E = 1,892.10^6 \frac{kgf.}{cm^2}$ și $\alpha = 1{,}3.10^{-6}$ grd.$^{-1}$.

Rezultatele calculului sînt date în tabelul 3.

În figurile 5 și 6 sînt reprezentate variațiile eforturilor unitare σ_r și σ_t pe grosimea peretelui cilindrului, determinate pentru cazul cînd se ia în considerație variația mărimilor E și α cu temperatura (curbele trasate cu linie continuă) și de asemeni pentru cazul cînd E și α se consideră constante (curbele trasate cu linie punctată).

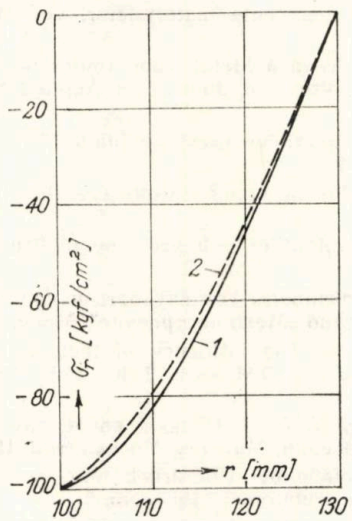


Fig. 5.

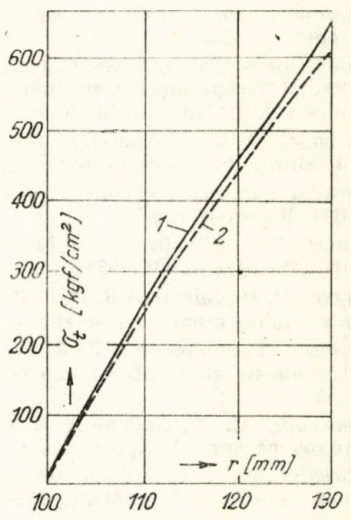


Fig. 6.

8. *Concluzii*

Pentru cilindrii din oțel, la care temperatura maximă nu depășește 200—300°C, variațiile modulului de elasticitate, a coeficientului de contracție transversală și a coeficientului de dilatare termică liniară se pot neglija, influența asupra mărimii eforturilor unitare maxime fiind mică. În cazul unor diferențe de temperatură mai mari, este recomandat a se lua în considerație și variațiile mărimilor E, α și μ.

Metoda de calcul prezentată în lucrarea de față se bazează, așa cum s-a arătat, pe folosirea unei relații de recurență. Rezolvarea problemei poate fi obținută prin programare, la o mașină electronică de calcul.

Catedra de rezistența materialelor I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Blumenfeld, M.* — Calculul deformațiilor barelor drepte prin metoda celor trei necunoscute, Buletinul Institutului politehnic București, XXIV, 1 (1962).
2. *Blumenfeld, M.* — Calculul discurilor de grosime variabilă, în mișcare de rotație, prin metoda celor trei necunoscute, Studii și cercetări de mecanică aplicată, XIV, 1 (1963).
3. *Blumenfeld, M.* — Circular symmetrically loaded plates, of constant and variable thicknees, calculated by the three unknowns method, Buletinul Institutului politehnic București, XXIV, 3 (1962).
4. *Blumenfeld, M.* — Расчет методов трех неизвестных неравномерно нагретых вращающихся дисков переменной толщины. Труды казанского авиационого института, Вып. 77, 1963.
5. *Buzdugan, Gh.* — Culegere de probleme de rezistența materialelor, vol. II, Edit. tehnică, 1955.
6. *Chien-Chien Chang, Wen-Hwa Chu* — Stresses in a Metal Tube Under Both High Radial Temperature Variation and Internal Pressure, Journal of Applied Mechanics vol. 21, No. 2, 1954, June.
7. *Korndorf, B. A.* — Aparatura laboratorului modern de presiune înaltă, Edit. Acad. de științe din URSS, Seria chimică, nr. 6, 1940.
8. *Korndorf, B. A.* — Tehnica presiunilor înalte în chimie, traducere din l. rusă, IDT, București 1954.
9. *Renert, M.* — Realizări noi în domeniul recipienților sub presiune pentru industrie, IDT, București, 1954.
10. *Безухов Н. И., Башанов В. Л.* — Расчеты на прочность, устойчувость и колебаниях в условиах высоких температур, издательство „Машиностроение", Москва, 1965.
11. *Garofalo, F., Malenock, P. R., Smith, G. V.* — The influence of temperature on the elastic constants of une comercial steels, ASTM Spec. Tehn. Pub., No. 129, 1952.
12. *Пономарев С. Д., Бидермак В. Л., Малинин Н. Н.* — Осонвы современных методов ресчета на прочность в машиностроении, Машчиз, Москва, том. II, 1958.
13. *Schrieder, E.* — Berehnung dickwandiger Gefäße bei Überdruck und verschiedenen Innen- und Außentemperaturen, Konstruction, 5 1953, No. 6.
14. *Миркин И. Л.* — Структура и свойства новых жаропрочных материалов, Машчиз, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

HIDRAULICĂ

C.Z.: 621-42 : 621.833 : 621.233 : 621-58 : 627.13 : 532.5

EBENES GITTER AUS DEN DÜNNEN UND SCHWACH GEWÖLBTEN PROFILEN IN DER POTENTIALSTRÖMUNG *

GHEORGHE ZIDARU

In der Arbeit [3], hat man eine Erweiterung der Birnbaum Glauertschen Methode an ein ebenes Gitter mit der normalen Achse and der Sehnen der Profile gegeben, und in der Arbeit [2] hat man ein ebenes Gitter mit der parallelen Achse an den Sehnen der Profile untersucht. Diese nächste Arbeit wird hier verbessert.

Die Gitterprofile sind dünn und schwach gewölbt. Die verteilteten Wirbel, welche die Profile substituiren, liegen auf den Sehnen der Profile, weil die Profilwölbung klein ist (Birnbaum).

Aufs induzierte Geschwindigkeitsfeld legt man die allgemeine Strömung v_∞ über. Die resultierenden Geschwindigkeiten auf den Profilen sind berührend an den Skeletten der Profile (Birnbaum).

1. *Die induzierten Geschwindigkeiten von der Wirbelbelegung*

Für ein Gitter mit der schrägen Achse mit dem Winkel τ gegenüber oy, ist die komplexe induzierte Geschwindigkeit in den Punkt x

$$\overline{v_i}(x) = \frac{i\,e^{-i\tau}}{2t}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \gamma(x')\,\mathrm{cth}\left[\frac{\pi(x-x')}{t}\,e^{-i\tau}\right]dx' \qquad (1)$$

Nach Weinig, ist der Ausdruck der Abszisse x [1 ; 4]

$$x = \frac{t}{2\pi}\left(\cos\tau\, ln\,\frac{b^2+2b\cos\theta+1}{b^2-2b\cos\theta+1} - 2\sin\tau\,\mathrm{arctg}\,\frac{2b\sin\theta}{b^2-1}\right) \qquad (2)$$

worin $\theta \in [0;\ 2\pi]$ und $b>1$.

*Manuskript am 20 April 1968 eingegangen.

Ebenfalls

$$\frac{c}{t}=\frac{1}{\pi}\left(\cos\tau\, ln\,\frac{b^2+2b\cos\theta_0+1}{b^2-2b\cos\theta_0+1}+2\sin\tau\,\mathrm{arctg}\,\frac{2b\sin\theta_0}{b^2-1}\right) \tag{3}$$

$$\text{mit } \operatorname{tg}\theta_0=\frac{b^2-1}{b^2+1}\operatorname{tg}\tau \tag{4}$$

Die Zirkulation um einem Profil ist

$$\Gamma_0=\frac{4bt}{b^2+1}v_\infty\frac{\cos\theta_0}{\cos\tau}\sin\alpha \tag{5}$$

Die Geschwindigkeit auf dem geradlinigen Profil, nach [1], ist:

$$v=v_\infty\left[\cos\alpha-\sin\alpha\,\frac{b^2\cos(\tau+\theta)-\cos(\tau-\theta)-(b^2-1)\frac{\cos\theta_0}{\cos\tau}}{b^2\sin(\tau+\theta)-\sin(\tau-\theta)}\right] \tag{6}$$

Wenn die Gitterprofile längs der Achse ox liegen, $\tau=\pi$ und liefert (4) $\theta_0=\frac{\pi}{2}$.

Der Ausdruck (2) wird

$$x=-\frac{t}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2b\sin\theta}{b^2-1} \tag{7}$$

Auch, der Ausdruck (3) liefert

$$\frac{2b}{b^2-1}=\operatorname{tg}\frac{\pi c}{2t} \tag{8}$$

oder

$$b=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi c}{4t}\right) \tag{8'}$$

Aus (4), erhält man

$$\lim_{(\tau,\,\theta_0\to\frac{\pi}{2})}\frac{\cos\theta_0}{\cos\tau}=\frac{b^2+1}{b^2-1}\quad\text{und deshalb}$$

$$\Gamma_0=\frac{4bt}{b^2-1}v_\infty\sin\alpha \tag{9}$$

oder

$$\Gamma_0=2t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2t}\right)v_\infty\sin\alpha \tag{9'}$$

Aus (6), erhält man

$$v(\theta) = v_\infty \left(\cos\alpha + \sin\alpha \frac{b^2+1}{b^2-1} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \right) \tag{10}$$

Man sieht, dass es $x(\theta) = x(\pi - \theta)$ gilt ; der Punkt, der dem Winkel θ entspricht, liegt and der oberen Kannte, während der Punkt, der dem Winkel $\pi - \theta$ entspricht, an der niedrigen Kannte liegt.

Die Zirkulationsintensität auf dem geradlinigen Profil ist

$$\gamma_0(x) = \gamma_0(\theta) = v(\theta) - v(\pi - \theta) = 2 v_\infty \frac{b^2+1}{b^2-1} \sin\alpha \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \tag{11}$$

$$\gamma_0(\theta) = 2 v_\infty \frac{b^2+1}{b^2-1} \sin\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \tag{11'}$$

Aus den Ausdrücken (7) und (8'), folgt

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} \right] \text{ während } x \in \left[-\frac{c}{2} ; \frac{c}{2} \right]$$

$$\text{Man nimmt } \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{12}$$

$$\varphi \in [0 ; \pi], \text{ wenn } x \in \left[-\frac{c}{2} ; \frac{c}{2} \right]$$

Aus (11') erhält man

$$\gamma_0(x) = 2 v_\infty A_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \tag{13}$$

$$\text{worin } A_0 = \frac{b^2+1}{b^2-1} \sin\alpha \tag{13'}$$

Die Beziehung (1), mit $\tau = \frac{\pi}{2}$, wird (Bild. 1)

$$\overline{v}_i(x) = \frac{i}{2t} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \gamma(x') \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi(x - x')}{t} \right] dx' \tag{14}$$

Die ganze verteilte Zirkulation hat den Ausdruck

$$\gamma(x) = 2 v_\infty \left(A_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\varphi \right) \tag{15}$$

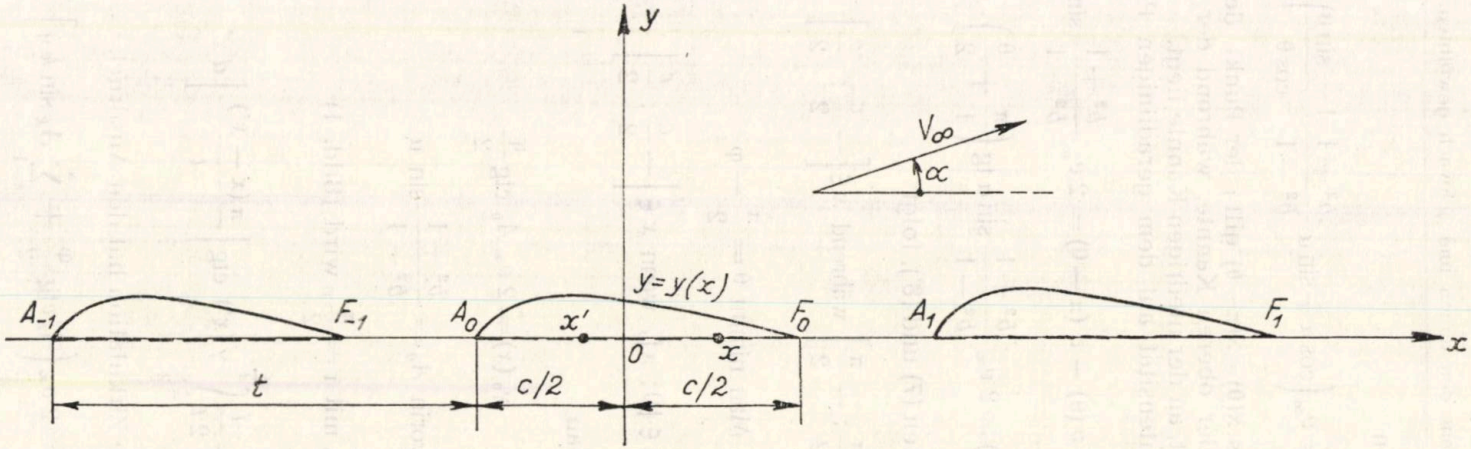


Fig. 1.

Man bemerkt, dass für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$, gilt es $\gamma(x)=0$.
Mann zeichnet

$$\frac{2b}{b^2-1}=p \tag{16}$$

Mit Hilfe (12), aus (7) erhält man

$$x=-\frac{t}{\pi}\operatorname{arctg}(p\cos\varphi) \tag{17}$$

Demnach ,der Ausdruck (14) wird

$$\bar{v}_i(x)=\frac{i}{2t}\int_0^{\pi}2v_\infty\left(A_0\operatorname{ctg}\frac{\varphi'}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\varphi'\right)\frac{1+p^2\cos\varphi\cos\varphi'}{p(\cos\varphi'-\cos\varphi)}\,\frac{t}{\pi}\,\frac{p\sin\varphi\sin\varphi'}{1+p^2\cos^2\varphi'}$$

$$\bar{v}_t(x)=\frac{iv_\infty}{\pi}\left[A_0(I_0+I_1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(I_{k-1}-I_{k+1})\right] \tag{18}$$

worin

$$I_k=\int_0^{\pi}\cos k\varphi'\,\frac{(1+p^2\cos\varphi\cos\varphi')\,d\varphi')}{(1+p^2\cos^2\varphi')(\cos\varphi'-\cos\varphi)} \tag{19}$$

Ersichtlich,

$$I_k=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k\varphi'\,\frac{1+p^2\cos\varphi\cos\varphi'}{1+p^2\cos^2\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'-\cos\varphi}$$

Ersetzend φ' mit $\pi-\varphi'$, erhält man

$$I_k=\frac{1}{2}(-1)^{k+1}\,Re\left(\int_0^{2\pi}e^{ik\varphi'}\,\frac{1-p^2\cos\varphi\cos\varphi'}{1+p^2\cos^2\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'+\cos\varphi}\right)$$

Mit der Substitution $e^{i\varphi'}=w$ und infolge (16), wird es

$$I_k=(-1)^{k+1}\,Re\left[\frac{1}{i}\oint_{|w|=1}w^{k+1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{(b^2-1)^2w-2b^2\cos\varphi\,(w^2+1)}{b^2(w^2+b^2)\left(w+\frac{i}{b}\right)\left(w-\frac{i}{b}\right)(w+e^{i\varphi})(w+e^{-i\varphi})}\,dw\right]=$$

$$=(-1)^{k+1}\,Re\left\{\frac{1}{i}\pi i\left[2\left(\operatorname{rez}f\left(\frac{i}{b}\right)+\operatorname{rez}f\left(-\frac{i}{b}\right)\right)+\operatorname{rez}f(-e^{i\varphi})+\right.\right.$$

$$+\operatorname{rez} f(-e^{-i\varphi})\Big]\Big\} = (-1)^{k+1}\,\pi\,Re\left\{\frac{b^2}{b^2+1}\left(\frac{i}{b}\right)^{k+1}[1+(-1)^{k+1}]+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k+1}\,\frac{e^{ik\varphi}-e^{-ik\varphi}}{2\,i\sin\varphi}\right\}$$

$$I_{2n} = \pi\,\frac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi};\quad I_{2n+1} = \pi\left[\frac{2}{b^2+1}\,\frac{(-1)^{n+1}}{b^{2n}}+\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi)}\right] \tag{20}$$

$$\text{Es folgt } I_0 = 0;\ I_1 = \pi\,\frac{b^2-1}{b^2+1} \tag{20'}$$

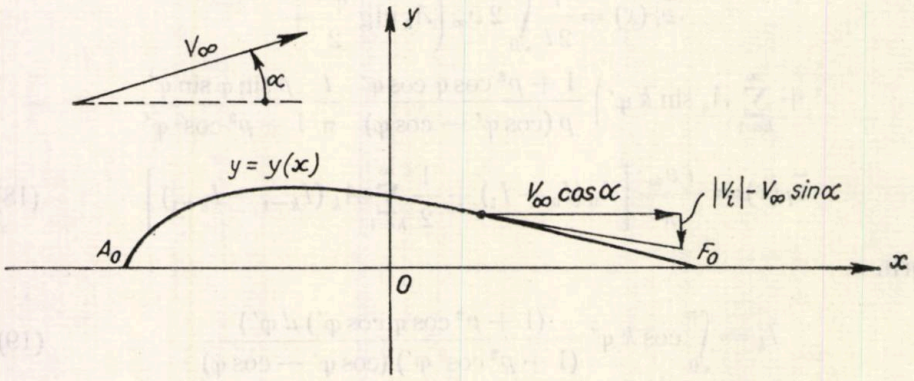


Fig. 2.

Nach der Einführung (20) und (20') in (18) und mit der Berücksichtigung der Beziehung (13'), erhält man

$$\bar{v}_i(x) = i\,v_\infty\left[\sin\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos k\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{A_{2n}}{b^{2n}}\right] \tag{21}$$

Die Geschwindigkeit (21) ist berührend am Skelett des Gitterprofils (Bild. 2)

$$y = y(x) \tag{22}$$

worin $y=0$ für $x=\pm\frac{c}{2}$, demnach man hat

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{|v_i| - v_\infty\sin\alpha}{v_\infty\cos\alpha} \tag{23}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos k\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{A_{2n}}{b^{2n}}\right] \tag{24}$$

Die Beziehung (24) stellt die Fouriersche Reihe des Ausdruckes $\frac{dy}{dx}$ dar.

Demnach

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_{2n}}{b^{2n}} = -\frac{\cos\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dy}{dx} d\varphi \tag{25}$$

$$A_k = \frac{2\cos\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dy}{dx}\cos k\varphi\, d\varphi \tag{26}$$

Einführend (25) und (26) in den Ausdruck (21), erhält man schliesslich

$$v_i(x) = -i v_\infty \left[\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dy}{dx} d\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{2\cos\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi\left(\int_0^{\pi}\frac{dy}{dx}\cos k\varphi\, d\varphi\right)\right] \tag{27}$$

In der Beziehung (27) ausdrückend $\frac{dy}{dx}$ wie eine Funktion von der Veränderliche φ, nur für einige k, hat man $\int_0^{\pi}\frac{dy}{dx}\cos k\varphi\, d\varphi \neq 0$ und also man bestimmt die Summe leicht.

2. *Bestimmung der Zirkulation um den gewölbten Gitterprofil*

Mit der Betrachtung der Beziehungen (13), (15) — (17), folgt es

$$\Gamma = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \gamma(x)\, dx = 2 v_\infty \frac{t}{\pi}\int_0^{\pi}\left(A_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\varphi\right)\frac{p\sin\varphi}{1+p^2\cos^2\varphi} d\varphi$$

$$\Gamma = \frac{2tp}{\pi} v_\infty \left[A_0(J_0 + J_1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k (J_{k+1} - J_{k+1})\right] \tag{28}$$

worin

$$J_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\varphi}{1 + p^2\cos^2\varphi} d\varphi \tag{29}$$

Wenn man wie zur Bestimmung der Integrale (19) verfahrt und die Beziehung (6) betrachtet, erhält man

$$J_k = (-1)^k \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-1}{b}\right)^2 Re \oint_{|w|=1} \frac{w^{k+1} dw}{\left(w - \frac{i}{b}\right)\left(w + \frac{i}{b}\right)(w^2 + b^2)} =$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-1}{b}\right)^2 Re\left\{2\pi t\left[\operatorname{rez} f\left(\frac{i}{b}\right) + \operatorname{rez} f\left(-\frac{i}{b}\right)\right]\right\} =$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-1}{b}\right)^2 Re\left\{2\pi i \frac{b^2}{2(b^4-1)}\left(\frac{i}{b}\right)^k [1+(-1)^k]\right\}$$

$$J_{2n} = \frac{b^2-1}{b^2+1}\cdot\frac{(-1)^n}{b^{2n}};\quad J_{2n+1} = 0;\quad J_0 = \pi\frac{b^2-1}{b^2+1} \tag{30}$$

Einführend (30) in (28), hat man

$$\Gamma = \frac{4\,b\,t}{b^2-1} v_\infty \left[\sin\alpha + \frac{b^2-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{A_{2n-1}}{b^{2n}}\right] \tag{31}$$

$$\Gamma = \frac{4\,b\,t}{b^2-1} v_\infty \left[\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{\pi}(b^2-1)\int_0^{\pi}\frac{dy}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n-1)\varphi}{b^{2n}}\right)d\varphi\right] \tag{31'}$$

$$\text{Für } |u|<1, -\frac{u^2}{1+u^2} = -u^2 + u^4 - u^6 + \ldots$$

Ersetzend $u = \frac{e^{i\varphi}}{b}$, erhält man

$$Re\left[e^{-i\varphi}\left(-\frac{u^2}{1+u^2}\right)\right] = -Re\frac{1}{b^2 e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}} = -\frac{(b^2+1)\cos\varphi}{b^4 + 2b^2\cos 2\varphi + 1}$$

Ebenfalls,

$$Re\,[e^{-i\varphi}(-u^2 + u^4 - u^6 + \ldots)] = -\frac{\cos\varphi}{b^2} + \frac{\cos 3\varphi}{b^4} - \frac{\cos 5\varphi}{b^6} + \ldots$$

Demnach,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n-1)\varphi}{b^{2n}} = -\frac{(b^2+1)\cos\varphi}{b^4+2b^2\cos 2\varphi+1} \tag{32}$$

Aus (16) und (17), folgt es

$$d\varphi = \frac{\pi}{2\,b\,t\,(b^2-1)}\cdot\frac{b^4+2b^2\cos 2\varphi+1}{\sin\varphi}\,dx \tag{33}$$

und wird (31')

$$\Gamma = \frac{4\,b\,t}{b^2-1} v_\infty \sin\alpha + 2\frac{b^2+1}{b^2-1} v_\infty \cos\alpha \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\frac{dy}{dx}\operatorname{ctg}\varphi\,dx \tag{34}$$

Betrachtend (8), (8') und $\frac{b^2+1}{b^2-1} = \sec\left(\frac{\pi c}{2t}\right)$, gibt man auch der Zirkulation den gleich wertigen Ausdruck :

$$\Gamma = 2 v_\infty \left[t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2t}\right) \sin\alpha + \sec\left(\frac{\pi c}{2t}\right) \cos\alpha \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dy}{dx} \operatorname{ctg}\varphi \, dx \right] \tag{35}$$

oder

$$\Gamma = 2 v_\infty \left[t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2c}\right) \sin\alpha + \sec\left(\frac{\pi c}{2t}\right) \cos\alpha \int_0^\pi y \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \right] \tag{36}$$

Die Ganze Geschwindigkeit im Unendlich oberhalb vom Gitter ($y = -\infty$) ist

$$v_1 = v_\infty \cos\alpha + i\left(v_\infty \sin\alpha + \frac{\Gamma}{2t}\right) \tag{36}$$

und im Unendlich stromabwärts vom Gitter ($y = -\infty$)

$$v_2 = v_\infty \cos\alpha + \left(v_\infty \sin\alpha - \frac{\Gamma}{2t}\right) \tag{36'}$$

Der Auftrieb des gewölbten Gitterprofils

$$F_p = \varrho \, v_\infty \, \Gamma \tag{37}$$

Das Moment der Drücken um die Einflusskannte ist

$$M_A = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{c}{2} + x\right) dF_p = \frac{c}{2} F_p + \varrho \, v_\infty \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \gamma(x) \, x \, dx$$

Mit der Beziehung $x = -\frac{c}{2}\cos\varphi$, $x \in \left[-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right]$, $\varphi \in [0; \pi]$ und betrachtend (11), folgt es

$$M_A = \frac{c}{2} F_p - \frac{1}{2} \varrho \, v_\infty^2 \, c^2 \left[\frac{b^2+1}{b^2-1} \sin\alpha \int_0^\pi (1+\cos\varphi)\cos\varphi \, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^\pi \sin k\varphi \sin 2\varphi \, d\varphi \right]$$

Aber,

$$\int_0^\pi (1+\cos\varphi)\cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\pi \sin k\varphi \sin 2\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

Demnach

$$M_A = \frac{\varrho v_\infty c}{2}\left[\Gamma - \frac{c v_\infty}{2}\left(\pi \frac{b^2+1}{b^2-1}\sin\alpha + \cos\alpha \int_0^\pi \frac{dy}{dx}\cos 2\varphi\, d\varphi\right)\right] \quad (38)$$

3. *Sonderfälle*

a) Die Gitterprofile sind geradlinig : $y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$ Aus (34), (35) und (38), erhält man :

$$\Gamma_0 = \frac{4bt}{b^2-1} v_\infty \sin\alpha = 2 v_\infty t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2t}\right)\sin\alpha \quad (39)$$

$$M_A^0 = \frac{\varrho v_\infty^2 c^2}{2}\left[2\frac{t}{c}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2t}\right) - \frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\pi c}{2t}\right)\right]\sin\alpha \quad (40)$$

Diese Ausdrücke werden aus der Weinigs-Methode bekannt [3], [4].

b) Gewölbter isolierter Profil.

Wenn man in den erhaltenen Formeln hat man $t \to \infty$, also nach (3), $b \to \infty$, erhält man diesen Fall.

Habend $\lim_{t\to\infty}\left[t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2t}\right)\right] = \frac{\pi c}{2}$, aus (35) und (38) folgt es

$$\Gamma_1 = 2 v_\infty \left(\frac{\pi c}{2}\sin\alpha + \cos\alpha \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dy}{dx}\operatorname{ctg}\varphi\, dx\right) \quad (41)$$

$$M_A^1 = \frac{\varrho v_\infty c}{2}\left[\Gamma_1 - \frac{c v_\infty}{2}\left(\pi + \cos\alpha \int_0^\pi \frac{dy}{dx}\cos 2\varphi\, d\varphi\right)\right] \quad (42)$$

Diese Ausdrücke und die von Birnbaum-Glauert erhaltenen Ergebnisse übereinstimmen [3], [4].

LITERATUR

1. *Павел Д., Зидару Г.* : Определение скорости на выходной кромке и точки застоя для некоторых изолированных профилей или в линейной профильной решетке, Bul. Inst. Polit. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" (unter Druck).

2. *Беленький И. М., Зеленский И. Е.:* К вопросу о циркуляционном обтекании плоской решетки с пером произвольного профиля. Прикл. мат. мех. 1938, том I вып. 3.

3. *Zidaru Gh.* — Mouvement potential autour du réseau linéaire du profils minces et à petite courbure, la diréction du réseau étant normale aux cordes de profils, Bul. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", (unter Druck).

4. *Tașcă D.* — Teoria hidrodinamică a rețelelor de profile, 1964—1968, Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej" (Handschrift).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C.Z.: 621.432.4 : 621-22 : 621-232 : 621-9

UNELE PROBLEME PRIVIND ECHILIBRAJUL MOMENTULUI EXTERN AL TERMENILOR DE ORDINUL ÎNTÎI LA MOTORUL ÎN LINIE ÎN DOI TIMPI CU NUMĂR PAR DE CILINDRI ȘI APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE*

GEORGE BĂRĂNESCU

1. *Introducere*

La motoarele în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate este posibilă echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație prin plasarea corespunzătoare a manivelelor, dacă numărul de cilindri nu este o putere de doi [1].

În lucrarea citată este cercetată această problemă pentru cazul particular al organizării în serii identice a vectorilor care interpretează momentele produse de termenii de ordinul întîi la fiecare grupă de manivele în opoziție.

Prezenta lucrare arată că există și alte posibilități de organizare a vectorilor moment. Totodată se stabilesc și soluțiile de cuplare a manivelelor în opoziție pentru care momentul corespunzător termenilor de ordinul întîi are aceeași valoare la orice grupă de manivele în opoziție.

Este folosită prima interpretare vectorială arătată în [2]. Se presupune că distanța dintre cilindri consecutivi este aceeași.

2. *Posibilitățile de organizare a vectorilor moment*

În cazul motorului în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate manivelele sînt două cîte două în opoziție. Pentru fiecare grupă de manivele în opoziție vectorii T_1 care interpretează termenii de ordinul întîi, produc un moment M_1. Notînd cu i numărul de cilindri, în total vor exista $\frac{i}{2}$ momente, care acționează în plane legate indeformabil între ele, deoarece aceste plane se rotesc cu viteza unghiulară ω_1 a vectorilor T_1.

* Manuscris predat la redacție la 10 ianuarie 1969

Într-o poziție oarecare a arborelui cotit mărimea momentelor depinde de distanțele dintre manivelele în opoziție. Întrucît aceste distanțe sînt un multiplu al distanței dintre axele a doi cilindri consecutivi rezultă că schimbarea manivelelor cuplate în opoziție conduce numai la o variație discretă a celor $\frac{i}{2}$ momente.

Modificarea poziției relative a momentelor M_1 se obține prin schimbarea poziției relative a grupelor de manivele în opoziție; și această posibilitate este limitată, deoarece manivelele pot fi situate numai în planele determinate de condiția repartiției uniforme a aprinderilor.

Datorită limitărilor de mai sus există următoarea posibilitate particulară de echilibrare a celor $\frac{i}{2}$ momente M_1; manivelele în opoziție se organizează pe serii, în cadrul fiecărei serii distanța dintre manivelele în opoziție fiind aceeași; în acest caz, la fiecare serie, vectorii T_1 produc momente M_1 de aceeași mărime; orientînd grupele de manivele în opoziție astfel ca momentele aferente fiecărei serii să fie uniform distribuite în jurul axei de rotație a arborelui cotit, momentele tuturor vectorilor T_1 vor fi echilibrate.

Numărul grupelor de manivele în opoziție din fiecare serie este supus unei restricții care decurge din următoarea împrejurare. În steaua manivelelor fiecare grupă de manivele în opoziție ocupă un plan determinat. Unei grupe de manivele în opoziție îi corespund doi vectori T_1, situați în planul în care acționează și momentul lor. Conform interpretării vectoriale a termenului de ordinul întîi acest plan face cu planul manivelelor respective un unghi care are în momentul de timp considerat aceeași valoare pentru toate grupele de manivele în opoziție. Astfel, fiecare din momentele produse de perechile de vectori T_1 are un plan de acțiune propriu. Reprezentînd momentele prin vectori, fiecare vector moment are o direcție proprie; dacă mai mulți vectori moment s-ar situa pe aceeași direcție, steaua manivelelor ar comporta mai multe grupe de manivele în același plan, situație în contrazicere cu cerința repartiției uniforme a aprinderilor.

Fie n numărul de grupe de manivele în opoziție al unei serii. Se presupune că s-a realizat distribuția uniformă în jurul axei de rotație a arborelui cotit a celor n grupe de manivele în opoziție și că s-au orientat astfel manivelele grupelor încît cei n vectori moment M_1 sînt uniform distribuiți în jurul axei de rotație a arborelui cotit; unghiul dintre doi vectori moment consecutivi este deci $\frac{2\pi}{n}$. Se parcurge steaua acestor vectori într-un sens oarecare și se numerotează vectorii consecutiv, începînd cu un vector oarecare. Dacă n este par, unghiul dintre vectorii cu numărul de ordine

$$q \text{ și } q+\frac{n}{2}, \left(q=1,2,3\ldots\frac{n}{2}\right), \text{ este } \frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}=\pi;$$

vectorii s-ar situa pe aceeaşi direcţie, ceea ce este imposibil. În consecinţă numărul n trebuie să fie impar.

Posibilitatea de echilibrare a celor $\frac{i}{2}$ momente M_1, arătată înainte, poate fi realizată în următorul mod general; m_1 serii de vectori moment conţin fiecare cîte n_1 vectori uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit,, m_2 serii de vectori moment conţin fiecare cîte n_2 vectori uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit etc. Mărimea vectorilor moment poate diferi de la o serie la alta; în cadrul aceleiaşi serii, vectorii moment au însă aceeaşi mărime.

Deoarece numărul total de vectori M_1 aferent seriei de tipul q este $m_q \cdot n_q$, rezultă

$$m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 + m_3 \cdot n_3 + \cdots = \frac{i}{2}. \qquad (1)$$

Conform celor stabilite anterior, numerele n_1, n_2, n_3 ... trebuie să fie impare.

Direcţia fiecărui vector M_1 este perpendiculară pe planul determinat de vectorii T_1 la care se referă. Acest plan face cu planul grupei corespunzătoare de manivele în opoziţie unghiul ψ_1, care are în momentul considerat aceeaşi valoare pentru toate grupele de manivele în opoziţie. Deoarece manivelele sînt uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, direcţiile pe care se pot situa vectorii M_1 vor fi şi ele uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit. Unghiul dintre două direcţii consecutive oarecare este deci $\frac{2\pi}{i}$. Întrucît vectorii M_1, indiferent căror serii aparţin, se pot situa numai pe aceste direcţii, rezultă că unghiul dintre doi vectori consecutivi ai unei serii oarecare este un multiplu de $\frac{2\pi}{i}$, adică

$$\frac{2\pi}{n_1} = j_1 \frac{2\pi}{i},$$

$$\frac{2\pi}{n_2} = j_2 \frac{2\pi}{i},$$

$$\frac{2\pi}{n_3} = j_3 \frac{2\pi}{i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

unde $j = 1, 2, 3 \ldots$. Din aceste egalităţi se deduc relaţiile

$$j_1 = \frac{i}{n_1}, \quad j_2 = \frac{i}{n_2}, \quad j_3 = \frac{i}{n_3}, \quad \ldots$$

care arată că numerele n_1, n_2, n_3 .... trebuie să fie divizori ai numărului de cilindri.

Dacă i admite divizorii n_1, n_2, n_3 ..., se poate scrie

$$i = 2k n_1 n_2 n_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (k = 1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot \cdot), \tag{2}$$

formulă în care s-a introdus factorul 2 pentru a scoate în evidență faptul că numărul de cilindri este prin ipoteză par, iar divizorii n_1, n_2, n_3 ... sînt impari.

Din relația (2) se constată că numărul de cilindri crește odată cu numărul de tipuri de serii de vectorii moment. Numărul minim de cilindri pentru care se poate aplica soluția cu mai multe tipuri de serii de vectori M_1 corespunde cazului cînd există numai doi divizori, ale căror valori sînt cele mai mici numere impare, distincte și mai mari decît 1, adică 3 și 5. În această situație relațiile (1) și (2) devin.

$$3m_1 + 5m_2 = \frac{i}{2},$$

$$i = 30k.$$

Prin eliminarea lui i se deduce

$$3m_1 + 5m_2 = 15k.$$

Se observă că cele mai mici numere întregi m_1, m_2 și k ce satisfac această relație sînt $m_1 = 5$, $m_2 = 3$ și $k = 2$, pentru care se obține $i = 60$. Întrucît acest număr de cilindri în linie nu se realizează în practică, rezultă că soluția de echilibrare a vectorilor M_1 prin repartizarea lor în serii cu număr diferit de vectori nu prezintă interes din punct de vedere practic. Soluția care poate fi luată în considerare corespunde deci unui singur divizor n; în acest caz formula (1) devine

$$\frac{i}{2} = m \cdot n; \tag{3}$$

echilibrarea vectorilor M_1 se face deci prin m serii, fiecare serie comportînd n vectori de aceeași mărime, uniform distribuiți în jurul axei de rotație a arborelui cotit. Deoarece n este un număr impar, metoda poate fi aplicată numai motoarelor în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate, al căror număr de cilindri este par, dar nu o putere de doi, fapt menționat inițial.

3. *Stabilirea soluțiilor de cuplare a manivelelor în opoziție pentru care momentul corespunzător termenilor de ordinul întîi are aceeași valoare la orice grupă de manivele în opoziție*

Rezolvarea acestei probleme constă în determinarea posibilităților de cuplare a manivelelor în opoziție astfel ca distanța dintre manivelele în opoziție să fie aceeași.

Fie d distanța dintre două manivele consecutive oarecare. Distanța dintre manivelele în opoziție este un multiplu al distanței d. Se presupune că s-a realizat cuplajul căutat, distanța dintre manivelele în

opoziție la acest cuplaj fiind $\delta \cdot d$, unde δ este un număr întreg. Manivela 1 a cuplajului considerat se afla în opoziție cu manivela $\delta + 1$. Maninivelele 2, 3, 4 ... nu pot fi cuplate în opoziție între ele, deoarece distanța dintre două manivele oarecare ale acestei grupe este mai mică decît distanța $\delta \cdot d$; pentru ca distanța dintre manivelele în opoziție să fie $\delta \cdot d$ este necesar ca manivela 2 să fie cuplată în opoziție cu manivela $\delta + 2$, manivela 3 în opoziție cu $\delta + 3$ etc. Continuînd raționamentul se obține următorul cuplaj al manivelelor în opoziție

1 cu $\delta + 1$	$2\delta + 1$ cu $3\delta + 1$	...	$i - 2\delta + 1$ cu $i - \delta + 1$
2 cu $\delta + 2$	$2\delta + 2$ cu $3\delta + 2$	...	$i - 2\delta + 2$ cu $i - \delta + 2$
3 cu $\delta + 3$	$2\delta + 3$ cu $3\delta + 3$	...	$i - 2\delta + 3$ cu $i - \delta + 3$
⋮	⋮	⋮	⋮
δ cu 2δ	3δ cu 4δ		$i - \delta$ cu i

Se constată că realizarea unui cuplaj al manivelelor în care distanța dintre manivelele în opoziție este aceeași reclamă organizarea manivelelor într-un număr par de grupe, fiecare grupă avînd același număr de manivele.

Posibilitățile de cuplare a manivelelor în opoziție la aceeași distanță una de alta sînt deci determinate de toți divizorii δ ai numărului de cilindri pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. La fiecare din acești divizori se consideră grupele succesive de cîte δ manivele și se numerotează consecutiv aceste grupe cu I, II, III ... $\frac{i}{\delta}$. Cuplajul căutat se obține plasînd manivela s dintr-o grupă cu număr de ordin impar, în opoziție cu manivela $s + \delta$ din grupa următoare.

4. *Concluzii*

Echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi prin organizarea vectorilor moment M_1 în serii cu număr diferit de vectori este principial posibilă. Pentru cazurile de interes practic această metodă generală nu intră în discuție, deoarece reclamă un mare număr de cilindri.

Cuplarea manivelelor în opoziție la egală distanță în vederea realizării unor momente M_1 egale este totdeauna posibilă în cel puțin două variante, deoarece numărul de cilindri admite totdeauna divizorii 1 și $\frac{i}{2}$ care respectă condiția ca rezultatul diviziunii să fie un număr par.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bărănescu G.* — O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate. Studii și cercetări de mecanică aplicată 4/X/1959.

2. *Bărănescu G.* — Interpretări vectoriale ale forței de inerție a maselor cu mișcare de translație aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă cu considerarea variației vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit. Studii și cercetări de mecanică aplicată, 4/1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969, Numărul 2

CAZANE

C.Z.: 621.18 : 621.165 : 662.9 : 662.76

ASUPRA TEMPERATURII MINIME DE EVACUARE A GAZELOR DE ARDERE DIN CAZANE *

MIRCEA POSTELNICESCU

1. *Considerații generale*

Temperatura de evacuare a gazelor de ardere din cazan constituie parametrul cu cele mai largi implicații din punct de vedere economic la construcția unui cazan, din care cauză fixarea acestei temperaturi ridică probleme complexe, interdependente, la care trebuie să se răspundă.

În adevăr, nivelul temperaturii de evacuare a gazelor de ardere din cazan influențează consumul de combustibil, mărimea suprafețelor schimbătoarelor de căldură și implicit dimensiunile (gabaritul) agregatului, precum și puterea pompelor și ventilatoarelor pentru circulația fluidelor prin cazan, factori care condiționează în mod esențial economicitatea agregatului.

Consumul de combustibil este dependent de randamentul cazanului, scăzînd cu creșterea randamentului. În general, combustibilul fiind dat, modul de ardere a lui ales și utilajul în acest scop fixat, pentru stabilirea randamentului proiectantul unui cazan nu poate de fapt interveni decît asupra pierderii de căldură prin pereți — către exterior — prin determinarea grosimii economice a învidirii, în concordanță cu sistemul de învidire și materialele folosite, precum și asupra pierderii de căldură cu gazele de ardere evacuate din agregat și care constituie principala pierdere de căldură la un cazan. Micșorarea acestei pierderi necesită scăderea temperaturii gazelor de ardere la evacuarea din agregat, concomitent cu reducerea excesului de aer din gazele de ardere.

Odată cu reducerea temperaturii gazelor de ardere evacuate din cazan consumul de combustibil scade, dar crește în schimb mărimea suprafețelor schimbătoarelor de căldură.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București, 1—3 noiembrie 1968.

Mărirea suprafeţelor de schimb de căldură la scăderea temperaturii gazelor de ardere evacuate din cazan determină creşterea puterii pentru circulaţia apei-aburului prin agregat şi variaţia puterilor pentru evacuarea gazelor de ardere şi pentru trecerea aerului de ardere prin preîncălzitorul de aer al cazanului ; de asemenea, în unele cazuri, speciale, variază şi puterea pentru trecerea combustibilului prin preîncălzitorul de combustibil al cazanului în cazul preîncălzirii directe a lui — cu gaze de ardere — sau pentru trecerea combustibilului şi a agentului intermediar prin schimbătoarele de căldură respective în cazul preîncălzirii indirecte a combustibilului — cu ajutorul unui circuit auxiliar, închis, de apă.

Ţinînd seama de toate influenţele evidenţiate, se ajunge la concluzia că, la modificarea temperaturii de evacuare a gazelor de ardere din cazan, variază atît investiţiile cît şi cheltuielile anuale de producţie, diversele elemente ale acestora modificîndu-se în sens invers ; deci, există o temperatură optimă din punct de vedere general economic.

Temperatura optimă este în mod esenţial şi tot mai mult condiţionată, în ultima vreme, de consumul de combustibil pe care-l determină. În adevăr, pe plan mondial se constată că problema economiei de combustibil a căpătat o atenţie deosebită şi mereu sporită, avînd în vedere, pe de o parte, rezervele limitate de combustibili clasici, iar pe de altă parte creşterea în ritm susţinut a necesităţilor de energie electrică şi de căldură. Această situaţie implică, printre altele, realizarea de cazane cu randamente cît mai ridicate, ceea ce necesită coborîrea temperaturii gazelor de ardere la evacuarea din agregat. Calculele au arătat că, şi la folosirea unor combustibili cu preţ scăzut, coborîrea temperaturii respective pînă la aproximativ 100—120°C este economic avantajoasă.

Coborîrea temperaturii gazelor de ardere la evacuarea din cazan este însă limitată de temperaturile agenţilor de răcire a gazelor de ardere care se introduc în schimbătoarele finale de căldură ale agregatului.

Este astfel evident interesul de a se preciza, care-i limita pînă la care gazele de ardere pot fi răcite la evacuarea lor dintr-un cazan ?

2. *Stabilirea temperaturii minime de evacuare a gazelor de ardere dintr-un cazan*

Se admite, pentru generalitate, că nu există limitări în coborîrea temperaturii gazelor de ardere evacuate din cazan în scopul evitării coroziunii schimbătoarelor finale de căldură, la arderea combustibililor conţinînd sulf în compoziţia lor, evitarea acestui fenomen putînd fi în fond realizată şi pe alte căi decît prin ridicarea temperaturii pereţilor schimbătoarelor de căldură respective.

Se consideră cazanul echipat cu economizor şi cu preîncălzitor de aer, situaţie care corespunde marii majorităţi a cazanelor ce se construiesc, datorită, în principal, faptului că îmbunătăţirea randamentului centralelor termoelectrice cu abur moderne prin puternica preîncălzire a apei de alimentare cu abur prelevat de la turbine ridică implicit şi

problema preîncălzirii aerului de ardere în cazan, ca posibilitate a reducerii temperaturii gazelor de ardere evacuate din agregat, concomitent cu ridicarea temperaturii de ardere din focar.

Avînd în vedere cele de mai înainte, temperatura apei de alimentare este, de regulă, mai mare decît temperatura aerului de ardere la introducerea în preîncălzitorul de aer al cazanului. Ca urmare, se consideră că ultimele schimbătoare de căldură ale cazanului în lungul traseului gazelor de ardere, în sensul curgerii lor, sînt economizorul sau treapta inferioară a lui și apoi preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă (cum este cazul, cel mai adesea, la arderea combustibililor cu putere calorică ridicată) sau prima treaptă a lui, prin care aerul de ardere circulă în totalitate, fără recirculare de aer și în sens invers cu gazele de ardere. Aceasta este soluția cea mai simplă care oferă posibilitățile cele mai mari de scădere a temperaturii gazelor de ardere la evacuarea din cazanele echipate cu economizor și cu preîncălzitor de aer, soluție de altfel larg folosită în construcția cazanelor.

Se notează :

t_{ev} — temperatura de evacuare a gazelor de ardere din cazan, în °C ;

t_g — temperatura gazelor de ardere la intrarea în preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau în prima treaptă a lui, în °C;

t_a — temperatura aerului de ardere introdus în preîncălzitorul de aer al cazanului, care poate să fie temperatura mediului ambiant, dar poate să fie și o temperatură mai ridicată — în cazul preîncălzirii prealabile a aerului de ardere, în °C ;

t_a' — temperatura aerului de ardere la ieșirea din preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau din prima treaptă a lui, în °C ;

V_g — volumul gazelor de ardere ce trec prin preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau prin prima treaptă a lui și care provin din arderea efectivă în focar a unității de combustibil, în $\frac{Nm^3}{kg}$ sau $\frac{Nm^3}{Nm^3}$;

V_a — volumul de aer necesar arderii efective în focar a unității de combustibil și care trece prin preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau prin prima treaptă a lui, în $\frac{Nm^3}{kg}$ sau $\frac{Nm^3}{Nm^3}$;

c_g — căldura specifică medie a gazelor de ardere, la presiune constantă, între temperaturile t_g și t_{ev}, în $\frac{kcal}{Nm^3 \cdot °C}$;

c_a — căldura specifică medie a aerului, la presiune constantă, între temperaturile t_a și t_a', în $\frac{kcal}{Nm^3 \cdot °C}$.

Abstracție făcînd de schimbul de căldură prin pereții cazanului în dreptul preîncălzitorului de aer construit într-o treaptă sau primei trepte a lui și considerînd că vaporii de apă din gazele de ardere nu condensează la răcirea acestora, din egalitatea dintre cantitatea de căldură cedată de gazele de ardere și cantitatea de căldură primită de aerul de ardere rezultă

$$t_{ev} = t_g - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}(t'_a - t_a) \cdot \tag{1}$$

Pentru stabilirea temperaturii t_{ev} minime este necesar a se arăta, mai întîi, că raportul $V_a c_a / V_g c_g$ este subunitar, pentru toți combustibilii și toate temperaturile. În acest scop se va demonstra că rapoartele V_a/V_g și c_a/c_g sînt subunitare.

Inegalitatea $\frac{V_a}{V_g} < 1$ se verifică observînd că se poate scrie

$$\frac{V_a}{V_g} = \frac{\alpha_1 V_a^0}{V_g^0 + (\alpha_2 - 1) V_a^0}, \tag{2}$$

unde :

V_a^0, V_g^0 sînt volumele teoretice de aer de ardere și respectiv de gaze de ardere revenind unității de combustibil care arde efectiv, în $\frac{Nm^3}{kg}$ sau $\frac{Nm^3}{Nm^3}$;

α_1, α_2 — coeficientul mediu de exces al aerului de ardere, respectiv coeficientul mediu de exces de aer din gazele de ardere care trec prin preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau prin prima treaptă a lui.

Cum $V_g^0 > V_a^0$ iar $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, rezultă $\frac{V_a}{V_g} < 1$.

Inegalitatea $\frac{c_a}{c_g} < 1$ se poate dovedi folosind „diagrama generală" i, t a lui Rosin și Fehling, fig. 1 [1], și ținînd seama că într-o atare diagramă raportul i/t reprezintă căldura specifică medie, la presiune constantă, între temperaturile 0°C și t°C și că, pentru domeniile de temteraturi relativ joase intervenind la preîncălzitorul de aer, curbele de variație ale entalpiei specifice i a aerului și a gazelor de ardere, cu diverse conținuturi de aer v_a %, în funcție de temperatura t pot fi considerate, cu suficientă exactitate, ca drepte trecînd prin originea sistemului de coordonate.

Pe baza observațiilor de mai înainte, dacă φ_a este unghiul dreptei de variație a entalpiei specifice a aerului în zona temperaturilor joase din „diagrama generală" i, t cu axa absciselor, iar φ_g unghiul dreptei de variație a entalpiei specifice a gazelor de ardere, cu conținutul de

aer v_a corespunzător coeficientului de exces de aer α_Q, în aceeași zonă și cu aceeași axă, atunci se poate scrie

$$\frac{c_a}{c_g} \cong \frac{tg\,\varphi_a}{tg\,\varphi_g} < 1.$$

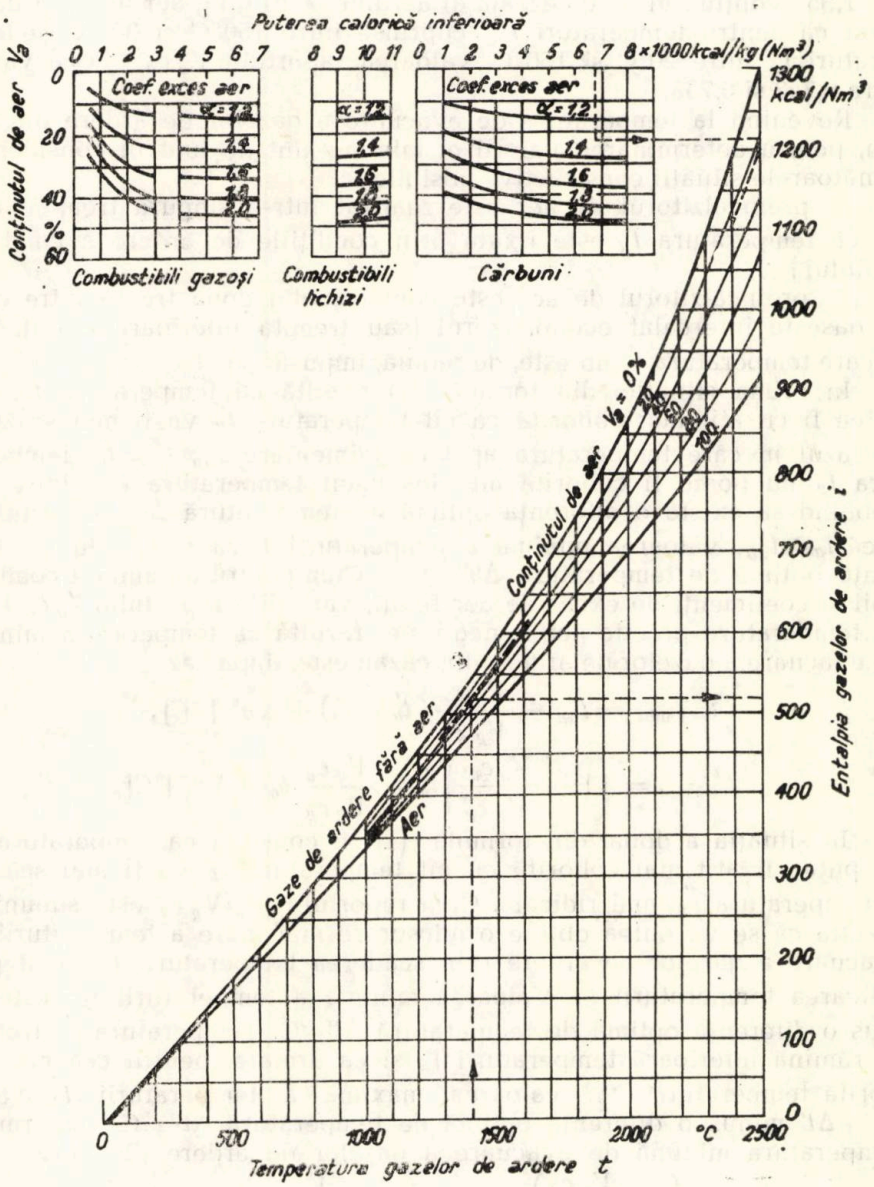


Fig. 1 — Diagrama generală i, t

Din demonstrațiile anterioare rezultă de asemenea că, pentru un anumit combustibil și coeficienți de exces de aer fixați, variațiile raportului $V_a c_a / V_g c_g$ cu temperatura pot fi, practic, neglijate. De exemplu, un calcul exact efectuat pentru gaz natural cu compoziția volumetrică $CH_4 = 99\%$, $H_2O = 0{,}6\%$, $N_2 = 0{,}4\%$ și următoarele date : $\alpha_1 = 1{,}15$; $\alpha_2 = 1{,}35$; conținutul de umezeală al aerului = 10 g/kg aer uscat, a învederat că pentru temperaturi t_{aa} cuprinse între 150°C și 300°C și temperaturi t_a între 20°C și 150°C, valoarea raportului $V_a c_a / V_g c_g$ a variat între 0,752 și 0,755.

Revenind la temperatura de evacuare a gazelor de ardere din cazan, pentru determinarea valorii ei minime sînt de luat în considerare următoarele situații constructive posibile :

— preîncălzitorul de aer este realizat într-o singură treaptă, astfel că temperatura t'_a este fixată prin condițiile de ardere a combustibilului ;

— preîncălzitorul de aer este construit din două trepte între care se găsește intercalat economizorul (sau treapta inferioară a lui), caz în care temperatura t'_a nu este, de regulă, impusă.

În prima situație, din formula (1) rezultă că temperatura t_{ev} va putea fi cu atît mai coborîtă cu cît temperatura t_g va fi mai scăzută. În cazul în care temperatura apei de alimentare $t_{aa}\,°C > t'_a$, temperatura t_g nu poate fi coborîtă mai jos decît temperatura t_{aa}, între ele trebuind să existe o diferență optimă de temperatură $\Delta\theta'$ °C ; similar, dacă $t'_a > t_{aa}$, valoarea minimă a temperaturii t_g va fi t'_a plus o diferență optimă de temperatură $\Delta\theta''$ °C. Cum pentru un anumit combustibil și coeficienți de exces de aer fixați, variațiile raportului $V_a c_a / V_g c_g$ cu temperatura practic pot fi neglijate, rezultă că temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan este, după caz:

$$t'_{ev,\,min} = t_{aa} - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}(t'_a - t_a) + \Delta\theta' \;[°C], \tag{3'}$$

$$t''_{ev,\,min} = \left(1 - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}\right) t'_a + \frac{V_a c_a}{V_g c_g} t_a + \Delta\theta'' \;[°C]. \tag{3''}$$

În situația a doua, din formula (1) se constată că temperatura t_{ev} va putea fi atît mai coborîtă cu cît temperatura t_g va fi mai scăzută și temperatura t'_a mai ridicată. Cum raportul $V_a c_a / V_g c_g$ este subunitar, rezultă că se va putea obține o micșorare mai mare a temperaturii de evacuare a gazelor de ardere prin scăderea temperaturii t_g decît prin ridicarea temperaturii t'_a. Valoarea minimă a temperaturii t_g este t_{aa} plus o diferență optimă de temperatură $\Delta t'$ °C. Temperatura t'_a trebuie să rămînă inferioară temperaturii t_g și ca urmare, pentru cea mai coborîtă temperatură t_g, valoarea maximă a temperaturii t'_a va fi $t_{aa} + \Delta t'$ minus o diferență optimă de temperatură $\Delta t''$ °C. Ca urmare, temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan este

$$t_{ev,\,min} = \left(1 - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}\right)(t_{aa} + \Delta t') + \frac{V_a c_a}{V_g c_g}(t_a + \Delta t'') \;[°C]. \tag{4}$$

Este ușor de verificat, că formula (4) permite determinarea temperaturii $t_{ev,min}$ și în situațiile particulare exprimate prin relațiile (3') și (3'').

Spre orientare, se dau în tabela ce urmează, pentru cîteva cazuri, valorile $t_{ev,min}$ calculate cu formula (4) în care s-a considerat $\Delta t' = \Delta t'' = 40°C$; raportul $V_a c_a / V_g c_g$ s-a determinat pentru coeficienți de exces de aer folosiți în mod curent în construcțiile obișnuite de cazane cu focarul și canalele de gaze de ardere cu depresiune.

Combustibilul	$V_a c_a / V_g c_g$	t_{aa}	t_a	$t_{ev,min}$
Păcură Q_i = 9630 kcal/kg	0,77	215	20 100	105 166
Gaz natural Q_i = 8470 kcal/Nm³	0,75	150 215	20	93 109
Cărbune brun Q_i = 4500 kcal/kg	0,69	215	20 100	120 176
Lignit Q_i = 2160 kcal/kg	0,66	215	20 100	126 179
Gaz de furnal Q_i = 950 kcal/Nm³	0,42	150 215	20	135 173

Chiar pentru combustibili cu raport $V_a c_a / V_g c_g$ ridicat și pentru temperaturi scăzute ale apei de alimentare, cu introducerea aerului de ardere în preîncălzitorul cazanului la temperatura mediului ambiant, se poate verifica că $t_{ev,min}$ rămîne obișnuit, la valori mai mari de aprox. 60°C. Acest lucru justifică presupunerea făcută la începutul demonstrației, că vaporii de apă din gazele de ardere nu condensează, în mod normal, la trecerea acestora prin preîncălzitorul de aer al cazanului. În adevăr, temperatura de rouă a gazelor de ardere, adică temperatura de saturație a vaporilor de apă corespunzătoare presiunii lor parțiale în amestecul ce formează gazele de ardere, este cuprinsă între aprox. 25°C și 55°C — după felul combustibilului și pentru coeficienți obișnuiți de exces de aer în gazele de ardere — deci la valori sub $t_{ev,min}$.

3. *Influența diverșilor factori asupra temperaturii minime realizabile de evacuare a gazelor de ardere din cazane*

a) Din formula (4), care exprimă temperatura minimă posibilă de evacuare a gazelor de ardere din cazan, se constată că, pentru un anumit combustibil și coeficienți de exces de aer fixați, temperatura $t_{ev,min}$

va fi cu atît mai coborîtă cu cît temperaturile apei de alimentare și aerului de ardere la introducerea în preîncălzitorul de aer al cazanului sînt mai mici.

În consecință, dacă un cazan produce abur folosit în scopuri tehnologice sau pentru încălzire, consumul de combustibil va fi minim pentru temperatura minimă posibilă de evacuare a gazelor de ardere din agregat, determinată în principal, pentru un anumit combustibil și coeficienți de exces de aer fixați, de temperaturile precizate ale apei de alimentare și ale aerului de ardere la introducerea în preîncălzitorul de aer al cazanului.

Dacă un cazan produce abur în scopuri energetice, atunci apa de alimentare este, de regulă, preîncălzită în circuitul regenerativ al centralei. Fixarea temperaturii apei de alimentare prin temperatura optimă din punct de vedere numai al randamentului circuitului termic η_t, așa cum se practică de obicei, se constată că nu reprezintă soluția care, pe ansamblu, să conducă la consumul minim de combustibil, întrucît temperatura apei de alimentare influențează, așa cum se constată prin intermediul formulei (4), și randamentul cazanului η_c, în condițiile în care se urmărește maximul acestuia, respectiv minimul consumului de combustibil. Ca urmare, temperatura optimă a apei de alimentare din punct de vedere al consumului de combustibil va fi dată de acea temperatură a ei pentru care produsul $\eta_t\,\eta_c$ este maxim și căreia îi corespunde o anumită temperatură minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan.

b) Pentru aceleași temperaturi t_{aa} și t_a și coeficienți de exces de aer fixați, temperatura $t_{ev,min}$ va fi cu atît mai coborîtă cu cît puterea calorică inferioară a combustibililor solizi și gazoși este mai ridicată, iar la arderea combustibililor lichizi cu cît puterea calorică inferioară este mai mică. Acest lucru rezultă din faptul, ce rămîne a fi demonstrat, că — la variația în modul indicat a puterilor calorice inferioare — rapoartele V_a/V_g și c_a/c_g cresc, deci raportul $V_a\,c_a/V_g\,c_g$ crește și, conform formulei (4), temperatura $t_{ev,\,min}$ va scădea.

Variația în felul menționat a raportului c_a/c_g se deduce imediat pe baza fig. 1.

Cît privește variația raportului V_a/V_g cu puterea calorică inferioară, se va observa mai întîi, folosind relația (2), că — pentru aceiași coeficienți de exces de aer — raportul V_a/V_g crește atunci cînd raportul V_a^0/V_g^0 crește. Dar V_a^0 și V_g^0 depind de caracteristicile combustibilului, putîndu-se simplificat scrie ca funcții liniare de puterea calorică inferioară Q_i (kcal/kg sau kcal/Nm³) :

$$V_a^0 = a\frac{Q_i}{1000} + b\,; \qquad V_g^0 = c\frac{Q_i}{1000} + d\,,$$

relații în care coeficienții a, b, c, d au valorile din tabela ce urmează [2].

Felul combustibililor	a	b	c	d
Combustibili solizi	1,01	0,5505	0,898	1,65
Combustibili lichizi	1,288	— 1,37	1,539	— 3,765
Gaze sărace	0,875	0	0,725	1,0
Gaze bogate	1,09	— 0,25	1,14	0,25

Pe baza elementelor date, se dovedește imediat că raportul V_a/V_g variază cu Q_i în modul indicat la început.

Constatarea, că la arderea combustibililor lichizi temperatura $t_{ev,\,min}$ este cu atît mai coborîtă cu cît puterea calorică inferioară este mai redusă, este mai puțin importantă, avînd în vedere că tipurile de păcură folosite la ardere în focarele cazanelor au puteri calorice relativ apropiate, în timp ce combustibilii solizi și gazoși se prezintă într-o mare diversitate.

Exemplificarea variației temperaturii $t_{ev,min}$ cu puterea calorică a unor combustibili este dată în tabela de la punctul 2.

Din aceeași tabelă se constată că, pentru $t_{aa}=215°C$ și $t_a=20°C$ de exemplu, temperatura minimă realizabilă a gazelor de ardere la evacuarea din cazan este cuprinsă între 105°C și 126°C la arderea păcurii, gazelor naturale și cărbunilor și se ridică la o valoare mare, 173°C, la arderea gazului de furnal, din cauza puterii calorice reduse a acestui combustibil.

Gazul de furnal poate fi însă preîncălzit înainte de ardere. Apare astfel posibilitatea ca, prin preîncălzirea combustibilului cu căldură cedată de gazele de ardere, să se coboare temperatura de evacuare a acestora din cazan sub limita inferioară determinată prin preîncălzirea în agregat numai a apei de alimentare și a aerului de ardere. Va rezulta astfel o economie de combustibil cu care să se producă o cantitate suplimentară de abur, iar temperatura de ardere din focar va fi mai ridicată. Problema aceasta a fost analizată într-o lucrare anterioară [3].

c) Pentru aceleași temperaturi t_{aa} și t_a și un același combustibil folosit la cazan, temperatura $t_{ev,min}$ poate fi coborîtă prin mărirea coeficientului de exces de aer α_1, și implicit și a coeficientului de exces de aer $\alpha_2=\alpha_1+\Delta\alpha$, ca determinînd creșterea raportului $V_a c_a/V_g c_g$. Coeficientul $\Delta\alpha$ reprezintă, în cazul cel mai general, suma coeficientului de scăpări de aer din preîncălzitor în canalul de gaze de ardere și a coeficientului de pătrunderi de aer fals pe traseul gazelor de ardere din cazan.

În adevăr, conform formulei (2), raportul V_a/V_g crește cu α_1 (considerînd $\Delta\alpha_1=$const.), iar pe baza fig. 1 și a observațiilor anterioare în

legătură cu aceasta, raportul c_a/c_g — pentru un anumit combustibil — crește cu coeficientul de exces de aer, întrucît c_g scade în timp ce c_a rămîne constantă.

Fenomenul poate fi explicat și în modul următor: mărindu-se volumul de aer de ardere de preîncălzit între temperaturile t_a și t'_a, acesta va prelua de la gazele de ardere o cantitate de căldură în plus pentru preîncălzirea surplusului de aer; volumul gazelor de ardere crește cu surplusul de aer, dar în același timp căldura lor specifică scade printr-o diluare mai mare cu aer și cum gazele de ardere se răcesc în toate situațiile de la aceeași temperatură minimă $t_{aa}+\Delta t'$, evident temperatura lor la ieșirea din schimbătorul de căldură va trebui să fie cu atît mai mică cu cît se mărește volumul de aer introdus în preîncălzitorul de aer al cazanului.

Coborîrea în acest fel a temperaturii de evacuare a gazelor de ardere din cazan nu înseamnă însă neapărat și reducerea pierderii de căldură cu gazele de ardere evacuate, căci a crescut volumul gazelor de ardere. Or, ceea ce interesează este pierderea de căldură.

Întrebarea care evident se pune este următoarea: fiind dat combustibilul și temperaturile t_{aa} și t_a, care sînt coeficienții de exces de aer α_1 și α_2 care determină cea mai redusă pierdere de căldură cu gazele de ardere evacuate din cazan, avînd în vedere că la creșterea coeficienților de exces de aer menționați $t_{ev,min}$ scade, dar se mărește în schimb volumul gazelor de ardere evacuate?

Coeficientul de exces de aer din gazele de ardere la evacuarea din cazan este foarte apropiat de α_2, iar căldura specifică medie a gazelor de ardere între temperatura t_{ev} și temperatura mediului ambiant t_0°C este practic aceeași ca între temperaturile t_g și t_{ev}. Ca urmare, pierderea de căldură cu gazele de ardere evacuate din cazan este

$$Q_{ev} = V_g c_g (t_{ev} - t_0) \left[\frac{\text{k cal}}{\text{kg}} \text{ sau } \frac{\text{k cal}}{Nm^3}\right].$$

Pentru temperatura $t_{ev,min}$ dată de formula (4), relația de mai înainte devine

$$Qt_{ev,\,\min} = V_g c_g (t_{aa} + \Delta t' - t_0) - V_a c_a (t_{aa} - t_a + \Delta t' - \Delta t'').$$

Căldura specifică medie a gazelor de ardere poate fi scrisă sub forma

$$c_g = \frac{V_g^0 c_g^0 + (\alpha_2 - 1) V_a^0 c_a}{V_g},$$

unde c_g^0 este căldura specifică medie a gazelor de ardere ce rezultă la arderea teoretică, între aceleași temperaturi ca și c_g, în $\frac{\text{kcal}}{\text{Nm}^3 \cdot °\text{C}}$.

Ținînd seama de expresia $V_g c_g$ dedusă din relația anterioară și de faptul că $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$, se obține în final

$$Qt_{ev,\,\min} = [V_g^0 c_g^0 + (\alpha_1 + \Delta\alpha - 1) V_a^0 c_a](t_{aa} + \Delta t' - t_0) -$$
$$- \alpha_1 V_a^0 c_a (t_{aa} - t_a + \Delta t' - \Delta t'').$$

Cu ajutorul acestei formule se dovedește imediat că, atunci cînd α_1 se mărește iar $\Delta\alpha_1$ rămîne constant, $Q_{tev,min}$ crește; de asemenea, dacă α_1 este constant și $\Delta\alpha$ se mărește, $Q_{tev,min}$ crește.

Se conchide: pentru un anumit combustibil folosit la cazan și temperaturi t_{aa} și t_a date, se va realiza cea mai mică pierdere de căldură cu gazele de ardere evacuate din agregat micșorînd, mai întîi, în mod

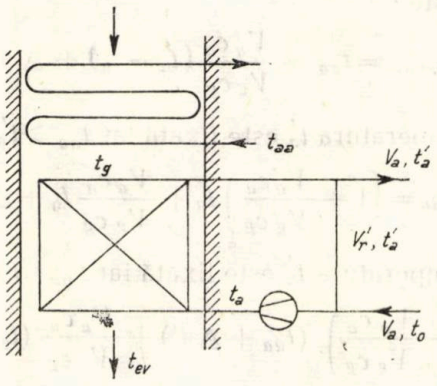


Fig. 2 — Schema recirculării de aer după prima treaptă a preîncălzitorului de aer al cazanului

rațional coeficientul de exces al aerului de ardere, reducînd la maximum scăpările de aer din preîncălzitor în canalul de gaze de ardere și pătrunderile de aer fals pe traseul gazelor de ardere din cazan și apoi, coborînd temperatura de evacuare a gazelor de ardere din agregat la valoarea minimă posibilă corespunzătoare coeficienților de exces de aer precizați conform indicațiilor de mai înainte.

d) Dacă aerul necesar arderii nu este trecut în totalitate prin preîncălzitorul de aer construit într-o singură treaptă sau prin prima treaptă de preîncălzire în cazan, atunci $t_{ev,\ min}$ va avea evident o valoare mai ridicată decît în cazul în care întreaga cantitate de aer de ardere trece prin preîncălzitorul agregatului.

Este de văzut acum, dacă recircularea de aer preîncălzit în cazan permite sau nu reducerea, în continuare, a temperaturii $t_{ev\ ,min}$ obținută fără recirculare, avînd în vedere majorarea cantității agentului de răcire al gazelor de ardere, concomitent însă cu ridicarea temperaturii aerului la intrarea în preîncălzitor.

O soluție este aceea a recirculării de aer preîncălzit de la sfîrșitul preîncălzitorului de aer al cazanului construit într-o singură treaptă sau de la sfîrșitul primei trepte a lui, conform schemei din fig. 2.

Neglijînd schimbul de căldură prin pereți, din egalitatea dintre cantitatea de căldură cedată de gazele de ardere și cantitatea de căldură primită de aerul de ardere :

$$V_g c_g (t_g - t_{ev}) = V_a c_a (t'_a - t_0),$$

rezultă

$$t_{ev} = t_g - \frac{V_a c_a}{V_g c_g} (t'_a - t_0).$$

Printr-un raționament analog celui ce a condus la formulele (3'), (3'') și (4), se deduce că temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan este :

$$t'_{ev,\,min} = t_{aa} - \frac{V_a c_a}{V_g c_g} (t'_a - t_0) + \Delta\theta' \,[^0C], \tag{5'}$$

în cazul în care temperatura t'_a este fixată iar $t_{aa} > t'_a$;

$$t''_{ev,\,min} = \left(1 - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}\right) t'_a + \frac{V_a c_a}{V_g c_g} t_0 + \Delta\theta'' \,[^0C], \tag{5''}$$

în cazul în care temperatura t'_a este fixată iar $t_{aa} < t'_a$;

$$t_{ev\,,\,min} = \left(1 - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}\right) (t_{aa} + \Delta t') + \frac{V_a c_a}{V_g c_g} (t_0 + \Delta t'') \,[^0C], \tag{6}$$

în cazul în care temperatura t'_a nu este fixată.

Din formulele stabilite se constată că temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan nu depinde de cantitatea de aer recirculat, formulele fiind deci valabile și pentru cazul în care această cantitate este egală cu zero, adică pentru cazul în care preîncălzitorul de aer nu-i cu recirculare de aer cald, lucru dovedit și direct și concretizat în formulele (3'), (3'') și (4), cu observația că, în acest caz, $t_0 = t_a$ trebuie considerată, pentru generalitate, temperatura aerului de ardere la introducerea în agregat.

Prin urmare, recircularea de aer preîncălzit după schema din fig. 2 nu conduce, practic, la modificarea temperaturii minime de evacuare a gazelor de ardere din cazan, dar în schimb introduce complicații constructive față de soluția fără recirculare.

Concluzia de mai înainte poate fi dedusă și direct, pe baza următoarelor considerente : aerul care recirculă micșorează capacitatea de răcire a aerului proaspăt adus la preîncălzitor, cedîndu-i o cantitate de căldură, pe care apoi, la trecerea prin prima treaptă a preîncălzitorului, o preia integral de la gazele de ardere; deci, efectul total de răcire al gazelor de ardere este același ca și-n cazul în care aerul de ardere ar trece fără recirculare.

Dacă preîncălzitorul de aer al cazanului este constituit din două trepte, atunci există posibilitatea recirculării de aer preîncălzit și de la sfîrșitul treptei a doua, conform schemei din fig. 3.

Notațiile sînt cele care au fost folosite, cu adăugirile specifice schemei ce se analizează ; se introduce în plus noțiunea de grad de recirculare, definit prin relația

$$r = V''_r / V_a, \tag{7}$$

în care V_r'' este volumul de aer recirculat revenind unității de combustibil ce arde efectiv în focar, în $\frac{Nm^3}{kg}$ sau $\frac{Nm^3}{Nm^3}$.

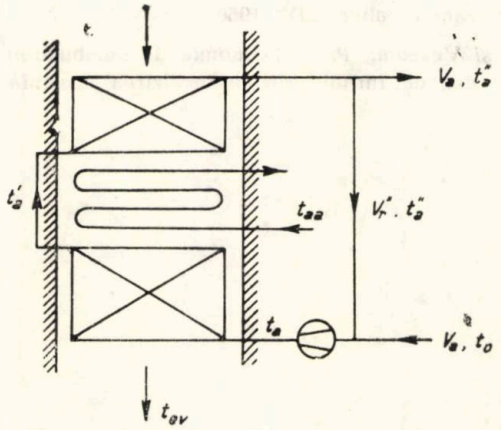


Fig. 3 — Schema recirculării de aer după treapta a doua a preîncălzitorului de aer al cazanului

Similar demonstrațiilor anterioare, se stabilește că temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere din cazan este în acest caz

$$t_{ev,min}''' = \left(1 - \frac{V_a c_a}{V_g c_g}\right)(t_{aa} + \Delta t') + \frac{V_a c_a}{V_g c_g}(t_0 + \Delta t'') + \\ + \frac{V_a c_a}{V_g c_a}(t_a'' - t_{aa} + \Delta t'' - \Delta t') r\,[^0C]. \qquad (8)$$

Deci, ea depinde de gradul de recirculare și este condiționată și de temperatura t_a''. Este evident apoi că, temperatura $t_{ev,min}'''$ este mai ridicată decît temperatura $t_{ev,min}$ dată de formula (6).

În concluzie, recircularea de aer cald prin preîncălzitorul de aer al cazanului construit într-o singură treaptă sau prin prima treaptă a lui nu oferă posibilitatea reducerii temperaturii minime de evacuare a gazelor de ardere din agregat realizabilă fără recirculare.

4. *Concluzii*

Din cele demonstrate, rezultă că există o limită superioară a randamentului unui cazan, condiționată, în principal, de temperatura minimă realizabilă pînă la care pot fi răcite gazele de ardere la evacuarea din agregat.

În lucrare a fost stabilită temperatura minimă de evacuare a gazelor de ardere dintr-un cazan, după care s-a făcut analiza modului în care diverșii factori condiționează această temperatură.

Catedra de cazane și turbine cu abur și gaze
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ledinegg, M.* — Dampferzeugung ; Springer Verlag, 1966.

2. *Gheorghiu, St.* — Cazane de abur ; EDP, 1966.

3. *Postelnicescu, M. și Vezeanu, P.* — Economia de combustibil la cazanele de abur funcționînd cu gaz de furnal prin preîncălzirea acestuia; Construcția de mașini, nr. 4/1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 2

ELECTRONICĂ

C.Z.: 621.385 : 621.314.7 : 537.213 : 621.3.014

THE NON-CONSTANCY OF THE QUASI-FERMI POTENTIALS ACROSS THE TRANSITIONS REGION OF A REVERSE BIASED p^+-n JUNCTION AND ITS IMPLICATIONS IN TRANSITION REGION CAPACITANCE CALCULATION *

C. BULUCEA, S. CSERVENY

List of Symbols

Definitions are given in the order of the symbols used in text.

x = distance measured from the p—n boundary.

$-x_P, x_N$ = positions of the edges of the transition region on the P and N sides of the junction (in the depletion model).

W = total width of the transition region.

$X, -X_P, X_N$ = normalized values of $x, -x_P, x_N$, the normalizing factor being W (for example $X=x/W$).

p, n, = hole and electron concentrations.

n_i = intrinsic carrier concentration.

q = electronic charge (magnitude).

k = Boltzmann's constant.

ψ = electric potential ; $\psi=0$ at $x=0$.

φ_p, φ_n = hole and electron quasi-Fermi potentials.

V_D = diffusion or built-in potential across the transition region, or barrier height of the junction at thermal equilibrium.

V_A = voltage applied to the two leads of the diode, with N side as reference.

U, U_p, U_n, U_D, U_A = normalized values of ψ, φ_p, φ_n, V_D and V_A, the normalizing factor being kT/q (for example $U=q\psi/kT$).

$\Delta\psi_P$, $\Delta\psi_N$ = potential drops across the P and N sides of the transition region.

---

* Manuscript received September 2, 1968.
A compressed version of this paper appeared in IEEE Transactions on Electron Devices ED-16, February (1969).

J_p, J_n = hole and electron current densities.

D_p, D_n = hole and electron diffusion constants (concentration dependence neglected).

L_{pN}, L_{nP} = hole and electron diffusion lengths in the N and P region respectively : $L_p = \sqrt{D_p \tau_{pN}}$, $L_n = \sqrt{D_n \tau_{nP}}$.

τ_{pN}, τ_{nP} = hole and electron steady-state lifetimes in N and P region respectively.

L_D = intrinsic Debye length.

L_{DP}, L_{DN} = extrinsic Debye length in P and N regions, respectively.

N_A, N_D = net acceptor and donor concentrations.

K = relative dielectric constant of the material.

ε_0 = the permitivity of vacuum.

C = transition region capacitance per unit area.

$\mu_p = q D_p/kT$ = hole mobility.

Other symbols as defined in the text.

Subscripts

p, n — for holes and electrons, respectively.

P. N — for P and N regions, respectively.

1. Introduction

The non-constancy of the quasi-Fermi potentials across the transition region of a p-n junction under reverse bias conditions in well established at the present time. It was firstly pointed out by Shockley in his classic paper [1], by a qualitative demonstration. A quantitative treatment of the spatial variation of the quasi-Fermi potentials across the transition region was made by Sah, Noyce and Shockley [2]. It was followed by the improved treatment of Sah [3]. Both the cited works [2] and [3] have dealt with the case of symmetrical (step or linearly graded) junctions. Gummel [4], [5] and recently de Mari [6] have reported machine calculations for asymmetrical case in some specific structures.

This correspondence gives, as a complement to Sah's theory for the symmetrical case [3], a similar treatement for the asymmetrical case. In addition, the validity of the quasi-equilibrium approximation (i. e. the constancy of the quasi-Fermi potentials across the transition region) in capacitance calculations of reverse biased junctions is analysed.

2. The spatial variation of the quasi-Fermi potentials under reverse bias conditions

The present analysis is restricted to the case of asymmetrical step junctions of narrow bandgap materials (such as germanium) for which the current generated outside the transition region (the „diffusion current") dominates over the current generated inside the transition

region (the „generation-recombination current"). Additionally, the Boltzmann statistics used throughout the calculations restricts the treatement to the nondegenerate case, i. e. dilute hole and electron concentrations.

The geometry of the junction and the origin conventions for the electric potential and for the applied voltage are given in Fig. 1. The

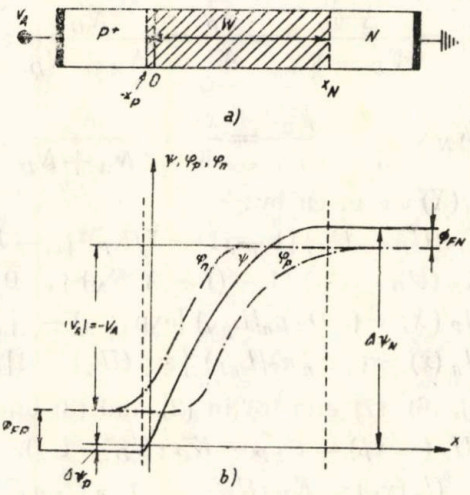


Fig. 1. Geometry and the origin convention for the electric potential and for the applied voltage used in the analysis. (a) Device structure. (b) Spatial variation of the electric potential, and of the quasi-Fermi potentials under reverse bias conditions.

hole quasi-Fermi potential (HQFP) and the electron quasi-Fermi potential (EQFP) are defined for the asymmetrical junction in the same manner as for the symmetrical junction, i. e. from the relations (see List of Symbols) :

$$p(x) = n_i \exp[U_p(x) - U(x)], \quad n(x) = n_i [\exp U(x) - U_n(x)]; \qquad (1)$$

at thermal equilibrium $U_p(x) = U_n(x) = \text{constant} = U(x_i)$, where x_i denotes the secton in the device where $p = n = n_i$.

Following Sah's procedure, the spatial variation of the HQFP and of the EQFP are determined from the relations :

$$U_p(x) - U_p(-x_p) = \log_e \left[1 - \int_{-x_P}^{x} \frac{J_p(x)}{q D_p n_i} \exp[U(x) - U_p(-x_P)]\, dx \right], \qquad (2)$$

$$U_n(x_N) - U_n(x) = \log_e \left[1 - \int_{x}^{x_N} \frac{J_u(x)}{q D_n n_i} \exp[U_n(x_N) - U(x)]\, dx \right], \qquad (3)$$

where the spatial dependence of $U(x)$, $J_p(x)$ and $J_n(x)$ must be known. In the limits of a one-cycle iterative procedure, explicit relations for quasi-Fermi potentials can be obtained by using $U(x)$, $J_p(x)$ and $J_n(x)$ as resulted from the depletion model. Then, introducing the normalised distance $X = x/W$, and the coefficients of the repartition of the total potential drop across the junction between the P and the N sides,

$$K_P = \frac{\Delta\psi_P}{V_D - V_A} = \frac{x_P}{W} = \frac{N_D}{N_A + N_D}; \qquad (4)$$

$$K_N = \frac{\Delta\psi_N}{V_D - V_A} = \frac{x_N}{W} = \frac{N_A}{N_A + N_D},$$

$U(X)$, $J_p(X)$ and $J_n(X)$ are given by:

$$U(X) = -K_P(U_D - U_A)[1 - (1 + X/K_P)^2], \quad -K_P < X < 0; \qquad (5)$$

$$U(X) = +K_N(U_D - U_A)[1 - (1 - X/K_N)^2], \quad 0 < X < K_N; \qquad (6)$$

$$J_p(X) = (q D_p p_n/L_{pN})[\exp(U_A) - 1]; \qquad (7)$$

$$J_n(x) = (q D_n n_p/L_{nP})[\exp(U_A) - 1]. \qquad (8)$$

Introducing (5), (6), (7) and (8) in (2) and (3) and noting that

$$U_p(-x_P) = U_{FP} - K_P(U_D - U_A), \qquad (9)$$

$$U_n(x_N) = K_N(U_D - U_A) - U_{FN}, \qquad (10)$$

where

$$U_{FP} = \log_e(N_A/n_i), \quad U_{FN} = \log_e(N_D/n_i), \quad U_D = U_{FP} + U_{FN}, \qquad (11)$$

one obtains:

$$U_p(X) - U_p(-X_P) = \log_e\left[1 - \sqrt{8}\,(L_{DP}/L_{pN})\,e^{-U_D/2}\sinh(U_A/2)\,e^{-\alpha/2}\int_0^{\sqrt{K_P\alpha}(1+K/K_P)}\exp(y^2)\,dy\right], \quad -K_P < X < 0; \qquad (12)$$

$$U_p(X) - U_p(-X_P) = \log_e\left[1 - \sqrt{8}(L_{DP}/L_{pN})\,e^{-U_D/2}\sinh(U_A/2)\right.$$

$$\left.\{e^{-\alpha/2}\int_0^{\sqrt{K_P\alpha}}\exp(y^2)\,dy + \sqrt{K_N/K_P}\,e^{\alpha/2}\sqrt{\pi}/2[erf\sqrt{K_N\alpha} - erf[\sqrt{K_N\alpha}(1 - X/K_N)]]\}\right], \quad 0 < X < K_N; \qquad (13)$$

$$U_n(X_N) - U_n(X) = \log_e \left[1 - \sqrt{8}\,(L_{DN}/L_{nP})\, e^{-U_D/2} \sinh(U_A/2)\, e^{-\alpha/2} \right. \tag{14}$$

$$\left. \int_0^{\sqrt{K_N \alpha}\,(1 - X/K_N)} \exp(y^2)\, dy \right], \quad 0 < X < K_N ;$$

$$U_n(X_N) - U_n(X) = \log_e \left[1 - \sqrt{8}\,(L_{DN}/L_{nP})\, e^{-U_D/2} \sinh(U_A/2) \right.$$

$$\left. \left\{ e^{-\alpha/2} \int_0^{\sqrt{K_N \alpha}} \exp(y^2)\, dy + \sqrt{K_P/K_N}\, e^{\alpha/2} \sqrt{\pi}/2 \left[\operatorname{erf} \sqrt{K_P \alpha} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \operatorname{erf} \left[\sqrt{K_P \alpha}\,(1 + X/K_P) \right] \right] \right\} \right], \quad -K_P < X < 0 . \tag{15}$$

The notations and the arrangement of the relations (12)—(15) closely follow those of the corresponding relations of Sah [3], excepting the use of the normalizing factors W for x and kT/q for $V_D - V_A$ [$X = x/W$, $\alpha = q(V_D - V_A)/kT$] instead of $W/2$ and $2kT/q$, which are more adequate for the asymmetrical case. In addition different notations were introduced to distinguish between the extrinsic Debye lengths of the P and N regions.

The relations (12)—(15) are valid for any values of doping levels, symmetrical or not symmetrical, in the range of sufficiently doped, but not degenerate, materials (i. e. $10^1 \leqslant N_A/n_i,\ N_D/n_i \leqslant 10^6$ for germanium), and for bias voltages in the low injection range.

The corresponding relations for the particular case of enough large reverse biases ($U_A \leqslant -5$) are obtained by considering $\exp(U_A) \ll 1$ in (12), (13), (14) and (15). In order to have a better description of the influence of the asymmetry and doping parameters (on the one hand) and of the lifetime parameters (on the other hand) on the spatial variation of the quasi-Fermi potentials, it is convenient to introduce the notations :

M = the asymmetry parameter $= N_A/N_D$; N = the doping parameter $= N_D/n_i$ (16)

and to use intrinsic Debye length $L_D = \sqrt{kTK\varepsilon_0/2q^2 n_i}$ instead of extrinsic Debye lengths L_{DP} and L_{DN}. Then the spatial variation of the quasi-Fermi potentials are expressed as :

$$U_p(X) - U_p(-X_P) = \log_e [1 + (L_D/L_{pN})\, f_p(X)], \tag{17}$$

$$U_n(X_N) - U_n(X) = \log_e [1 + (L_D/L_{nP})\, f_n(X)], \tag{18}$$

where the lifetime independent functions f_p and f_n have the following expressions :

$$f_p(X) = 2\,M^{-3/2}\,N^{-5/2} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)\,[1+(M+1)X]}} \exp(y^2)\,dy\,, \qquad -\frac{1}{M+1} < X < 0\,; \tag{19}$$

$$f_p(X) = 2\,M^{-3,2}\,N^{-5/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}} \exp(y^2)\,dy \right.$$

$$\left. + M^{3/2}\,N^2\,e^{|U_A|}\sqrt{\pi}/2 \left[\operatorname{erf} \sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)} - \right.\right. \tag{20}$$

$$\left.\left. - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)\left[1 - \frac{M+1}{M}X\right]}\right)\right]\right\}, \quad 0 < X < \frac{M}{M+1}\,;$$

$$f_n(X) = 2\,M^{-1}\,N^{-5/2} \int_0^{\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)\left[1 - \frac{M+1}{M}X\right]}} \exp(y^2)\,dy\,, \qquad 0 < X < \frac{M}{M+1}\,; \tag{21}$$

$$f_n(X) = 2\,M^{-1}\,N^{-5/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}} \exp(y^2)\,dy \right.$$

$$\left. + M^{1/2}\,N^2\,e^{|U_A|}\sqrt{\pi}/2 \left[\operatorname{erf} \sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)} - \right.\right. \tag{22}$$

$$\left.\left. - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)\,[1+(M+1)X]}\right)\right]\right\}, - \frac{1}{M+1} < X < 0.$$

The results of a numerical calculation on the basis of relations (17) to (22) of the spatial dependence of the quasi-Fermi potentials under reverse bias conditions are graphed in Fig. 2, for a p^+-n junction with $N_A/N_D = 10^2$, $N_D/n_i = 10^2$, $L_D/L_{pN} = 1$, $L_D/L_{nP} = 1$. The values chosen for the applied voltage V_A are the same as used by Sah [3]. As can be seen from the plots in Fig. 2, the drops in both U_p and U_n are essentially

complete in the transition region and are equal to the applied voltage V_A [1] for reverse biases larger than about 1 V ($U_A > 50$). A special feature involved in the case of asymmetrical p^+-n junctions is that the HQFP is essentially constant in the P side of the transition region; it begins to drop beyond the section X=0, in the N side of the transition region.

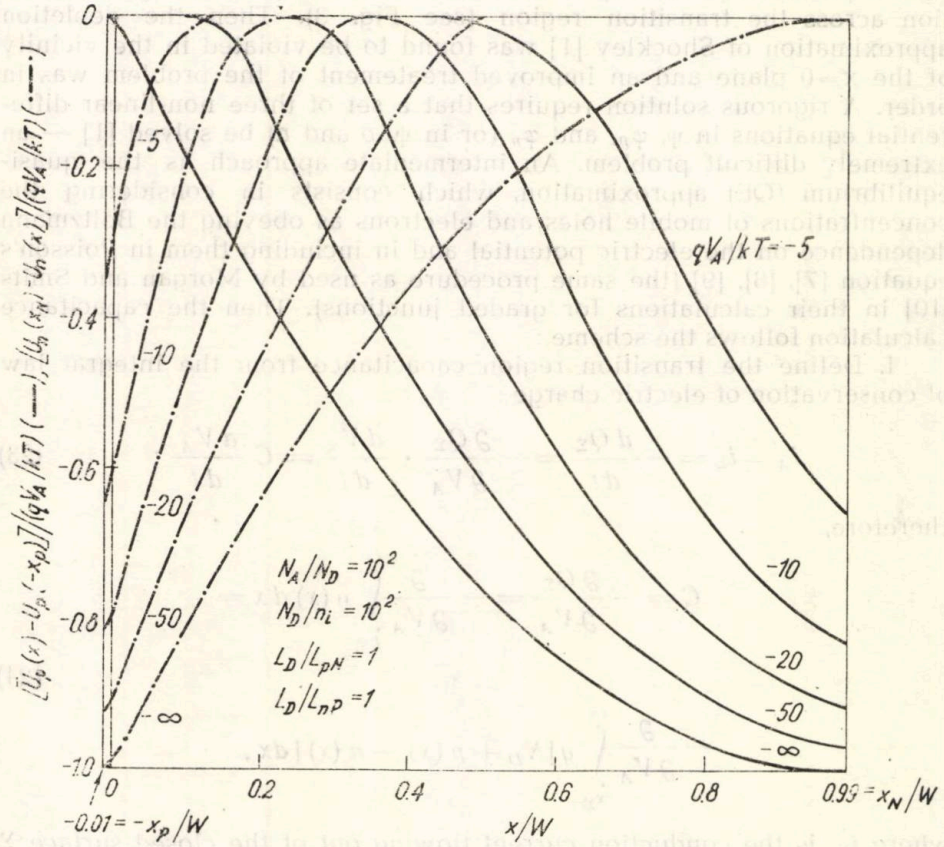


Fig. 2. Numerically computed spatial variation of $U_p(X)$ and $U_n(X)$ under reverse bias conditions for a specific p^+-n junction.

[1]) As it was pointed out by Sah [3] in the analysis of the case of wide bandgap materials, this kind of analysis, which is essentially based on a one-cycle iterative procedure, slightly overestimates the total change of the quasi-Fermi potentials across the transition region. This feature is present in our case also: the total drop in U_p across the transition region, as obtained from (17) and (20) is:

$$U_p(X_N) - U_p(-X_P) \doteq |U_A| - \log_e \frac{N^{1/2}}{L_D/L_{pN}} .$$

3. The validity of quasi-equilibrium approximation in transition region capacitance calculations

The capacitance calculations of asymmetrical step p^+-n junctions under reverse bias conditions involve some particularities generated by the presence of the „spill-over" effect in the space charge distribution across the transition region (see Fig. 3). Then the depletion approximation of Shockley [1] was found to be violated in the vicinity of the $x=0$ plane and an improved treatement of the problem was in order. A rigorous solution requires that a set of three non-linear differential equations in ψ, φ_p, and φ_n (or in ψ, p and n) be solved [1] — an extremely difficult problem. An intermediate approach is the quasi-equilibrium (QE) approximation, which consists in considering the concentrations of mobile holes and electrons as obeying the Boltzmann dependence on the electric potential and in including them in Poisson's equation [7], [8], [9] (the same procedure as used by Morgan and Smits [10] in their calculations for graded junctions). Then the capacitance calculation follows the scheme :

I. Define the transition region capacitance from the integral law of conservation of electric charge :

$$i_A = i_\Sigma = -\frac{dQ_\Sigma}{dt} = -\frac{\partial Q_\Sigma}{\partial V_A} \cdot \frac{dV_A}{dt} = C\frac{dV_A}{dt}\,; \tag{23}$$

therefore,

$$C = -\frac{\partial Q_\Sigma}{\partial V_A} = -\frac{\partial}{\partial V_A}\int_{k_\Sigma}^{l_N} \varrho(x)\,dx = \tag{24}$$

$$-\frac{\partial}{\partial V_A}\int_{x_\Sigma}^{l_N} q[N_D + p(x) - n(x)]\,dx\,,$$

where i_Σ is the conduction current flowing out of the closed surface Σ and the equality $i_A = i_\Sigma$ requires that this surface be defined to intersect the device in a nonconductive (i. e. hole and electron depleted) region

---

It can become greater than $|U_A|$ for $L_D L_{pN} < N^{1/2}/\sqrt{\pi}$ — a physically imposible situation. This result originates from the use of a potential distribution in (2) (as calculated in the depletion model) which slightly exceeds the exact potential distribution in the vicinity of the $x = x_N$ plane [6] resulting in an overestimation for the drop in U_p and in an underestimation in the drop in U_n in this region.

As regards the expression (7) of the hole current which enter in (2) and may also be a sourse of error for U_p, it is hard to change it in reverse bias conditions ; the exact calculations of De Mari [6] have revealed that $p(x_N) \ll p_n$ even in the presence of the drop in U_p, therefore the classic expression of the reverse current is maintained.

(Fig. 3) [1]). Our definition (24) is in accordance with that used by Gummel and Scharfetter [9] as long as a totally depleted region is identifiable in the transition region (this is the case of large reverse biases under the present discussion). For cases where only hole or electron depleted regions can be identified, similar definitions as (24) can be given in terms of conservation of hole or electron charge [6], [8], [9].

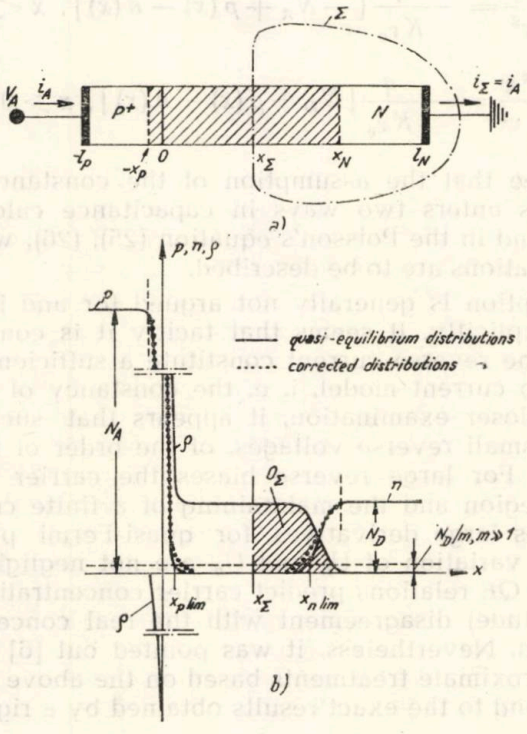


Fig. 3. The calculation of the transition layer capacitance. (a) The definition of the closed surface Σ in (23) and (24). (b) The variation of mobile carrier concentrations and of the electric charge density in the device, with the definition of the limiting sections $x_{p\,lim}$ and $x_{n\,lim}$.

[1]) For symmetrical junctions such a region contains the section x=0. For asymmetrical junctions at moderate reverse biases, the totally depleted region is in the *P N* side of the transition region and does not contain the section x=0. This is a rather important observation, which dictates a modification according to (24) of the commonly used definition of the transition region capacitance which determines it as the derivates of the total electric charge in the *P* or *N* sides of the junction. Chang [7] overlooked this aspect and obtained paradoxal results, inconsistent with the generally accepted depletion theory results. However, the capacitances calculated by Chang [7] are valid for large reverse biases, when the depleted region is pushed to the left and comprises the section x=0 beyond a specific voltage

II. Consider the quasi-equilibrium Boltzmann relations for mobile carriers, i. e. the relations (1) with $U_p(x) \equiv U_p(-x_p)$, $U_n(x) \equiv U_n(x_N)$.

III. Determine the integral in (24) by solving the complete Poisson's equation which includes the charge distribution of mobile hole and electrons :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{q}{K\varepsilon_0}[-N_A + p(x) - n(x)], \quad x < 0; \tag{25}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{q}{K\varepsilon_0}[N_D + p(x) - n(x)], \quad x > 0; \tag{26}$$

One can see that the assumption of the constancy of the quasi-Fermi potentials enters two ways in capacitance calculation : in the definition (24) and in the Poisson's equation (25), (26), where the mobile carrier concentrations are to be described.

This assumption is generally not argued for and in some cases it is not stated explicitly. It seems that tacitly it is considered that the low values of the reverse current constitute a sufficient motivation for assuming a zero current model, i. e. the constancy of quasi-Fermi potentials. At a closer examination, it appears that such a motivation holds only for small reverse voltages, of the order of those met under forward biases. For large reverse biases the carrier are depleted in the transition region and the maintaining of a finite current, even negligible, requires large derivatives for quasi-Fermi potentials, therefore the spatial variation of U_p and U_n are not negligible (see Fig. 2). As a result, the *QE* relations predict carrier concentrations in a serious (order-of-magnitude) disagreement with the real concentrations in the transition region. Nevertheless, it was pointed out [6] that the predictions of the approximate treatments based on the above outlined scheme closely correspond to the exact results obtained by a rigurous numerical treatment.

A reasonable motivation for this apparently paradoxal situation can be given as follows. The QE relations correctly describe the mobile carrier concentrations near the edges of the transition region, where they are comparable with the ionised donors or acceptors concentrations in the right-hand term of Poisson's equation (25), (26) and in capacitance denition (24) ; on the contrary, the mobile carrier concentrations are very small compared with the ionised donor or acceptor concentrations in the volume of the transition region and an unaccurate description of their negligible contribution is of no practical importance. The plots in Fig. 2 are relevant in this respect.

In order to check quantitatively the validity of the *QE* approximation we shall calculate the errors introduced in the calculation of mobile carrier concentrations at two limiting sections $x_{p\,lim}$ and $x_{n\,lim}$ defined as the sections in the transition region where p and n are m times smaller than N_D (see Fig. 3).

To avoid confusion, it is necessary to distinguish between the carrier concentration resulting from each for the following approximations :

(a) using the *QE* relations with $U(x)$ from the depletion model ;

(b) using the proper relations (1) with $U(x)$ from the depletion model and $U_p(x)$, $U_n(x)$ from the one-cycle iterative procedure to account for the non zero current (this paper) ;

(c) using the *QE* relations with $U(x)$ resulted from Poisson's equation with mobile carrier in the right-hand term as described by *QE* relations (Chang's [7], [8] and Gummel and Scharfetter's [9] method).

We shall compare (a) with (b). Ideally, a comparison should be made between (c) and the exact calculations [6], but a comparison between (a) and (b) is expected to result in relevant conclusions with respect to the effect of the non-zero current because the corrected calculation (b) is consistent with the non-zero current condition at the given approximate potential distribution.

Then the *QE* relations give :

$$p_{QE}(X) = n_i \exp [U_p(-X_p) - U(X)],$$
$$n_{QE}(X) = n_i \exp [U(x) - U_n(X_N)], \tag{27}$$

and the proper relations (1) can be arranged as :

$$p(X) = p_{QE}(X)[1 + \varepsilon_p(X)], \quad n(X) = n_{QE}(X)[1 + \varepsilon_n(X)], \tag{28}$$

where $f_p(X)$ and $f_n(X)$ denote the relative errors introduced by the *QE* calculation of $p(X)$ and $n(X)$. According to (1), (17) and (18) :

$$\varepsilon_p(X) = (L_D/L_{pN}) f_p(X), \quad \varepsilon_n(X) = (L_D/L_{nP}) f_n(X), \tag{29}$$

where $f_p(X)$ and $f_n(X)$ are given by the set of equations (19)—(22).

We are interested in evaluating $\varepsilon_p(X_{p\,lim})$ and $\varepsilon_n(X_{n\,lim})$, thence $f_p(X_{p\,lim})$ and $f_n(X_{n\,lim})$ are to be calculated. The formulae involved in such a calculation are given in Appendix. Figure 4 and Figure 5 present the results of a numerical evaluation of $f_p(x_{p\,lim})$ and $f_n(x_{n\,lim})$ in their dependence on voltage, asymmetry parameter and doping parameter. A value of 100 was chosen for m, which was considered to be a good criterium for the negligibility of p and n as compared with N_D.

The following important features are revealed by the plots in Fig. 4 and 5 :

1) The errors introduced in the *QE* calculation of $p(X)$ and $n(X)$ in the sections where they are important i. e. $x < x_{p\,lim}$ for $p(x)$ and $x > x_{n\,lim}$ for $n(X)$ are independent on (or even decreasing with) the magnitude of the reverse voltage ; then the *QE* relations may be used to describe the mobile carrier concentrations in Poisson's equation up to high reverse voltages (which do not approach, of course, the break-

down voltages), provided that the lifetime parameters L_D/L_{pN} and L_D/L_{nP} satisfy the conditions of small ε_p and ε_n at a moderate reverse voltage. The physical support of this result is that the limiting sections $x_{p\,lim}$ and $x_{p\,lim}$ are pushed toward the edges of the transition region while

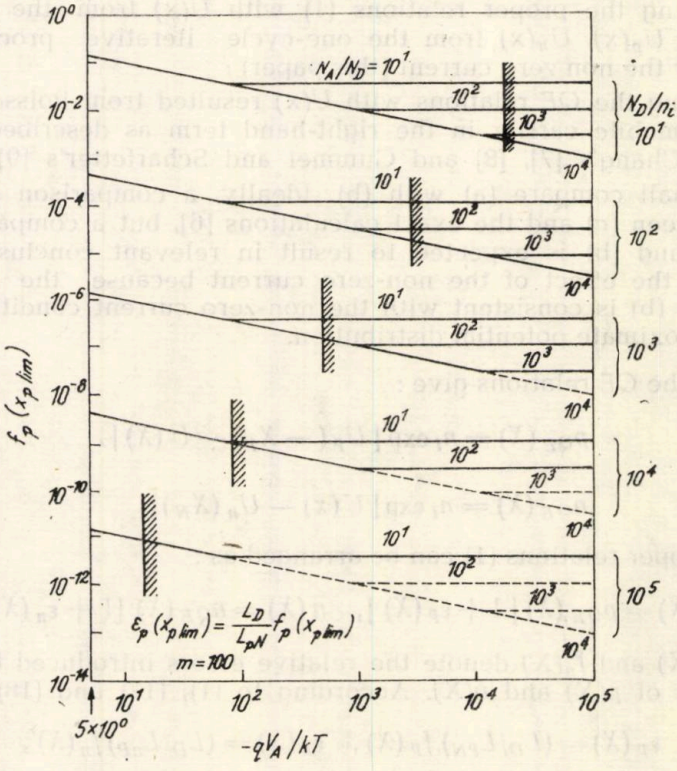


Fig. 4. The dependence of $f_p(x_{p\,lim})$ on voltage, asymmetry parameter and on doping parameter (only asymptotic behaviour was ploted in the range of voltage dependent values). The dotted lines represent an extrapolation of the present calculations in the range of degenerate dopings, i. e. N_A/n_i and/or $N_D/n_i \geqslant 10^6$ for germanium. The cross-hatched lines show the breakdown limitation (germanium).

the reverse voltage is increased, together with the sections where $U_p(x)$ and $U_n(x)$ begin to drop.

2) The restrictions imposed on the values of the minority carrier lifetimes by the condition of having a negligible error in *QE* calculations are not so strong as it was believed. This conclusion is illustrated by the following example : for a p^+-n junction with

$$N_A/N_D = 10^2, \quad N_D/n_i = 10^2, \quad V_A = -100\,kT/q,$$

the plots in Fig. 4 indicate $f_p(x_{p\,lim}) = 10^{-4}$; then, imposing a $\varepsilon_p(x_{p\,lim})$ of 10^{-2} (which is a quite strong condition in connection with the pre-

viously imposed $m=100$), a L_D/L_{pN} of 10^{-2} ($\tau_{pN}=10^{-12}$ s) may be tolerated. This means a reverse current of 2,6 A/cm^2 for a germanium junction ($K=16$, $n_i=2.5\times10^{13}$ cm^{-3}, $\mu_p=1700$ cm^2/Vs, $T=300°K$). Such a junction behaves as a capacitor with not negligible d. c. loss. Fig. 5

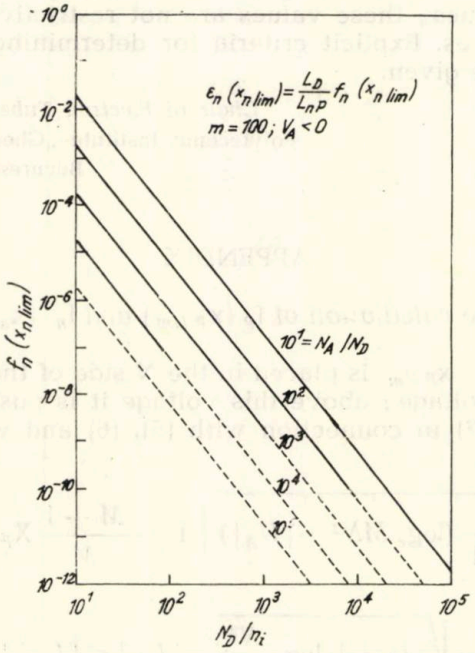


Fig. 5. The dependence of $f_n\ (x_{n\,lim})$ on asymmetry parameter and on doping parameter. The dotted lines represent an extrapolation of the present calculations in the range of degenerate dopings, i. e. N_A/n_i and/or $N_D/n_i \geqslant 10^6$ for germanium.

indicates a less restrictive condition for minority carrier lifetime in the heavy doped side of the junction, an easy interpretable result : the drop in U_n, being determined by the condition of supporting a much smaller current is smaller than the drop in U_p (see Fig. 2).

Fig. 4 and 5 indicate also decreasing errors as N_A/N_D and/or N_D/n_i are increased.

4. Conclusion

The spatial variations of the quasi-Fermi potentials in asymmetrical step p^+-n junctions under reverse bias conditions were analysed, following an approximate procedure already described in the literature for the symmetrical junctions. A set of curves, numerically computed was given

The results obtained in this analysis were used to check the validity of the quasi-equilibrium approximation in capacitance calculations. It was pointed out that the quasi-equilibrium relations may be used to calculate the transition region capacitance, regardless of the magnitude of the reverse voltage, if the minority carrier lifetimes are under specific values; these values are not restrictive in the normally encountered devices. Explicit criteria for determining the above mentioned values were given.

Chair of Electron Tubes and Transistors
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

APPENDIX

The calculation of $f_p(x_{p\,lim})$ *and* $f_n(x_{n\,lim})$

The section $x = x_{p\,lim}$ is placed in the N side of the transition region up to a specific voltage; above this voltage it is pushed in the P side. Quantitatively, (27) in connection with (5), (6) and with the definition of $x_{p\,lim}$ provides:

$$\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}\left[1 - \frac{M+1}{M} X_{p\,lim}\right] = \tag{A1}$$

$$= \sqrt{|U_A| + \log_e \frac{N^2}{m}}, \quad |U_A| < |U_{AO}|;$$

$$\sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}\,[1 + (M+1) X_{p\,lim}] = \tag{A2}$$

$$\sqrt{\log_e mN}, \qquad |U_A| > |U_{AO}|,$$

where

$$U_{AO} = (M+1)\log_e [mN^{-2}(MN^2)^{M/(M+1)}]. \tag{A3}$$

The corresponding expressions of the $f_p(x_{p\,lim})$ are:

$$f_p(X_{p\,lim}) = 2M^{-3/2}N^{-5/2}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}} \exp(y^2)\,dy + \sqrt{\pi}\,N^{-1/2}e^{|U_A|}$$

$$\left[\operatorname{erf}\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)} - \operatorname{erf}\sqrt{|U_A| + \log_e \frac{N^2}{m}}\right]$$

$$\doteq \text{(asymptotic, for } \log_e MN^2 \ll |U_A| \ll |U_{AO}|) \qquad (A\,4)$$

$$mN^{-5/2}\, U_A{}^{-1/2}, |U_A| < |U_{AO}|;$$

$$f_p(X_{p\,lim}) = 2M^{-3/2}N^{-5/2}\int_0^{\sqrt{\log_e mN}} \exp(y^2)\,dy = \text{not dependent on } U_A, \qquad (A\,5)$$

$$|U_A| > |U_{AO}|;$$

The section $x = x_{n\,lim}$ is placed always in the N side region for reverse bias conditions at reasonable chosen m ($m < MN$). One obtains:

$$\sqrt{\frac{M}{M+1}(\log_e MN^2 + |U_A|)}\left[1 - \frac{M+1}{M}\, X_{n\,lim}\right] = \sqrt{\log_e m}, \qquad (A\,6)$$

and

$$f_n(X_{n\,lim}) = 2M^{-1}N^{-2/5}\int_0^{\sqrt{\log_e m}} \exp(y^2)\,dy = \text{not dependent on } U_A. \qquad (A\,7)$$

The above derived expressions (A3) (asymptotic behavior), (5) and (A 7) were numerically evaluated for:

$$m = 100, \quad |U_A| \geqslant 5, \quad 10^1 \leqslant M \leqslant 10^5, \quad 10^1 \leqslant N \leqslant 10^5,$$

in order to be used in Section 3.

REFERENCES

1. W. *Shockley*, Tehory of p-n junctions in semiconductors and p-n junction transsistors, *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 28, pp. 435—489, July 1949.
2. C. T. *Sah, R. N. Noyce, W. Shockley*, Carrier generation and recombination in p-n junctions and p-n junction characteristics, *Proc. IRE*, vol. 45, pp. 1228—1243, September 1957.
3. C. T. *Sah*, The spatial variation of the quasi-Fermi potentials in p-n junctions, *IEEE Trans. on Electron Devices*, vol. ED-13, pp. 839—846, December 1966.
4. H. K. *Gummel*, A self-consistent iterative scheme for onedimensional steady state transistor calculations, *IEEE Trans. on Electron Devices*, vol. ED-11 pp. 455—465, Octombre 1964.
5. H. K. *Gummel*, Hole-electron product of p-n junctions, *Solid-State Electronics*, vol .10, pp. 209—212, March, 1967.
6. A. *De Mari*, An accurate numerical steady-state one-dimensional solution of the p-n junction, *Solid-State Electronics*, vol. 11, pp. 33—58, January 1968.
7. Y. F. *Chang*, Capacitance of p-n junctions: space charge capacitance, *J. Appl. Phys.* vol. 37, pp. 2337—2342, May, 1966.

8. *Y. F. Chang,* The capacitance of p-n junctions, *Solid-State Electronics,* vol. 10, pp. 281—287, April 1967.

9. *H. K. Gummel, D. L. Scharfetter,* Depletion-layer capacitance of p^+-n step junctions, *J. Appl. Phys.,* vol. 38, pp. 2148—2153, April 1967.

10. *S. P. Morgan, F. M. Smits,* Potential distribution and capacitance of a graded p-n junction, *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 39, pp. 1573—1603, November 1960.

I. P. „GRAFICA NOUĂ" II — c. 7992

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1980 AUG 7

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 3 ANUL 1969
MAI — IUNIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXI – NUMĂRUL 3

MAI — IUNIE
1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Conf. dr. ing. *Petru Baltă* ; Academician prof. *Martin Bercovici* ; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* ; Conf. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua* ; Conf. dr. *Ion Grădișteanu* ; Conf. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific) ; Prof. *Constantin Ionescu-Bujor*, Profesor emerit ; Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. ing. *Nicolae Manolescu* ; Prof. ing. *Ștefan Mantea* ; Prof. dr. ing. *Marius Preda* ; Prof. ing. *Mihai Renert* ; Conf. *Mircea Soare* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. docent *Radu Voinea* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

Redactor responsabil:
Rector
Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*
membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

INGINERIE ECONOMICĂ

St. Bîrlea, T. Homos, Stana Costoiu

Considerații asupra modelării cibernetice a proceselor de producție în construcția de mașini 21

FIZICĂ

Candida Gheorghiță-Oancea, Liliana Barbici, Maria Popa-Milea, P. Cristea

Asupra efectului fotovoltaic la contactul stratelor subțiri de telur cu zincul 37

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

Gh. Constantinescu

Die Hydrolyse der Einjahrpflanzen zur Herstellung von Furfurol und organo-mineralische Komplexdüngern 41

Gr. Teodorescu

Metodă de determinare pentru 6-metoxi-2-amino-benzotiazol . . . 51

MECANICĂ

C. Guță

Considerații asupra regimului optim de urcare al rachetelor . . . 57

REZISTENȚA MATERIALELOR

M. Radeș

Izolații antivibratoare din straturi viscoelastice 71

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

G. Bărănescu

Echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație la motorul în linie cu aprinderi neuniform repartizate și cu distanțe egale între cilindri consecutivi . . . 81

B. Grünwald, N. Apostolescu

Calculul energiei interne a gazelor din cilindrul motorului cu ardere internă. cu considerarea neomogenității termice a amestecului în perioada arderii 85

TERMOTEHNICĂ

Tr. Nicolescu, Al. Dănescu Vs. Radcenco

Analiza termodinamică a proceselor de schimb de gaze din cilindrul motorului cu ardere internă 99

MAȘINI UNELTE

I. Gheghea

Calculul pierderilor volumice prin fante cilindrice subțiri . . . 119

TRANSPORTURI

Al. Popa

Contribuții la determinarea vitezelor și tonajelor optime ale trenurilor de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA . . 135

Резюме

Д.К.338.062.01 : 331.01 : 001.89 : 621.391 : 621

Ст. Бырля, Т. Хомош, Стана Костою

Некоторые соображения по поводу моделирования производственных процессов в машиностроении

В своих рассуждениях авторы исходят из соображения о возможности распространения кибернетических понятий в экономической и общественной области. В работе рассматривается возможность применения понятия системы в описании прерывающихся производственных процессов. На основе теории структур расчитывается на то, что всегда процесс изготовления X описывается структурой, которая может быть символически выражена в виде

$$X = \{ \mathcal{A} \mid \cup, \cap, X, \subset, f, \ldots, \}$$

где

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}; n < \aleph_0$$

В продолжении, принимая во внимание условия гомологии структур, в работе формулируется критерий эквивалентности процессов и вводится понятие регулируемого процесса.

Эти ключевые понятия позволяют, по мнению авторов, рассматривать по-новому проблемы связанные с конструкцией математических моделей как в промышленности так и в установлении системы изготовления (индивидуальной, серийной и массовой), в которой может быть включен определенный промышлееный процесс. После рассмотрения обших принципов моделирования, в работе разбирается частный случай влияния частот ности (периодичности) на конструирование моделей и на классификацию систем нзготовления.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 542 63 : 546.24 : 537 : 535 : 661.8.592 : 546.47

К. Георгицэ-Оанча и сотрудники

О фотовольтаическом эффекте в контакте тонких слоев телурра с цинком

В работе выявляется и изучается во времени фотовольтаический эффект при соприкосновении тонких слоев телурра с цинком. Слои телурра наносились нормально и косо, вследствие чего было установлено, что эффект в случае косого отложения телурра больше чем в случае нормального отложения, явление которое сохраняется и во времени.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Summary

D.C. 338.062.01:331.0:001.89:621.391:621

St. Bîrlea, T. Homos, Stana Costoiu

Considerations on the Cybernetic Modelling of the Production Processes in Machine Construction.

Starting with the premise that the extension of cybernetic concepts in the sphere of economy and society is accepted, the paper examines the way the concept of system can be used in the description of the production processes of discontinuous character. On the basis of the structure theory, it is considered that a manufacturing process X is always described by a structure which can be symbolically expressed in the form :

$$X = \{ \mathcal{A} \mid \cup, \cap, X, \mathbb{R}, f, \ldots, \}$$

where :

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}; n < \aleph_0$$

Further, considering the structure homology conditions, the authors formulate in the paper the criterion of the process equivalences and introduce the notion of controled process.

These fundamental notions, in the author's opinion, permit a new approach to the problems conected to the construction of mathematical models in industry, as well as in the establishment of the manufacturing system (individual, series and mass) in which a certain industrial process can be ranged. After approaching the general modelling principles, the authors treat in the paper of the particular case of the influence of frequency (of the periodicity on the construction of the models and of the classification of the manufacturing systems).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 542.63:546.24:537:535:661.8...592:546.47

C. Gheorghiţă-Oancea and others

On the Photovoltaic Effect at the Contact of Thin Tellurium Layers with Zinc.

In this paper it is pointed out the appeareance of the photovoltaic effect at the contact between thin tellurium and zinc layers and its evolution in time. The tellurium layers have been deposited normally and obliquely and it has been observed that the effect is higher in the case of oblique tellure deposition than in the case of normal deposition, fact which is maintained in time.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 542.938 : 547.724.1 : 66.093.8 : 668.533.61.633

Г. Константинеску

Гидролиз годичных растений с уелью получения фурфурола и органо-минеральных комплексных удобрений

Предлагается новый метод получения фурфурола вместе с органо-минеральными комплексными удобрениями из остатков годичных растений. Метод характеризуется тем, что молотая солома обрабатывается малыми количествами серной кислоты 5% и после нейтрализации аммиаком подвергается термической обработке при 180°С, либо серной кислстой 2,5% и перекисью водородом 10% без термической обработки.

В настояшей работе исследовалось влияние времени и среды реакции не только на выход фирфурола, но и на свойства побочного продукта: ионообмен, перегнойное вещество, содержание азота, а так же преобразования некоторых групп органических веществ, целлюлозы и лигнины.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 546.543/545 : 542.951.5 : 547.792.3

Гр. Теодореску

Метод определения 6-метокси-2-амино-бензотиазола

Дан метод определения 6-метокси-2-амино-бензотиазола, путем комплексования тетра-родано-диамино хромата (III) аммония (соль Райнека). Классический метод определения, путем диазотирования аминной группы не дает хорошие результаты из-за чувствительно уменьшенной основности (электронная плотность) аминной группировки.

Определения были сделаны в 45%-ной сернокислой среде, с целью сдвига равновесия реакции: $R—NH_2 \rightleftarrows R—NH_3$ в правую сторону, то есть к комплекснообразующей с анионом соли Рейнекэ структуре.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 629.136.3 : 629.19 : 522

К. Гуцэ

Соображения относительно режима запуска ракет

В работе трактуется режим запуска ракет ($v = v(z)\varphi = \varphi(z)$: $m = m(z)$ для случая если ракета продвигается в плотных слоях атмосферы и изменение плотности дано соотношением (9). Исследуется также влияние ускорения тяготения для ракет, летающих на большой высоте, вне плотных слоев атмосферы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 542.938:547.724.1:66.093.8:668.533.61.633

Gh. Constantinescu

Hydrolysis of Annual Plants in View of Obtaining Furfurol and Complex Organic-mineral Fertilizers.

The author suggests a new method for obtaining furfurol along with complex organic and mineral fertilizers form wastes of annual plants. The method is characterized by the fact that ground straw is treated either with small amounte of 5% sulphuric acid and after neutralization with ammonia it is submitted to a heat treatment at 180°C or with 2,5% sulphuric acid and 10% oxygenated water eithout heat treatment.

In the present paper, the author has studied the influence of time and reaction medium upon the furfurol output, as well as on the properties of the secondary product; the capacity of cationic exchange, the content in humic substances, the content in azide, as well as the transformations of some groups of organic substances. cellulose and lignin.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 546:543/545:542.951.5:547.792.3

Gr. Teodorescu

The Method of Determination for 6-Methoxy-2-Aminobenzothiazole.

In this article is presented the determination of 6-methoxy-2-amino-benzothiazole by complexation with the tetratriocianatodiamino chromate of amonium (the salt of Reinecke). The classical method of determination by diazotization of the amino-group, is not possible to application, considering that the basicity (density of electrons) of this group is verry low. The determinations were effectuated in the presence of the sulfuric acid (45% concentrations) for the pirpose of displacing of the equilibrium $R\text{-}NH_2 \rightleftarrows R\text{-}\overset{+}{N}H_3$ to the right, hince to the structure complexable with the anione of the Reinecke-salt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 629.136.3:629.19:522

C. Guţă

Considerations on the Optimum Rocket Climbing Regime.

The paper treats of the rocket climbing regime ($v=v(z)$; $\varphi=\varphi(z)$; $m=(z)$ for the case when the rocket manoeuvres in the dense atmosphere layers and the density variation is given by the relation (9). The author also studies the influence of the acceleration gravitation for rockets flying at considerable heights, outside the dense atmosphere.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

М. Радеш

Д. К. 539.3/4.624.023.9 : 624.072.2 : 534

Виброизоляционные вязкоупругие слои

В работе исследованы вынужденные колебания призматических балок, с свободными концами и одной массой закрепленной по середине, лежащихся на деформируемом демпфирующим винклеровском основании.

Введется „комплексный коэффициент постели" (комплексный модуль оснований) характеризирующий упругие и диссипативные свойства оснований; таким образом решение задачи не зависит от выбора определенной реологической модели.

Представлен простой метод вычисления частотного ответа системы „балка — вязкоупругий слой".

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 621.432.3/.4 : 621.43.04 : 621-232

Г. Бэрэнеску

Уравнивание внешних моментов инерционных сил масс с поступательным движением у линейного двигателя с неравномерно распределенными зажиганиями и с равным расстоянием между последовательно расположенными цилиндрами

В работе исследуется возможность улучшения уравновешивания моментов инерционных сил у линейных двигателей внутреннего сгорания путем неравномерного распределения зажиганий. Указываются двигатели, к которым метод не может быть применен без оговорок, ограничения, которые необходнмо учитывать при устройстве кривошипов для сохранения приемлемого равновесия инерционных сил, а также условия, которым должно соответствовать количество цилиндров с целью получения результатов с минимальными отклонениями от равномерного распределения зажиганий.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 621.431:662.61:621.43-4:661.613.5

Б. Грюнвальд, Н. Апостолеску

Расчет внутренней энергии газов в цилиндре двигателя внутреннего сгорания с учетом тепловой неоднородности газовой смеси в период сгорания

В работе разрабатывается изображение газовой смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорани, что позволяет определение внутренней энергии в период сгорания с учетом прерывностей температуры. Авторы указывают что разработка индикаторной диаграммы в виду определения закона сгорания, расчет внутренней энергии газовой смеси сосредней температурой полученной на основе уравнения состояния, вносит погрешности, доходящие до 15% на определенных промежутках процесса сгорания. Разработанный авторами метод расчета уменьшает в несколько раз погрешности и позволяет выразить элементарное изменение внутренней энергии в форме подходящей для программирования расчета закона сгорания в цифровых машинах.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 539.3/.4.624.023.9:624.072.2:534

M. Rades

Viscoelastic Layers as Antivibration Isolators.

The paper deals with the frequency-response of finite beams on flexible foundation, introducing a "complex foundation modulus" including restoring and damping properties of the subgrade, the solution being thus independent of the choice of a certain rheological model.

The problem of the steady-state motion of finite uniform free-free beams on viscoelastic Winkler-type foundation and having a concentrated mass attached to the midpoint is studied from the point of view of the effectiveness of an isolator considered as a continuous layer. The motion transmissibility at the point of the attachement of the mass is calculated and for a numerical particular case the results are presented graphically.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 621.432.3/.4:621.43.04:621-232

G. Bărănescu

Balancing of the Inertia Forces Outer Moments of Masses Having a Translation Motion in the In-line Engine Having Non-uniform Distributed Ignitions and Equal Distances Between Consecutive Cylinders.

The author studies the possibility of improving the balancing of inertia moments in in-line engines with interior ignition by the non-uniform distribution of ignitions. The author specifies the engines to which the method refers, the restrictions imposed in organizing the operations in order to maintain an acceptable balancing of the inertia forces, as well as the conditions to be fulfilled by the number of cylinders, in view of obtaining some solutions having deviations as low as possible from the uniform ignition distribution.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 621.431:662.61:621.43-4:662.613.5

B. Grünwald, N. Apostolescu

Calculation of the Internal Energy of the Gases Considering the Therma Non-homogeneity of the Gas Mixture in the Engine Cylinder During the Combustion.

The authors elaborate in the paper a representation of the gas mixture in the cylinder of the internal combustion engine which permits to determine the internal energy during the combustion, taking into account the temperature discontinuities. The authors show that the calculation of the internal energy of the gas mixture with the mean temperature ,obtained on basis of the state equation, and the analyse of the indicated diagram in view of determining the combustion law, introduces errors, which may reach up to 15% on certain intervals of the combustion process. The calculation method elaborated by the authors reduces the errors several times and permits to express the internal energy variation in a form suitable to the programming of the combustion law calculation on digital computers.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 621.432:621.43.01:621.1.01 : 621.43.06

Тр. Николеску, Ал. Дэнеску, Вс. Радченко

Термодинамический анализ процессов газообмена происходящие в цилиндре двигателя внутреннего сгорания

На основе термодинамического анализа процессов наполнения и выпуска, в статье устанавливаются общие выражения температуры в конце наполнения T_a и выпускных газов T_E. В исследовании была применена гипотеза о изентронном характере расширения газов в цилиндре во время свободного выпуска. Было уточнено влияние тактности двигателия и параметров ε, λ, ϱ над температурами T_a и T_E. Полученные соотношения могут быть использованы при создании нового метода расчета диаграммы поршневого двигателя.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 621.9 : 621.22 : 532

И. Гегя

Расчет обьемных потерь через узкие цилиндрические щели

Исходя из уравнения течения вязких жидкостей и уравнения непрерывности, в работе выводится зависимость для расчета расхода жидкости, протекающей через цилиндрическую щель как постоянной, так и переменной толщины, в продольном направлении и по окружности.

В работе даны также графики изменения расхода жидкости в зависимости от различных параметров щели.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Д. К. 625.24 : 625.282-83 : 621.3.025 : 338.063.41 : 3381

Ал. Попа

К определению оптимальной скорости и веса грузовых поездов буксированных электрвозами 060 ЕА

Обычно в расчетах тяги определяется вес и скорость поездов только из использования мощности электровоза без учета способности хода.

В настоящей работе дается метод определения оптимального веса и соответствующей ему с точки зрения осуществления максимальной перевозки товаров, для буксировки грузовых поездов электровозами 060 ЕА.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 621.432:621.43.01:621.1.01:621.43.06

Tr. Nicolescu, Al. Dănescu, Vs. Radcenco

The Thermodynamical Analysis of the Gas Exchange Processes in the Interior Combustion Engine Cylinder.

On basis of the thermodynamical analysis of the filling and exhaust processes of the cylinder, the authors establish in the paper the general expressions of the temperature at the end of the admission T_a and respectively of the exhaust gases T_E. In the study carried out, they have applied the hypothesis concerning the reversible adiabatic character of the gas expansion in the cylinder, in the free exhaust process. They present the influence of the number of engine staps and of parameters ε, λ, ϱ on temperatures T_a and T_E. The relations obtained can make up a premise in the elaboration of a calculation method of the piston engine diagram which should eliminate certain elements of empiric character (selection of the residual flue gas temperature, etc.), available in the simplified methods known.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 621.9:621.22:532

I. Gheghea

The Calculation of Volume Losses Through thin Cylindrical Slots.

Starting from the equation of viscous liquids flow and the continuity equation, the author deduces in the paper the relations for the calculation of the liquid flow running through the cylindrical slot, both of constant and variables thickness in the axial direction and according to the circumference.

He also presents flow variation graphs function of the various parameters of the slot.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.C. 625.24:625.282-83:621.3.025:338.063.41:338T1

Al. Popa

Contributions to the Determination of Optimum Speeds and Tonnage of Goods Trains Towed by Electric 060 EA Engines.

In the traction calculation it is usual to determine the goods trains tonnage, without having in view the railway line transport capacity.

In the present paper, the author establishes an optimum tonnage calculation unit par train from point of view of achieving a maximum goods traffic.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Résume

C.D. 338.062.01:331.0:001.89:621.391:621

St. Bîrlea, T. Homos, Stana Costoiu

Considération sur le modelage cybernétique des processus de production dans la construction de machines.

A partir de la prémisse de l'acception de l'extension des concepts cybernétiques dans la sphère de l'économie et de la société, les auteurs examinent dans cet ouvrage la manière dont le concept de système peut être utilisé dans la description des processus de production á caractère discontinu. A partir de la théorie des structures, ils considèrent qu'un processus de fabrication X est toujours décrit par une structure qui peut être exprimée symboliquement sous la forme :

$$X = \{ \mathcal{A} \mid \cup, \cap, X, \Gamma, f, \ldots, \}$$

dans laquelle :

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}; n < \aleph_0$$

Tout en considérant les conditions d'homologie des structures, les auteurs formulent plus loin dans l'ouvrage le criterium de l'équivalence des processus et introduisent la notion de processus réglé.

Ces notions fondamentales permettent, selon l'opinion des auteurs, d'aborder d'une manière nouvelle les problèmes reliées à la construction des modèles mathématiques dans l'industrie, ainsi que d'établir le système de fabrication (individuelle, de série, en masse) dans lequel un certain processus industriel peut être encadré. Après avoir abordé les principes généraux du modelage, les auteurs traitent dans l'ouvrage du cas particulier de l'influence de la fréquence de la périodicité sur la construction des modèles, ainsi que de la classification des systèmes de fabrication.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 542.63:546.24:537:535:661.8...592:546.47

C. Gheorghiţă-Oancea et collaborateurs

Sur l'effect photovoltaïque au contact des couches minces de tellure avec le zinc.

Dans ce travail on a mis en evidence l'effet photovoltaïque qui apparait au contact des couches minces de tellure avec le zinc et son evolution en temps entre dans couches minces de tellure et de zinc. Les couches de tellure ont été déposées normalement et obliquement. On a constaté que l'effet est plus grand dans le cas du dépôt oblique que dans celui du dépôt normal, fait qui se maintient aussi dans le temps.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

Zusammenfassung

D.K. 338.062.01:331.0:001.89:621.391:621

St. Bîrlea, T. Homoş Stana Costoiu

Betrachtungen über die kybernetische Modellierung der Produktionsprozesse im Maschinenbau.

Von der Voraussetzung ausgehend. dass die Erweiterung der kybernetischen Begriffe in dem Wirtschafts- und Gesellschaftsgebeit genehmigt wird, prüft die vorliegende Arbeit die Art, in der der Systementwurf in der Beschreibung der Arbeitsvorgänge mit diskontinuierlishem Charakter verwendet werden kann. Auf Grund der Strukturentheorie wird angenommen, dass ein Fabrikationsprozess X immer von einer Struktur beschrieben wird, die Symbolisch unter folgender Form ausgedrückt werden kann :

$$X = \{ \mathcal{A} \mid U, \cap, X, \mathbb{R}, f, \ldots, \}$$

wo :

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}; n < \aleph_0$$

Unter Beachtung der Homologiebendingungen der Strukturen, formuliert die Arbeit fortlaufend das Kriterium der Prozessgleichwertigkeit und führt den Begriff von geregeltem Prozess (Vorgang ein.

Diese Grundbegriffe erlauben, nach der Ansicht der Verfasser, eine neuartige Behandlung der Fragen die mit dem Bau der mathematischen Modelle in der Industrie verbunden sind, sowie mit der Bestimmung des Fabrikationssystems (Einzel-, Serien- und Massenherstellung) in das ein gewisser Industrieprozess eingeordnet werden kann.

Nach der Erörterung der allgemeinen Medellierungsprinzipien, behandelt die Arbeit den Einzelfall des Frequenzeinflusses (Periodizität) auf den Modellbau, sowie die Klassifizierung der Fabrikationssysteme.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 542.63:546.24:537:535:661.8...592:546.47

C. Gheorghiţă-Oancea und Mitarbaiter

Über den photovoltischen Effekt der dünnen Schichten von Tellur mit Zink.

In der Arbeit wurde der photovoltaische Effekt bei dem Kontakt zwischen den dünnen Tellurschichten und Zink hervorgehoben und zeitlich studiert. Die Tellurschichten wurden normal und schräg gelagert und dabei festgestellt, dass der Effekt im Falle des schräg gelagerten Tellur grösser ist als bei der Normallagerung, Tatsache die sich auch zeitlich bewährt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 542.938:547.724.1:66.093.8:668.533.61.633

Gh. Constantinescu

Hydrolise des plantes annuelles pour l'obtention du furfurol et des engrais complexes organo-minéraux.

L'auteur propose une nouvelle méthode pour obtenir le furfurol en même temps que les engrais complexes organo-minéraux à partir de déchets de plantes annuelles. La méthode est caractérisée par le fait que les pailles moulues sont traitées soit avec de petites quantités d'acide sulfurique à 5% et après neutralisation avec ammoniac elles sont soumises à un traitement thermique à 180°C, soit avec de l'acide sulfurique à 2,5% et de l'eau oxygénée à 10% sans traitement thermique.

Dans cet ouvrage, l'auteur a étudié l'influence du temps et du milieu de réaction sur le rendement en furfurol, ainsi que sur les propriétés du produit secondaire; la capacité d'échange cationique, la teneur en substances humiques, la teneur en acide, ainsi que les transformations de certains groupes de substances organiques, de la cellulose et de la lignine.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 546:543/545:542.951.5:547.792.3

Gr. Teodorescu

La méthode de la détermination pour le méthoxy-6-amino-2-benzothiazole.

On présent la méthode de détermination pour le méthoxy-6-amino-2-benzothiazole en passant par le complèxe de celui-ci avec le tetratiocianato-diammino-cromate (III) d'amonium le sel de Reinecke). La méthode classique de détermination par la diazotation du groupe amino, n'est pas appliquable, étant donné que la basicité (densité des électrons) de ce groupe est sensiblement réduite. Les déterminations on été effectué dans la présence de l'acide sulfuric (45% concentration) pour déplacer l'équilibre $R\text{-}NH_2 \rightleftarrows R\text{-}\overset{+}{N}H_3$ vers la droite, c'est-á-dire vers la structure complexable avec l'anione du sel de Reinecke.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 629.136.3:629.19:522

C. Guţă

Considérations sur le régime optimal de montée des fusées.

L'auteur traite dans l'ouvrage du régime de montée de la fusée ($v=v(z)$; $\varphi=\varphi(z)$; $m=m(z)$ pour le cas où la fusée évolue dans les couches denses de l'atmosphère et que la variation de la densité est fournie par la relation (9). Il étudie aussi l'influence de l'accélération gravitationnelle pour des fusées qui évoluent à de grandes altitudes, au-delà de l'atmosphère dense.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 542.938:547.724.1:66.093.8:668.533.61.633

Gh. Constantinescu

Die Hydrolise der Einjahrpflanzen zur Herstellung von Furfurol und organo-mineralische Komplexdüngern.

Es wird eine neue Methode zur Gewinnung von Furfurol und Komplexdüngern aus Rückständen der Einjahrpflanzen vorgeschlagen. Die Methode zeichnet sich dadurch aus, dass die fein gemahlenen Rückstände entweder einer oxydativen Hydrolise mit verdünnter Schwefelsäure und Wasserstoffperoxyd unterworfen werden, oder einer Hydrolyse mit geringen Mengen verdünnter Schwefelsäure, der eine thermische Behandlung bei 180°C folgt.

In der vorliegenden Arbeit wurden der Einfluss der Reaktionszeit und des Reaktionsmediums nicht nur auf die Ausbeute an Furfurol, sondern auch auf die Eigenschaften des Nebenproduktes: Kationenumtauschkapazität, Huminsäuregehalt, Sticktsoffgehalt, sowie auf die Umwandlung der organischen Stoffgruppen untersucht.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 546:543/545:542.951.5:547.792.3

Gr. Teodorescu

Bestimmungmethode für 6-Metoxi-2-Amino-Benzothiazol.

Es wird eine Bestimmungmethode für 6-Metoxi-2-Amino-Benzothiazol durch Komplexierung mit Amonium Terta-Thiocianato-Diaminochromat (III) vorgeführt. Die klassische Methode durch Diazotierung der Amiongruppe ist nicht anwendbar da Basizität dieser Gruppe zu klein ist. Die Bestimmungen wurden in Gegenwart von 45%-igen Schwefelsäure vorgenommen, um das Gleichgewicht $R\text{-}NH_2 \rightleftarrows R\text{-}NH_3$ gegen rechts zu verschieben, also gegen eine komplexierbare Struktur mit dem Anion des Reineckesalzes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 629.136.3:629.19:522

C. Guţă

Betrachtungen über den optimalen Aufstiegsbetrieb der Raketen.

Die Arbeit behandelt den Aufstiegsbetrieb der Rakete ($v = v(z)$; $\varphi = \varphi(z)$; $m = m(z)$ für den Fall, in dem sich die Rakete in den dichten Atmosphärenlagen fortbewegt. und die Dichtenschwankung von der Beziehungs (9) gegeben wird. Gleichzeitig wird auch der Einfluss der Gravitationsbeschleunigung auf die Raketen, die sich ausserhalb der dichten Atmosphäre, in grosser Höhe fortbewegen, studiert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

M. Radeș C.D. 539.3/.4:624.023.9:624.072.2:534

Montages anti-vibratiles avec couches viscoélastiques.

On peut employer des couches de caoutchouc ou des materiaux plastiques pour atténuer les vibrations des structures élastiques. Dans les calcules, la couche est remplacée par un modèle de fondation déformable (viscoélastique) Winkler, décrite par un „coefficient complexe de tassement" (module complexe de la fondation) contenant ses propriétés élastiques et d'amortissement, la solution étant ainsi indépendente de la choix d'un certain modèle rhéologique.

On prend comme structure élastique une poutre finie, avec une masse attachée à son milieu. Une méthode est présentée pour le calcul du réponse stationnaire du système poutre-isolateur. l'éfficience de l'isolateur étant définie par la transmissibilité du mouvement — réprésentée dans une diagramme pour un cas particulier.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

G. Bărănescu C.D. 621.432.3/.4:621.43.04:621-232

Equilibrage des moments externes des forces d'inertie des masses en mouvement de translation dans les moteurs en ligne à allumages non uniformément répartis et à distances égales entre cylindres consécutifs.

L'auteur étudie les possibilités d'améliorer l'équilibrage des moments des forces d'inertie dans les moteurs à combustion interne en ligne par la répartition non uniforme des allumages. On précise quels sont les moteurs pour lesquels la méthode entre en discussion, les restrictions imposées dans l'organisation des manivelles pour maintenir un équilibrage acceptable des forces d'inertie, ainsi que les conditions que doivent remplir le nombre de cylindres en vue d'obtenir des solutions à ecartéments aussi réduites que possible de la répartition uniforme des allumages.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

B. Grünwald, N. Apostolescu

Calcul de l'énergie interne des gaz dans le cylindre du moteur à combustion interne, en considération de la non-homogénéité thermique du mélange pendant la combustion.

Les auteurs élaborent dans l'ouvrage une représentation du mélange de gaz dans le cylindre du moteur à combustion interne qui permet de déterminer l'énergie interne dans la période de combustion, en considération des discontinuités de température. Les auteurs montrent que le calcul de l'énergie interne du mélange de gaz avec la température moyenne obtenue à base de l'equation d'état, à l'analyse de la diagramme indiqué, en vue de déterminer la loi de combustion, introduit des erreurs qui peuvent atteindre jusqu'à 15% sur certains intervalles du processus de combustion. La méthode de calcul élaborée par les auteurs réduit plusieurs fois les erreurs et permet d'exprimer la variation élémentaire de l'énergie interne sous une forme convenable pour la programmation du calcul de la loi de combustion sur lès calculateurs numériques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

M. Radeş D.K. 539.3/.4:624.023.9:624.072.2.534

Viskoelastische Schichten als Schwingungsdämpfer.

Die Isolation der Schwingungen elastischer Bauten kann durch verformbare kontinuierliche Schichten (zum Beispiel Kautschuk oder viskoelastische Stoffe) erreicht werden. Als Modell eines solchen Isolators kann ein viskoelastisches, lineares Winkler-Fundament angenommen werden. Dieses Modell wird durch eine komplexe Bettungszahl charakterisiert, welche sowohl die elastischen als auch die dissipativen Eigenschaften des Fundamentes enthält, so dass die Lösung von der Art des angenommenen rheologischen Modells unabhängig ist.

Als elastischer Körper wird ein endlicher Stab mit freien Enden und einer mittig angebrachten Masse untersucht .Es wird eine einfache Methode abgeleitet um die stationäre Antwort des Systems Stab-verformbare Schicht zu erhalten. Ausserdem wird die Transmissionskurve für einen bestimmten Fall erhalten.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

G. Bărănescu D.K. 621.432.3/.4:621.43.04:621-232

Der Ausgleich der äusseren Momente, welche beim Reihenmotor mit ungleichmässig verteilter Zündung und gleichen Abständen zwischen den aufeinanderfolgenden Zylindern durch die Trägheitkräfte der Massen mit geradliniger Bewegung hervorgerufen werden.

Es werden die Möglichkeiten untersucht, den Ausgleich der Trägheitsmomente der Motoren mit innerer Verbrennung in Linie durch eine ungleichmässige Verteilung der Zündungen zu verbessern. Es werden die Motoren, für welche diese Methode in Frage kommt, und die Einschränkungen in der Anordnung der Kurbeln, um einen annehmbaren Ausgleich der Trägheitskräfte beizubehalten, angegeben, sowie die Bedingungen untersucht, welche die Zylinderanzahl erfüllen muss, um Lösungen mit möglichst kleinen Abweichungen von der gleichmässigen Verteilung der Zündungen zu erhalten.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 621.431:662.61:621.43-4:622.613.5

B. Grünwald, N. Apostolescu

Berechnung der inneren Energie des Gases aus den Verbrennungsmotorzylinder unter Beachtung der Wärmeheterogenität des Gasgemisches während der Verbrennungsperiode.

In vorliegender Arbeit wird eine Vorstellung des Gasgemisches aus den Verbrennungsmotorzylinder ausgearbeitet, wodurch die Bestimmung der inneren Energie während der Verbrennungsperiode unter Beachtung der Temperaturheterogenität möglich wird. Die Verfasser zeigen dass der Berechnung der inneren Energie des Gasgemischen mit Durchschnittstemperatur, erhalten durch die Zustandgleichung, an die Bearbeitung des Indikator diagramms, angesichts der Bestimmung des Verbrennungsgesetzes, Fehler zulassen, die in manchen Zwischenräumen der Verbrennungsvorgangs bis 15% ereichen können.

Die von den Verfassern ausgearbeitete Berechnungsmethode verringert die Fehler um einige mal und erlaubt dass die Grundvariation der inneren Energie in einer der Programmierung des Verbrennungsgesetzes auf Digitalcomputers entsprechenden Form ausgedrückt wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 621.432:621.43.01:621.1.01:621.43.06

Tr. Nicolescu, Al. Dănescu, Vs. Radcenco

Analyse thermodynamique des processus d'échange de gaz dans le cylindre du moteur à combustion interne.

A partir de l'analyse thermodynamique des processus de remplissage et d'évacuation du cylindre, les auteurs établissent dans l'ouvrage les expressions générales de la température à la fin de l'admission T_a et respectivement des gaz évacués T_E. Dans l'étude effectuée ils ont appliqué l'hypothèse concernant le caractère adiabatique réversible de l'éxpansion des gaz du cylindre dans le processus d'évacuation libre. Les auteurs ont présenté l'influence du nombre de temps du moteur et les paramètres ε, λ, ϱ sur les températures T_a et T_E. Les relations obtenues peuvent constituer une prémisse dans l'élaboration d'une méthode de calcul du diagramme du moteur à piston qui élimine certains éléments á caractère empirique (choix de la température des gaz brulés résiduels, etc.), qui existent dans les méthodes simplifiées connues.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 621.9:621.22:532

I. Gheghea

Calcul des pertes de volume par fentes cylindriques minces.

A partir de l'équation du flux des liquides visqueux et de l'équation de la continuité, l'auteur déduit dans l'ouvrage, les relations pour le calcul du débit de liquide qui coule par la fente cylindrique de grosseur tant constante que variable, dans la direction axiale et d'après la circonférence.

L'auteur présente aussi des graphiques de variation du débit en fonction de divers paramètres de la fente.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

C.D. 625.24:625.282-83:621.3.025:338.063.41:338T1

Al. Popa

Contributions à la détermination des meilleures vitesses et tonnages des trains de marchandise remorqués avec des locomotives électriques 060 EA.

Dans les calculs de traction, il est habituel d'établir les tonnages des trains de marchandise sans avoir en vue la capacité de transport des lignes de chemin de fer.

Dans le présent ouvrage, l'auteur établit une unité de calcul du tonnage optimum par train du point de vue de la réalisation d'un trafic de marchandises maximaux.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 621.432:621.43.01:621.1.01:621.43.06

Tr. Nicolescu, Al. Dănescu, Vs. Radcenco

Thermodynamische Analyse der Gaswechsel-Vorgänge in dem Innenverbrennungsmotorzylinder.

Auf Grund der thermodynamischen Analyse der Zylinder- Füll- und der viskosen Flüssigkeiten und der Kontinuitätsgleichung ausdrücke der Temperaturen bei der Einlassbeendigung T_a und bzw. der Auspuffgase T_E bestimmt. In dem durchgeführten Studium wurde die Hypothese, betreffend den reversierbaren adiabatischen Charakter der Gasentspannung im Zylinder während dem Vorgang der freien Entleerung, angewendet. Es wurde der Einfluss der Taktanzahl des Motors und der Parameter ε, λ und ρ auf die Temperaturen T_a und T_E angegeben.

Die erhaltenen Beziehungen kônnen eine Voraussetzung in der Ausarbeitung einer Berechnungsmethode des Kolbenmotor-Diagramms darstellen, welche einige Elemente mit empirischem Charakter (Auswahl der Temperatur der zurückbleibenden Rauchgase, usw.) ausschliessen die in den bekannten vereinfachten Methoden vorhanden sind.

D.K. 621.9:621.22:532

I. Gheghea

Berechnung der Volumenverluste durch dünne Zylinderspalten.

In vorliegernder Arbeit werden, von der Gleichung der Stôm- und der viskosen Flüssigkeiten und der Kontinuitätsgleichung ausgehend, die Gleichungen für die Berechnung des Flüssigkeitsdurchflusses durch den Zyilinderspalt gefolgert, u.zw. sowohl für die Berechnung der konstanten Stärke, als auch veränderliche in die Axialrichtung und dem Umfang entsprechend.

Es werden gleichzeitig Variationsdiagramme des Durchflusses, in Abhängigkeit von den verschiedenen Spaltenparametern angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

D.K. 625.24:625.282-83:621.3.025:338.063.41:338T1

Al. Popa,

Beiträge zur Bestimmung der optimalen Geschwindigkeiten und Tonagen des an die Elektrolokomotive 060 EA angeschlossenen Lastzuges.

In den Zugberechnungen werden gewöhnlicherweise die Tonagen der Lastzüge berechnet, ohne dabei die Transportleistung der Eisenbahnlinien in Betracht zu ziehen.

In vorliegender Arbeit wird eine Berechnungseinheit für die optiamale Tonage vom Gesichtapunkt der Erzielung eines maximalen Warenverkehrs festgelegt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 3/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

INGINERIE ECONOMICĂ

C.Z.:338.062.07:33/.0:001.98:621.281:621

CONSIDERAȚII ASUPRA MODELĂRII CIBERNETICE A PROCESELOR DE PRODUCȚIE ÎN CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

ȘT. BÎRLEA, T. HOMOȘ, STANA COSTOIU

I. Considerații generale

Prin natura sa industria constructoare de mașini comportă prelucrarea simultană sau succesivă pe baza unor procese tehnologice individuale a unui număr foarte mare de elemente, care în fază finală alcătuiesc, prin compunere, un anumit produs.

Fenomenele care au loc în industria de mașini au deci în general un caracter discontinuu discret ceea ce conferă acestei ramuri industriale o serie de caracteristici specifice.

În cele ce urmează ne vom referi numai la cîteva dintre aceste caracteristici, care după părerea noastră prezintă o mare importanță, pentru organizarea științifică a producției și a muncii.

1. În industria construcției de mașini ultimului stadiu al fabricației *) îi corespunde întotdeauna un proces de asamblare, în care din punct de vedere tehnologic rolul esențial îl au operațiile destinate modificării dispoziției spațiale a obiectelor muncii. Această particularitate obligă la asigurarea unei sincronizări a fabricației cel puțin înaintea începerii ultimului său stadiu, deoarece lipsa unei sincronizări dinainte determinată, impietează asupra ritmului în care se desfășoară procesul de producție.

2. Caracterul discontinuu-discret al fenomenelor care au loc în unitățile aparținînd industriei constructoare de mașini se reflectă în ansamblul procesului de producție care, la rîndul său, este alcătuit dintr-un șir întreg de procese de bază, auxiliare și anexe, cu o structură discontinuă. Cu excepția unui număr mic de procese ca de exemplu tra-

*) Se presupune acceptată concepția potrivit căreia după încheierea stadiilor tehnologice de fabricație pot urma stadii de probe, verificări, reglaj, reasamblări la beneficiar etc. Acestea au în industria modernă o pondere mereu crescîndă în raport cu complexitatea produselor; spre exemplu, asemenea tendințe sînt tot mai evidente în industria calculatoarelor electronice, a construcțiilor navale și aeriene, a instalațiilor complexe ș.a.

tarea termică, din cele de bază, sau procesele destinate producerii și folosirii energiei, din cele auxiliare, restul proceselor din întreprinderile constructoare de mașini, chiar și atunci cînd sînt conveerizate sau se desfășoară în linii de transfer, au în principiu un flux tehnologic operațional discontinuu.

Organizarea științifică este îngreunată de efectele negative introduse de această particularitate în mecanismul de conducere și de desfășurare operativă a procesului de producție.

Iată de ce concepțiile moderne de organizare vizează în principal crearea condițiilor necesare care să permită îmbinarea și sincronizarea într-o asemenea măsură a componentelor discrete, încît procesul de fabricație respectiv să poată fi considerat în ansamblu ca un proces cu caracter continuu. O astfel de abordare a cerințelor fundamentale ale organizării explică în parte, tendințele moderne de creștere a seriei de fabricație, de tipizare, standardizare și introducere a tehnologiei de grup, în așa fel încît interșanjabilitatea operațională a obiectelor muncii împreună cu cea funcțională să creeze o structură de fabricație omogenă.

3. Numărul de parametri variabili în timp, care intervin într-un proces tehnologic sau auxiliar din această ramură este foarte mare. Combinațiile permise de evoluția în timp a obiectelor muncii în cadrul unei structuri cu operatori date, pot fi considerate pentru produsele cu un grad mare de complexitate ca fiind practic oricît de mare.

Din aceste motive, simularea și modelarea matematică a proceselor de conducere și dirijare a producției din întreprinderile constructoare de mașini, comportă încă însemnate dificultăți.

Practica demonstrează că modelul matematic al unui proces de producție, trebuie să ia în considerare cel puțin parametrii necesari pentru definirea semnificativă a elementelor sale de bază cum sînt :

— capacitățile de producție și gradul lor de utilizare ;
— pregătirea tehnică a fabricației ;
— structura de producție, fluxurile tehnologice de materiale amplasarea utilajului etc., atît în secțiile de bază cît și cele auxiliare și deservire ;
— programarea și urmărirea operativă a producției ;
— transportul intern de uzină ;
— organizarea locului de muncă ;
— utilizarea forței de muncă.

Construcția unui simulator sau a unui model atît de abstract așa cum vom arăta în cele ce urmează, constituie o problemă de mare importanță și dificultate.

Din aceste motive organizatorul de producție este determinat ca pentru descrierea unui fenomen supus unei acțiuni de organizare, să apeleze mai întîi la aspectele calitative ale problemei încadrînd fenomenul sau procesul respectiv într-un ansamblu de clasificări care prezintă un înalt grad de generalizare. În această ordine de idei considerăm că în organizarea producției din întreprinderi cu flux discontinuu, *noțiunea cea mai generală folosită este sistemul de fabricație.*

II. Sistemele de fabricație ca sisteme cibernetice aplicate la economie

1. *Conceptul de sistem cibernetic în economie*

În prezenta lucrare vom considera acceptată teza potrivit căreia conceptele cibernetice pot fi extinse și în sfera economiei.

Unitățile de producție, ramurile economice, sau economia în ansamblul ei, vor fi socotite sisteme cibernetice, a căror evoluție este determinată totdeauna de un efort de conducere bazat pe principiul conexiunii inverse.

După cum se știe una din proprietățile fundamentale ale sistemelor cibernetice constă în faptul că pot fi descompuse în subsisteme care-și transmit reciproc informații, influențîndu-se unele pe altele și tinzînd să realizeze un proces de autoreglare a întregului sistem.

Păstrînd caracteristica fundamentală amintită, sistemele cibernetice din economie au însă unele particularități care generează deosebiri esențiale între aceste sisteme și cele tehnice, creind totodată numeroase complicații mai ales pentru modelarea cibernetică a fenomenului economic. Cum însă studiile întreprinse în această direcție sînt la început, în cele ce urmează ne permitem să facem unele precizări și să prezentăm cîteva definiții.

În economie, poate mai mult decît în orice alt domeniu, de activitate uman-istorică, sistemul cibernetic pune în evidență, în cadrul său, două părți de funcțiuni distincte și anume :

— *funcțiile efectorii* care reunesc cei trei factori fundamentali ai producției : forța de muncă, mijloacele de muncă și obiectele muncii în scopul producerii unei anumite cantități de bunuri materiale sau servicii ;

— *funcțiile de dirijare*, care au drept scop principal elaborarea și asigurarea îndeplinirii programului previzional al dezvoltării sistemului cibernetic în ansamblu, sau atunci cînd realitățile o cer, să corecteze acest program urmărind optimizarea funcțiilor sistemului cibernetic respectiv, în raport cu restricțiile pe care i le impun funcționarea celorlalte sisteme la care este conectat.

Vom face observațiunea că această reflexiune asupra componenței și funcțiilor unui sistem cibernetic din economie, nu contravine nici uneia dintre numeroasele definiții date noțiunii de sistem considerat ca avînd un rol esențial în definirea conceptelor cibernetice sau a celor din teoria matematică a structurilor. Dintre definițiile date sistemului cibernetic aplicat la economie vom aprecia că cea mai cuprinzătoare — actualmente — poate fi considerată următoarea : — *un sistem cibernetic este un ansamblu-schemă de elemente oarecare în interacțiune cuprinzînd oameni și mașini integrate în realizarea unui obiectiv determinat, prin manipularea și controlul materialelor, informației, energiei și activității umane.* Separarea celor două componente ale sistemului cibernetic-economic și a funcțiilor lor ne permite însă să exprimăm mai concludent noțiunea de sistem cibernetic și să atragem atenția asu-

pra permanentei sale evoluții. În esență, corespunzător funcțiilor sale, un sistem cuprinde un organism efectoriu care poate fi reprezentat de economie, ramură, întreprindere sau loc de muncă reunit cu organismul regulator al tuturor activităților sistemului — omul sau colectivități de oameni — și instrumentele lor de informare, analiză, previziune și decizie.

2. *Conceptul de sistem cibernetic aplicat la procesele de producție industriale*

Considerațiile expuse pînă acum ne permit să formulăm mai întîi ipoteza că extinzînd noțiunea de sistem cibernetic asupra activității întreprinderii, acesta va cuprinde în sfera sa, atît ansamblul proceselor industriale cît și elementele care determină reglarea internă și respectiv evoluția temporală.

Pentru a demonstra valabilitatea acestei ipoteze, vom admite mai întîi ca fiind înțeleasă noțiunea de proces de producție.

Apelînd în continuare la *teoria structurilor*, *considerăm* că un proces de producție oarecare X, poate fi considerat la momentul (t_0) ca fiind o structură definită în modul următor :

Mulțimile *Ai* ale structurii $X=X(t_0)$ sînt mulțimi de obiecte ale procesului de producție, mulțimi de numere ce reprezintă cantități de materiale, prețuri, mulțimi numerice asociate în diferite moduri obiectelor procesului de producție.

Operațiile structurii X sînt operațiile fundamentale relative la mulțimele de obiecte (și deci de numere), uzuale în teoria mulțimilor și în teoria funcțiunilor (reuniune, intersecție, produs, mulțimea părților, aplicații diferite).

Exprimarea simbolică a procesului X este așadar

$$X=\{\mathcal{A}\,|\,\cup,\cap,\ X,\ \mathbb{R},\ f,\ldots\} \tag{1}$$

unde

$$\mathcal{A}=\{A_1,\ A_2,\ldots\ A_n\},\ n<\aleph_0$$

Dacă A_i reprezintă o mulțime de numere X_{ij}, atunci $X_{ij}\geqslant 0$.

În structura X, distingem în mod special o substructură $\widetilde{X}$, substructura numerică a lui X, ce reprezintă mulțimile numerice $\widetilde{A}_i=\{X_{1i},\ X_{2i},\ X_{3i},\ldots X_{mi}\}$,

adică

$$\widetilde{X}(t_0)=\{\widetilde{\mathcal{A}}\,|\,\cup,\cap,X,\mathbb{R},f,\ldots\} \tag{2}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}=\{\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\ldots,\widetilde{A}_n\}$$

Analog, considerăm un alt proces de producție $Y=Y(t_0)$ la același moment t_0, definit prin structura

$$Y=\{\mathfrak{B}\,|\,\cup,\cap,X\mathbb{R},f,\ldots\}$$

unde

$$\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots B_n\}$$

$$n < \aleph_0$$

(Faptul că se ia $n = n_x = n_y$ nu constituie o restricție sau un caz particular întrucît unele din mulțimile A_i sau B_i pot fi vide).

Tot așa

$$\tilde{Y}(t_0) = \{\tilde{\mathfrak{B}} \mid \cup, \cap, X, \subset, f, \ldots\}$$

este substructura numerică a lui $Y(t_0)$, definită analog cu $\tilde{X}(t_0)$; evident $\tilde{B}_j = \{Y_{1j}, Y_{2j} \ldots Y_{mj}\}$ cu $Y_{kj} \geqslant 0$:

Dacă vom reduce procesele de producție la stadii de fabricație care să le *confere structuri omologe*, atunci potrivit teoriei structurilor putem scrie :

Dacă procesul $X(t_0) \sim$ procesul $Y(t_0)$ și procesul $Y(t_0) \sim$ procesul $Z(t_0)$ rezultă relația $X(t_0) \sim Z(t_0)$ putem trage următoarea concluzie :

Procesele de producție pot fi descrise prin structuri omologe, *numai dacă aparțin acelorași stadii de fabricație :*

Aplicînd în continuare la structuri omologe formulele de echivalență ale mulțimilor, vom putea scrie :

$$x_{ij} = y_{ij} = z_{ij} = \ldots = q_{ij}$$

unde $\text{card } \mathcal{A} = \text{card } \mathfrak{B} = \text{card } \mathcal{C} < \aleph_0$ și

$$\text{card } \tilde{\mathcal{A}} = \text{card } \tilde{\mathfrak{B}} = \text{card } \tilde{\mathcal{C}} < \aleph_0$$

unde evident sînt omologe și substructurile

$$\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} : \tilde{X} \sim \tilde{Y} \sim \tilde{Z}$$

Aceste definiții ne permit să formulăm criteriul *identității proceselor.*

Mai multe procese sînt identice atunci și numai atunci cînd mulțimile structurilor determinate sînt echipotente iar părțile componente omologe respectiv $A_i, B_i, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j \ldots$ sînt în corespondență biunivocă.

Pornind de la criteriul echivalenței proceselor descrise în acest fel, vom putea defini în cele ce urmează noțiunea *de proces reglat.* Admitem că după o anumită perioadă de timp $T = (t_1 - t_0)$, în structura X se produc schimbări.

Vom presupune deocamdată că structura Y rămîne neschimbată în această perioadă. Este evident că vom avea :

$$X(t) \not\equiv Y(t), \text{ dar } Y(t) = Y(t_0)$$

Acest lucru este posibil, chiar dacă $\text{card } \mathcal{A} = \text{card } \mathfrak{B}$ deoarece $x_{ij} \neq y_{ij}$ și nici nu știm dacă există o relație între aceste elemente.

Dacă admitem însă că $X(t_0) = Y(t_0)$ atunci putem face ipoteza fundamentală că există o relaţie şi între $X(t)$ şi $Y(t_0)$ al cărei sens urmează să-l stabilim.

Pentru a stabili dacă există o relaţie între aceste procese, vom porni de la omologia structurilor.

Întrucît cardinalele mulţimilor şi submulţimilor asociate structurilor X, Y, se menţin invariante problema pe care ne-o punem este legată de situaţia elementelor x_{ij} şi y_{ij}; se înţelege că

$$x_{ij}(t) = I_{ij}(t) \text{ pentru } t \in [O, t_0], \text{ dar}$$

$$x_{ij}(t) \neq I_{ij}(t) \text{ pentru } t \in (t_0, t_1),\ 0 < t_0 < t_1$$

Aceste deosebiri pot fi explicate prevalîndu-ne şi de *criteriul identităţii*, considerînd în fond că este vorba de acelaşi proces care însă a evoluat în timp. Astfel dacă între elementele structurilor $X(t)$, $Y(t)$ există o legătură evolutivă — istorică — vom putea introduce operatori pentru fiecare pereche de elemente în corespondenţă biunivocă :

$Y_{ij} = \Omega_{ij} \cdot X_{ij}$, operatorii Ω_{ij} fiind definiţi pe părţile substructurilor numerice.

Rezultă că din punct de vedere al ciberneticii, noţiunea de proces *de producţie reglat se înscrie în noţiunea de sistem.* În domeniul economic, această situaţie cuprinde *totalitatea fenomenelor de producţie reprezentate printr-un anumit spaţiu vectorial* R^n, $n < \aleph_0$ *cu proprietate evolutivă. Această proprietate exprimă faptul că în decursul unui anumit interval de timp* (t', t'') *se modifică structura procesului, potrivit unei programări oarecare, stabilite anterior.* *)

Astfel între evoluţia internă a sistemului şi informaţia transmisă în exterior, apare o conexiune inversă, specifică sistemelor cibernetice.

Aşadar din modul în care se desfăşoară un proces de producţie, *rezultă că această noţiune implică conceptul de sistem cibernetic.*

III. Caracteristici şi clasificări ale proceselor de producţie

1. *Parametri de producţie şi rolul lor în clasificarea sistemelor cibernetice productive*

După cum este cunoscut, în orice acţiune de organizare ştiinţifică a producţiei şi a muncii un rol fundamental îl are construcţia unor modele matematice care să permită introducerea tehnicii moderne de calcul şi prelucrare a datelor.

Consideraţiile expuse pînă acum sugerează necesitatea ca în modelarea matematică a sistemelor cibernetice-productive, să se ia în considerare două categorii de parametri şi anume :

---

*) Programare oarecare = programare deterministă sau aleatoare (probabilistă), liniară sau neliniară.

— parametri care se referă la totalitatea de intrări și ieșiri ale sistemului ;
— parametri care se referă la relațiile din interiorul sistemului.

Vom admite că un proces X este descris printr-o structură de forma

$$X(t) = \{ N, \theta, Cu, Tc, R \mid \cup, \cap, X, \ldots \} \tag{3}$$

unde :

N = mulțimea parametrilor care caracterizează structura producției;
θ = mulțimea parametrilor care caracterizează timpii unitari ;
Cu = mulțimea parametrilor care caracterizează prețurile ;
Tc = mulțimea parametrilor care caracterizează durata proceselor unitare ;
R = mulțimea parametrilor care caracterizează gradul de ciclizare a procesului sau frecvența intrărilor respectiv ieșirilor sistemului.

În cele ce urmează vom demonstra că această structură pe lîngă faptul că poate influența construcția oricărui model, poate constitui totodată și un punct de plecare pentru clasificarea diferitelor sisteme cibernetice.

În primul rînd pentru ca un proces să existe se vede că este necesară condiția :

$$\text{card } N, \text{ card } Tu, \text{ card } Cu, \text{ card } Tc > 0$$

În ceea ce privește însă mulțimea R aceasta poate fi și în situația de mulțime vidă, în cazul în care procesul nu este ciclizat.

De aici rezultă că dacă

$$\mathcal{A}(X) = \{ No, \theta_0, Cu_0, Tc_0, R_0 \}, \; t = t_0$$

unde

$$R_0 = \varnothing$$

iar

$$\mathcal{A}(X) = \{ N_t, \theta_t, Cu_t, Tc_t, R_0 \}$$

atunci întotdeauna structurile A_{t_0} (X) și A_t (X) nu pot fi omoloage, deoarece între mulțimile lor componente nu pot exista nici un fel de aplicații.

În cazul cînd $R \neq \varnothing$ atunci între elementele mulțimii

$$No = \{ n_{01}, n_{02}, n_{03} \ldots n_{0i} \ldots \}$$

și ale mulțimii

$$N_t = \{ n_{t1}, n_{t2}, n_{t3} \ldots n_{ti} \ldots \}$$

există totdeauna relațiile $n_{ti} = \Omega_i(N) \cdot n_{0i}$

Analog pentru mulțimile θ_0, θ_t, C_0, C_t $\theta_{ti} = \Omega_i(\theta) \cdot \theta_{0i}$ și $c_{ti} = \Omega_i(c) \cdot c_{0i}$

Pe intervalul de timp t_0, t vom efectua un număr determinat de operații reciclizate, egal cu frecvența ciclurilor și anume :

$$\omega = \frac{t - t_0}{\tau} \tag{4}$$

unde :

τ — intervalul de reglaj determinat de vectorii n dimensionali ai substructurii numerice $\tilde{X}$.

De aici rezultă următoarea concluzie :

după natura funcției de parametri ce caracterizează o structură de producție, sistemele cibernetice de producție pot fi împărțite *în sisteme ciclice și aciclice.*

Prin definiție, un sistem cibernetic de producție este ciclic sau aciclic, *după cum semnalele sale de intrare și ieșire păstrează o frecvență constantă sau variabilă, în raport cu un program dat, astfel încît există o transformare operațională între elementele mulțimilor echipotente din structurile asociate sistemului la* t_0 *și* t.

Sistemele aciclice definite în acest fel, sînt cunoscute în organizarea producției și *sub denumirea de „sisteme de fabricație individuale".*

Pornind de la definiția de mai sus și analizînd posibilitățile de evoluție ale sistemelor ciclice, se poate ușor demonstra că la rîndul lor aceste sisteme pot fi clasficate în două categorii :

O primă categorie o reprezintă sistemele cibernetice productive la care maximul frecvenței de ciclizare, în decursul unui interval de timp este :

$$\omega_x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_{ti}}{l_{ti}} \cdot \omega$$

unde :

$$\omega = \frac{t - t_0}{\tau}$$

reprezintă frecvența de ciclizare a sistemului X ;

$$n_{ti} \in N_t, \qquad K = \operatorname{card} N_t$$

l_{ti} = divizor determinat al n_{ti} prin operații convenabile de optimizare, X reprezentînd frecvența productivă specifică lui $X(t)_i$; deci pentru fiecare componentă sau parte de componente ale unui proces, se fac un număr de reluări egal cu $\frac{t - t_0}{\tau}$. Aceste reluări pot fi făcute individual sau în loturi, influențînd asupra operatorilor Ω... ce realizează transformarea structurii $X(t_0)$ în structura $X(t)$.

Dacă $n_t > 1$, atunci așa cum rezultă din expresiile anterioare în mod necesar $\Omega_t(N) \neq I$ (operatorul unitate) adică transformarea structurii $X(to)$ în structura $X(t)$ există și este proprie.

Spre exemplu fie un sistem cibernetic-productiv relativ la un loc de muncă oarecare (Z). Mulțimile structurii numerice asociate sistemului Z sînt date de

$$A(Z) = \{N, \theta, C, Tc, R\}$$

În interiorul structurii există relații între mulțimi, relații care determină cardinalul fiecăreia dintre părțile structurii.

Dacă intervalul de timp pentru care luăm în considerare variația elementelor ce intervin în această relație, este mai mic sau cel mult egal cu intervalul de timp în care are loc variația structurii, atunci pentru intervalul τ avem

$\tau \leqslant \theta_{min}$ = timpul minim de prelucrare a unui reper.

Este evident că relația care exprimă frecvența ω a procesului devine în acest caz

$$\omega = \frac{t - t_0}{\theta \min}, \tag{5}$$

unde :

$$\theta_{min} = \frac{\sum_{i=k}^{i=1} n_{ti} \cdot \theta_{ti}}{\sum_{i=1}^{k} n_{ti}} \quad (K = \text{card } N_t)$$

O *condiție suficientă* pentru ca ω_x să fie maxim, este ca să existe *condițiile simultane*

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_{ti} \cdot \theta_{ti} = \min., \quad \sum_{i-1}^{i=k} \frac{n_{ti}}{l_{ti}} = \max \tag{6}$$

Evident, folosind criterii de analiză funcțională, putem găsi și alte condiții ca să obținem max ω_X, adică

$$\max \left[\frac{t - t_0}{\frac{1}{\sum_{1}^{k} n_{ti}} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_{ti}\, \theta_{ti}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{n_{ti}}{l_{ti}} \right] \tag{7}$$

Analizînd aceste condiții rezultă că max ω_x se poate realiza pentru $i = 1$, pentru θ_{ti} minim și pentru $l_{ti} = 1$.

Variația indicelui are o margine superioară deoarece, între mulțimile θ și N există o relație determinată de capacitatea locului de muncă respectiv și anume : dacă $l_{ti} = 1$ atunci

$$\sum n_{ti} \cdot \theta_{ti} \leqslant (t - t_0) \cdot \sum n_{ti}$$

întrucît interesul general al organizatorului este ca volumul producției să fie cît mai mare, această relație implică $\sum_{i=1}^{k} n_{ti} \cdot \theta_{ti}$ să fie minimă, ceea ce se întîmplă atunci cînd $n_{ti} = 1$ iar $i = 1$.

Rezultă așa dar că vom plasa întregul sistem în alte condiții și anume în acelea care implică o structură compusă din submulțimi cu un singur element.

Aceasta constituie o altă categorie de sisteme, în care operatorii respectiv sînt todeauna Ω_{ti} (X) = I (operatorul unitate).

În aceste condiții structura locului de muncă conduce la relațiile

$$A_0(Z) = \{ No, \theta o, Co, Tc_0, Ro \}$$

iar

$$A_t(Z) = \{ N_t, \theta_t, C_t, Tc_t, R_t \}$$

Unde : Ω_{ti} (Z) = I deci

A_t (Z) = Ao_{to} (Z) ; se realizează așa dar o reluare a tuturor elemen telor procesului în condiții mereu identice.

Organizatorii de producție numesc prima categorie de sisteme cu frecvență constantă și operatori diferiți de operatorul I, *sisteme de fabricație în serie*. Ele se caracterizează în practică prin faptul că întotdeauna la locurile de muncă se găsesc mai multe elemente componente ale primelor trei mulțimi de structură, (cei trei factori fundamentali ai producției).

Cea de a doua categorie de sisteme sînt denumite sisteme de *fabricație în massă.*

Ele se caracterizează prin aceea că primele trei mulțimi de structură au un cardinal egal cu unitatea, ceea ce conduce la noțiunea de *constantă de fabricație.*

2. *Constanta de fabricație și rolul ei în clasificarea sistemelor cibernetice-productive*

Deși introducerea în clasificarea sistemelor cibernetice productive și în modelarea matematică a lor, a calculului operatorilor ce transformă structurile între ele, poate simplifica într-o măsură considerabilă proiectarea sistemelor, trebuie menționat că tratarea acestei probleme se află abia la început.

De aceea se utilizează diferite metode de încadrare a sistemelor cibernetice-productive într-un anumit tip, căruia pe baza unui mare grad de generalizare să i se poată aplica anumite criterii specifice de organizare, în timp și spațiu. Se obișnuiește să se clasifice sistemele în trei mari categorii (v. fig. 1) :

— Sisteme cibernetice productive individuale
— Sisteme cibernetice productive de serie
— Sisteme cibernetice productive în massă.

Unele teorii încadrează de pildă apartenența la un anumit sistem pe baza caracterului ciclic sau aciclic al procesului, altele pe baza modului de circulație a obiectelor muncii (individual sau în loturi), alții după specializarea locului de muncă.

Dintre aceste clasificări socotim că metoda indicilor de constanță a fabricației, care se apropie cel mai mult de considerațiile făcute anterior, poate fi folosită cu succes în stabilirea sistemului în care poate fi încadrat un proces industrial.

În cele ce urmează vom descrie această metodă și vom prezenta modul în care poate fi folosită la determinarea fabricației în secțiile întreprinderilor constructoare de mașini.

Constanta de fabricație se definește ca fiind un raport între timpul necesar pentru producerea unei bucăți la un loc de muncă și ritmul fabricației.

$$k_j = \frac{t_{ij}}{r_i} \quad (8)$$

unde :

k_j — constantă de fabricație la locul de muncă j ;

t_{ij} — timpul necesar pentru confecționarea la locul de muncă j a produsului i ;

r_i — ritmul de fabricație al produsului i = interval de timp între 2 piese consecutive.

Ritmul fabricației are o valoare semnificativă numai atunci cînd în decursul unui interval de timp T se elaborează un număr N de obiecte ale muncii de același fel ; în cazul cînd $N = 1$, ritmul nu mai are semnificație, deoarece după cum se reține prin definiție, această noțiune este intervalul de timp între lansarea (ieșirea din fabricație) a două piese sau loturi de piese.

Din relația de mai sus rezultă că pe măsură ce ritmul fabricației crește, la locul de muncă (j) se stabilizează condițiile în care se desfășoară producția iar în situația că se ajunge la relația $r_i \leqslant t_{ij}$, atunci pentru păstrarea ritmului de fabricație sînt necesare mai multe locuri de muncă ; aceasta nu înseamnă însă că este necesară creșterea lui K_j peste valoarea 1 ; dimpotrivă introducerea mai multor locuri de muncă conduce la o constantă de fabricație care descrește în cazul cînd numărul locurilor de muncă devine excesiv de mare.

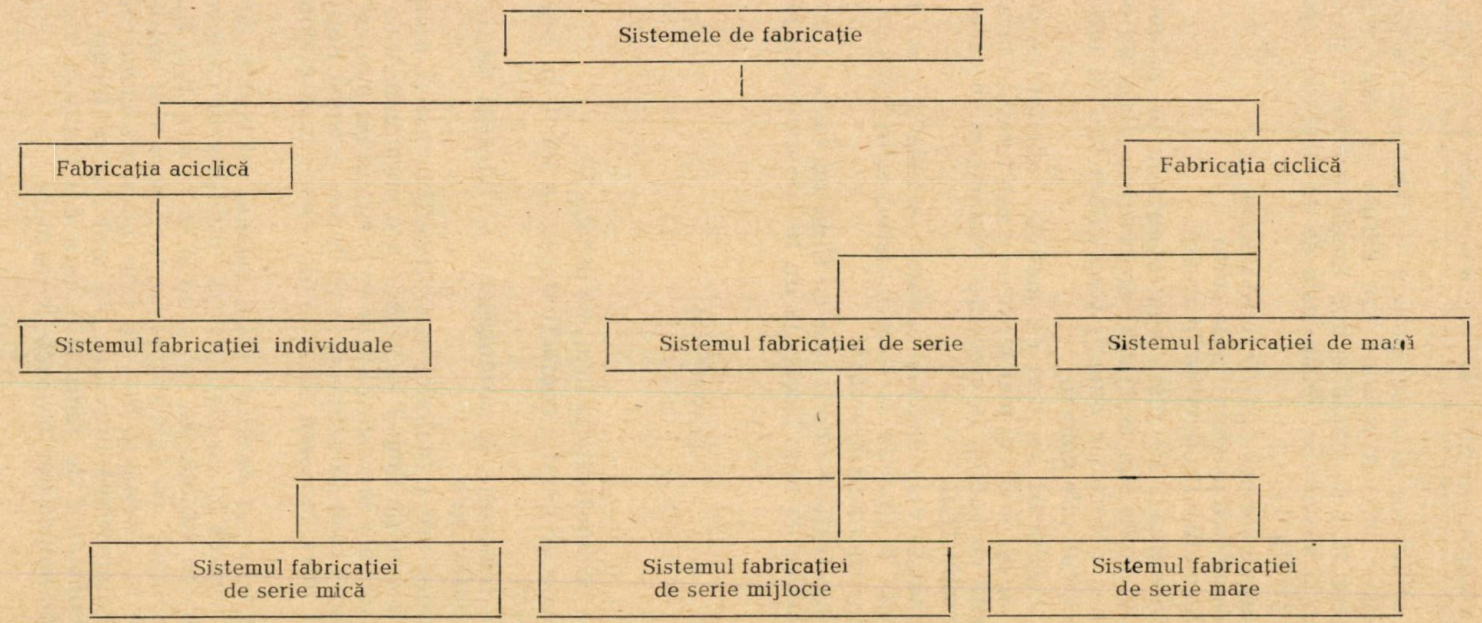


Fig. 1. Clasificarea sistemelor de fabricație în construcția de mașini.

Pornind de la considerentele expuse vom opera cu noțiunea de constantă de fabricație, numai pentru intervalul de variație

$$0 \leqslant k_j \leqslant 1 \text{ (pentru cazurile cînd}$$

$$r_i \leqslant t_{ij})$$

Se subînțelege că noțiunea de constantă de fabricație nu are sens decît pentru locuri de muncă separate.

Noțiunea de constantă de fabricație pentru un interval de timp $(t—t_0)$ relativ la care este determinată mărimea r_i, permite să se facă observația că fabricația care se caracterizează printr-o anumită constantă are un caracter ciclic, adică se repetă la intervale de timp mai mici decît r_i. Dacă notăm intervalul de repetare cu r și $r \leqslant r_i$, vom spune că sînt întrunite condițiile pentru organizarea fabricației de masă, iar dacă $r > r_i$, atunci fabricația se repetă ciclic după prelucrarea unui lot de piese și vom spune că ne aflăm în condițiile fabricației de serie. În literatura de specialitate se prezintă însă nomograme de calcul pentru stabilirea sistemului de fabricație în cadrul cărora elementul determinant este inversul constantei de fabricație $\frac{1}{k_j}$ ceea ce în fond este același lucru, K_j conducînd la considerații echivalente. Aceste nomograme oferă posibilitatea de a încadra un loc de muncă sau o unitate tehnologică în unul din sistemele: de serie mică, mijlocie, mare, de masă pe bandă și în linii automate după valorile lui $1/K_j$ (sau K_j, intervalele corespunzîndu-se biunivoc) *).

În nomograma construită de noi (anexă) relativă la coeficientul $1/K_j$ este marcată operația productivă de la locul de muncă (j), astfel încît ea să poată fi încadrată într-unul dintre cele două sisteme de fabricație cu caracter ciclic.

Astfel, pentru:

$0 < \frac{1}{k_j} \leqslant 1$ în sistemul de fabricație masă;

$1 < \frac{1}{k_j} \leqslant 10$ în sistemul de fabricație de serie.

Sistemul fabricației de serie, care este cel mai complex, se împarte de obicei în serie mare, mijlocie și mică.

Încadrarea într-unul dintre aceste sisteme a operației reperului ce se efectuează la locul de muncă (j) a fost făcută după mărimea coeficientului sistemului de fabricație.

*) La scară logaritmică mărimile K_j și $1/K_j$ au logaritmi egali și de semn contrar; $\pm \log K_j$, deci nici geometric nu s-ar obține avantajii de metodă.

Astfel pentru :

$1 < \frac{1}{k_j} \leqslant 10$ — în serie mare ;

$10 < \frac{1}{k_j} \leqslant 20$ — în serie mijlocie ;

$\frac{1}{k_j} > 20$ — în serie mică.

Acești coeficienți ai sistemului de fabricație recomandați în literatura de specialitate corespund următoarelor valori limită numai pentru fabricația de serie, constanta de fabricație reprezintă și necesarul de mașini-unelte calculat

$(m_{cj} = k_j)$.

$0{,}1 \leqslant m_{cj} < 1$ pentru sistemul de fabricație serie mare ;

$0{,}05 \leqslant m_{cj} < 0{,}10$ pentru sistemul de fabricație serie mijlocie ;

$m_{cj} \leqslant 0{,}05$ pentru sistemul de fabricație serie mică.

Pentru ușurarea calculelor s-a construit o nomogramă cu un larg spectru de valori care răspunde la nevoile uzuale de calcul din industria constructoare de mașini. Totodată s-a elaborat programul de calcul (anexă) și s-au făcut calculele la mașina electronică NEAC 1240 pentru reperele semnificative ale motorului Maybach fabricat la Uzinele 23 August

Particularitățile procesului de producție în construcția de mașini impun ca la stabilirea sistemului de fabricație să se țină seama de următoarele criterii (condiții necesare).

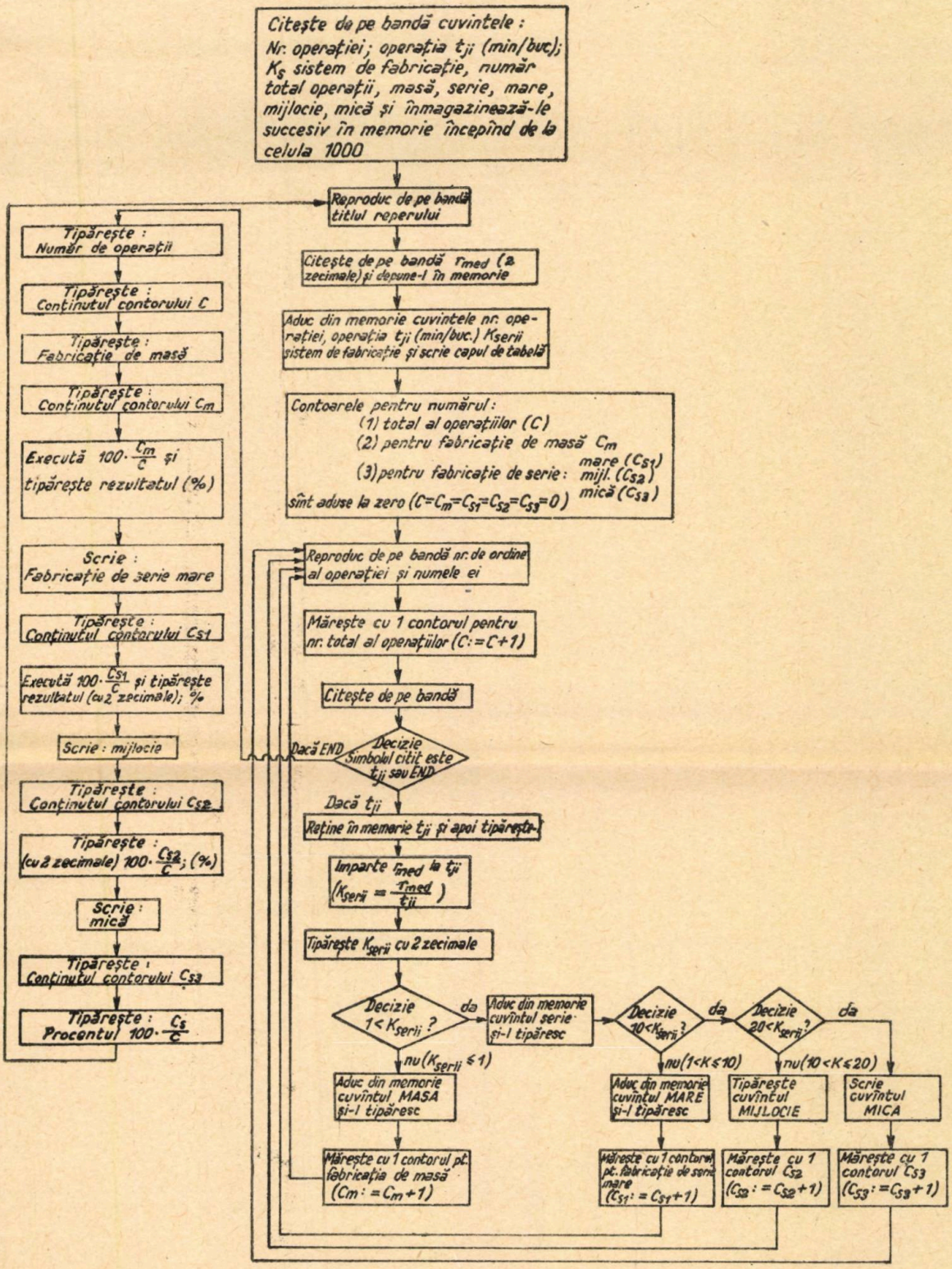
a) Luarea în considerare numai a unităților de producție de bază. Sistemul de fabricație trebuie să fie stabilit numai pentru producția de bază care se desfășoară în secțiile de prelucrări primare, prelucrări mecanice și montaj.

b) Sistemul de fabricație în cadrul fiecărei secții de bază se stabilește pe repere, subansamble și pe fiecare produs în parte începînd de la unitățile de producție inferioare (locurile de muncă) spre cele superioare (ateliere)

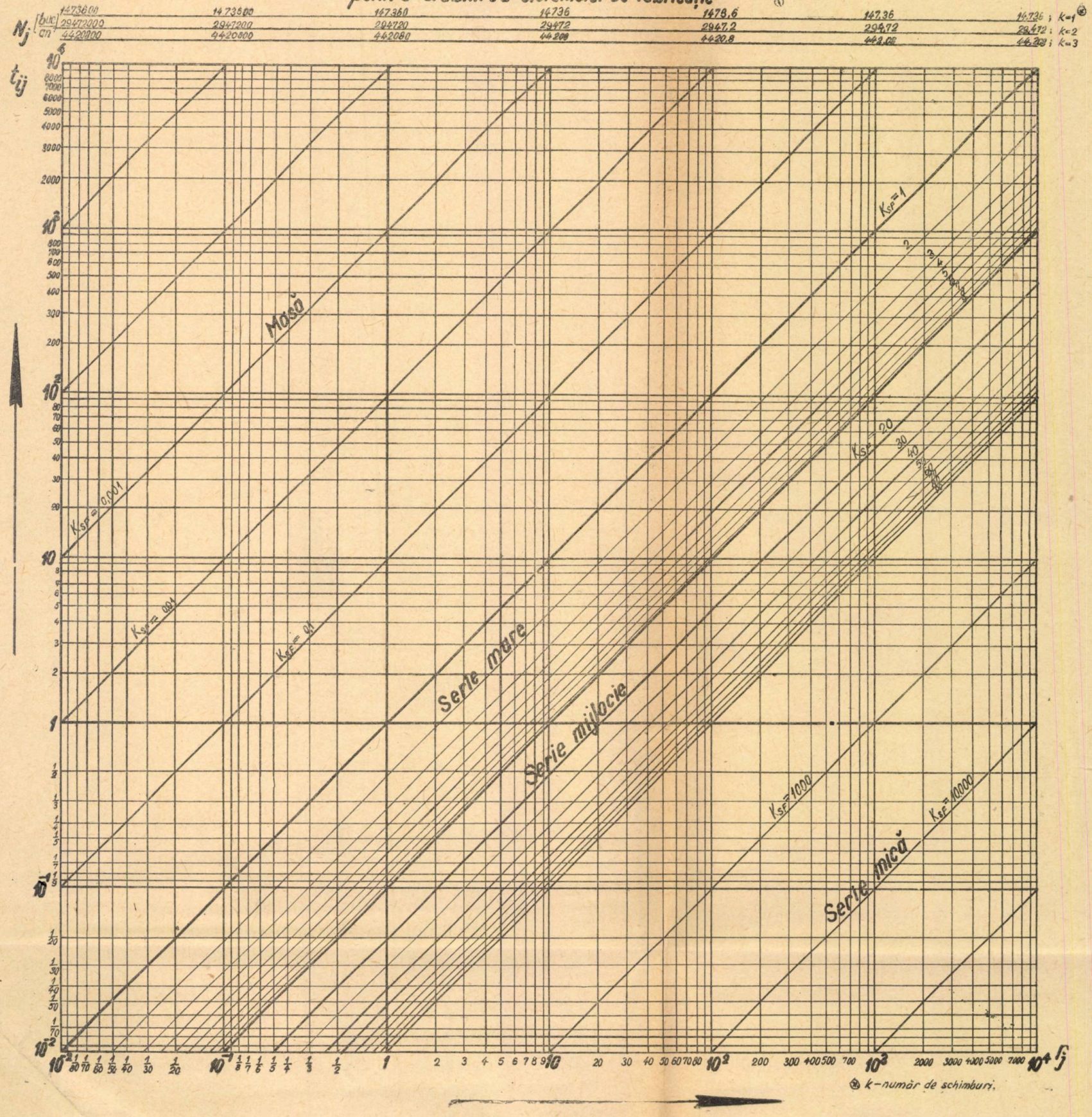
În cadrul fiecărei secții de bază, datorită particularităților specifice ale fabricației de mașini, nu vom întîlni în întregime caracteristicile unui singur sistem de fabricație, ci a mai multor sisteme.

După frecvența cu care mărimea $1/Kj$ se situează în limitele prezentate se va determina sistemul predominant al fabricației pentru fiecare reper (λ) și produs (i) din unitatea de producție respectivă. Pentru aceasta este necesar să se înceapă calculele de la locurile de muncă ;

SCHEMA LOGICA PENTRU STABILIREA SISTEMULUI DE FABRICAȚIE LA CALCULATORUL ELECTRONIC „NEAC-1240"



NOMOGRAMA
pentru stabilirea sistemului de fabricație



c) Sistemul de fabricație are un caracter dinamic fiind influențat de factori tehnici, organizatorici și economici care se modifică în timp.

Dinamica sistemelor de fabricație depinde de nivelul tehnic al utilajului existent, de gradul de mecanizare și automatizare al proceselor de producție, de procedeele tehnologice utilizate, de înzestrarea cu SDV, de organizarea producției și muncii și calificarea forței de muncă.

Dinamica sistemului de fabricație este însă influențată în mod diferit de acești factori.

Modificările factorilor tehnici și organizatori au o influență predominantă, pe scară largă și la intervale reduse de timp, în opoziție cu alți factori a căror influență deși neneglijabilă este mult mai redusă datorită intervalelor mari de timp în care ele se modifică. De asemenea o considerabilă influență, care se resfrînge asupra sistemelor de fabricație, o are perfecționarea formelor organizatorice ale producției, între altele concentrarea, specializarea și cooperarea.

Catedra de planificare și organizare
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Norbert Wiener* — Cibernetica, Ed. științifică, 1966.
2. *Oscar Lange* — Introducere în cibernetica economică, Ed. științifică, Buc., 1967.
3. *Couffignal, L.* — La Cybernétique Paris 1963 — Press Universitaires de France.
4. *Beer, S.* — Cybernetics and Management London 1960, The English Universities.
5. *Marian Mazur* — Cybernetyczna teoria ukladow Samodzieluych — Warszowa 1966 — Panstwowe, Wydewnictwo Naucowe.
6. *Chorafas, D. N.* — La simulation matematique et les applications. Dunod 1966 — Paris.
7. *Moisil, Gr. C.* — Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor. Ed. științifică, 1968.
8. *Reitsma, Sagalyn, I.* — Correlation Mesures — Information Storage and Retrieval — Departamment of Computer Science Cornell University Ithaca, New-York — December 1967.
9. *Bourbacki, N.* — Topologie générale. Herman, Paris, 1951, Cp. I, II, III.
10. *Silviu Guiașu* — Aplicații ale teoriei informației. Ed. Academiei R.S. România, 1968.
11. *Elmaghraby, S. E.* — The Desing of Production Systems. Mc Grow — Hil, New-York, 1966.
12. *Igal Adirii, Adi Ben-Israel* — An Extension and Solution of Avrow-karlin Type Production Models, by the Pontryagin Maximum Principle. — Chaier du centre l'etudes de recherche opérationnelle, vol. 8, nr. 3, 1966, Bruxelles.
13. *Bonnin, J., Robinson, C.* — An Investigation of Computer Simulation — The University of Chicago — the Institute for Computer Research — nr. 14, august 1/1967.
14. *Löigren, L.* — A Theory of Uniform Switching Nets — Research Institut of National Depence — Elecronics Department, Stockholm.
15. *Savant, C. I.* — Calculul sistemelor automate, vol. I, II. Ed. Științifică, Buc., 1967.
16. *Dumber, C. A.* — Potocinîe metodî proizvodstva mașinostroienii, Mașghiz, 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

FIZICĂ

C.Z. . 542.63:546.24:537:535:661.8...592:546.47

ASUPRA EFECTULUI FOTOVOLTAIC LA CONTACTUL STRATELOR SUBȚIRI DE TELUR CU ZINCUL *

CANDIDA GHEORGHIȚĂ-OANCEA, LILIANA BÁRBICI, MARIA POPA-MILEA
P. CRISTEA

În lucrări anterioare [1] [2] [3] s-a arătat că la iradierea cu lumină albă a contactelor între strate subțiri de telur și diverse metale ca aurul, cuprul, plumbul, argintul, bismutul etc. apare un efect fotovoltaic. Cu această ocazie, s-a semnalat faptul că la unele dintre aceste contacte apare o modificare în timp a efectului fotovoltaic, pe care am atribuit-o unui proces de difuzie între elementele menționate și telur, cu formarea de compuși ai telurului care au proprietăți semiconductoare. În lucrarea de față se studiază efectul fotovoltaic la contactul Zn-Te și evoluția sa în timp.

Partea experimentală

Celulele au fost obținute prin metoda evaporării în vid (10^{-4} Torr) depunîndu-se pe un substrat de sticlă, menținut la temperatura camerei, un strat subțire de telur, peste care, la capete, se depun prin același procedeu strate de zinc. Contactul electric la circuitul exterior s-a făcut de la stratele de zinc, cu electrozi din argint coloidal.

Efectul fotovoltaic a fost studiat la o iluminare în impulsuri cu o frecvență de aproximativ 50 Hz și un factor de umplere 1 : 3 interpunînd în calea fasciculului luminos un modulator mecanic, așa cum s-a arătat în lucrări anterioare [1] [2]. Ca sursă de lumină am folosit un bec de proiecție de 750 W. Impulsurile de tensiune fotovoltaică, au fost măsurate pe ecranul unui duoscop, după o amplificare prealabilă printr-un microvoltmetru Rodhe-Schwartz.

Rezultate experimentale

În lucrare s-au făcut observații asupra efectului fotovoltaic, care apare la cele două contacte Zn-Te, cînd stratul de telur a fost depus normal și oblic. La iluminarea în impulsuri a probei s-a constatat că efectul total este compus din două efecte, unul cu răspuns practic instantaneu, de salt, și altul cu inerție mare, cu o variație exponențială în timp. Va-

* Manuscris predat la redacție la 20 noiembrie 1968.

riația amplitudinii celor două componente, exponențială și de salt, în lungul probelor, în funcție de distanță, s-a obținut iluminînd proba punct cu punct, pornind de la unul din contactele Zn-Te. Păstrîndu-se aceeași geometrie a dispozitivului experimental proba a fost iluminată cu un flux constant a cărui valoare a fost verificată la fiecare experiență cu ajutorul unei fotocelule.

În fig. 1 și 2 sînt reprezentate variațiile celor două componente pentru una din probe în care telurul a fost depus oblic. În fig. 1 este reprezentată situația imediat după depunere, iar în fig. 2 după 4 luni. Se observă că în porțiunea din mijloc, care corespunde telurului depus

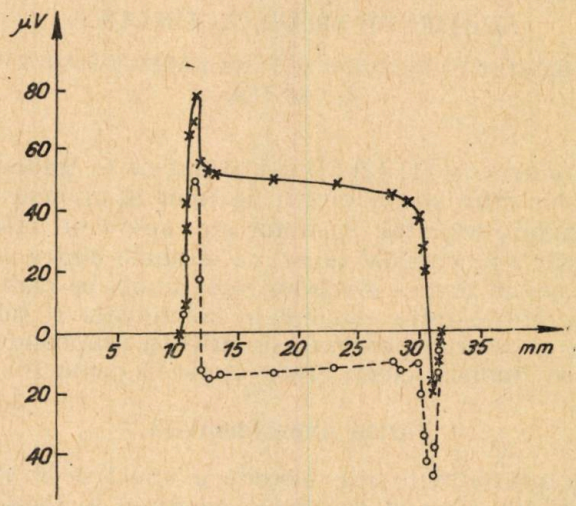


Fig. 1. Variația tensiunii fotovoltaice în lungul unei probe în care telurul a fost depus oblic, imediat după depunere.
x componenta de salt
o componenta exponențială.

oblic, componentele de salt și exponențială sînt practic constante în lungul probei iar valoarea lor descrește puțin în timp. Componenta de salt este mult mai mare decît cea exponențială și apariția acestui efect în zona centrală a probei este datorată anizotropiei telurului, care apare în urma depunerii oblice a acestuia. Deoarece la depunerea oblică unul din contacte e mai apropiat de evaporator decît celălalt, grosimea stratului de telur în regiunea contactelor este diferită, ceea ce determină o diferențiere a procesului de difuzie la cele două contacte. Astfel din studiul diagramelor se observă că procesul de difuzie se manifestă mai puternic la contactul unde stratul de telur este mai subțire, iar la celălalt, unde stratul de telur e mai gros, procesul este mult mai lent, valorile celor două componente scad și raportul lor se schimbă în timp.

De asemenea apare o structurare a variației componentelor în lungul celulei, în regiunea contactului componenta de salt, după o ușoară creștere scade și rămîne practic constantă în timp iar exponențiala se micșorează.

Aceste variaţii destul de mici şi de lente ale componentelor indică faptul că după formarea prin difuzie a compusului Zn-Te intervin numai modificări mici. Acestea sînt legate de modificările care apar în procesul de difuzie de la Zn la Te prin diferite faze Zn-ZnTe, ZnTe-Te pînă se ajunge la un echilibru al procesului.

Diagrama de fază Zn-Te indică formarea unui singur compus stabil al zincului cu telurul, telurura de zinc ZnTe, ceea ce se reflectă şi în diagramele de efect fotovoltaic.

Pentru stratele de telur depuse normal efectul fotovoltaic apare numai la contacte, iar în regiunea centrală efectul este nul (fig. 3).

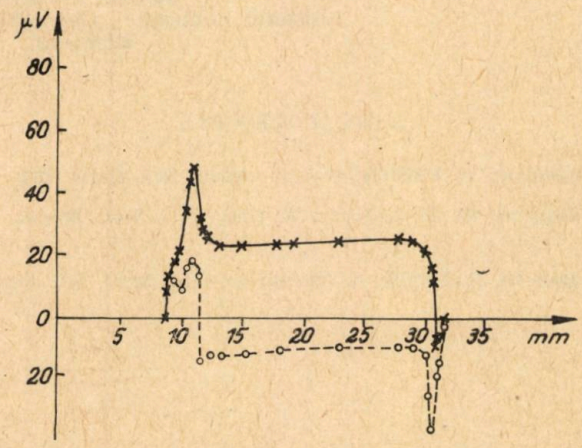


Fig. 2. Variaţia tensiunii fotovoltaice în lungul unei probe în care telurul a fost depus oblic după 4 luni de la depunere.
x componenta de salt
o componenta exponenţială.

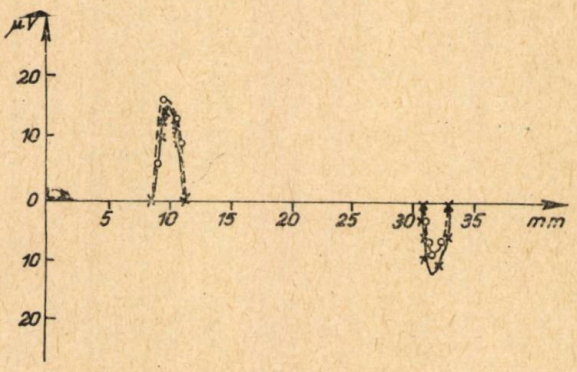


Fig. 3. Variaţia tensiunii fotovoltaice în lungul unei probe în care telurul a fost depus normal.
x componenta de salt
o componenta exponenţială.

Efectul fotovoltaic la contactul Zn-Te depus normal este mult mai mic decît cel obținut în cazul depunerii oblice a telurului. Acest fapt arată că prin difuzia zincului în telurul depus oblic ia naștere o telurură orientată în care apare un efect fotovoltaic ce se adaugă la efectul obținut la contact. Se constată că efectul crește cu grosimea stratului de telur, dar variațiile în timp se manifestă la fel în general.

Procesul de difuzie în sistemul Zn-Te a fost observat și la microscopul metalografic, punîndu-se în evidență zone diferit colorate care pot fi corelate cu modificările efectului fotovoltaic.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Gheorghiță-Oancea, P. Cristea* — C.R. Acad. Sci. Paris **261**, 1239, 1965.

2. *C. Gheorghiță-Oancea, M. Popa-Milea, P. Cristea* — Rev. Roum. Phys. **14**, 1, 105, 1969.

3. *C. Gheorghiță-Oancea, E. Zamfir, L. Barbici* — C.R. Acad. Sci. Paris **268**, 189, 1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. : 542.938:547.724.1:66.093.8:668.533.61.633

DIE HYDROLYSE DER EINJAHRPFLANZEN ZUR HERSTELLUNG VON FURFUROL UND ORGANO-MINERALISCHE KOMPLEXDÜNGERN *

GHEORGHE C. CONSTANTINESCU

Furfurol wird Heute in manchen Fällen auch durch Hydrolyse von einjährigen Pflanzen gewonnen. Die dazu anwendenden Hydrolysemethoden sind verschieden. Aus Schilfrückständen wird Furfurol durch Hydrolyse unter Druck mittels Wasserdampf bei ca. 180°C dargestellt. Die Ausbeute an Furfurol varriiert um 5% (bezogen auf die trockene Substanz). Als Nebenprodukt fällt eine an Lignin angereicherte Masse an, die manchmal zur Wasserdampfgewinnung in einem Offen verbrannt wird.

Das oben erwähnte Verfahren weisst bedeutende Nachteile auf, wie z.B. eine geringe Ausbeute an Furfurol und die schwach produktive Verwertbarkeit des Nebenproduktes.

Wie bekannt, ist es möglich durch Hydrolyse bis zu 10% en Furfurol aus einjährigen Pflanzenrückständen zu gewinnen, wenn man der Vorgang mit verdünnten Säuren vor sich gehen lässt [1, 2, 3, 4]. Das Ligninhaltende Nebenprodukt findet allerdings auch eine begrenzte Anwendung. Unsere Überlegungen gingen dahin, die Hydrolysemethode so zu verändern, dass die Ausbeute an Furfurol erhöht und das Nebenprodukt in einem Komplexdünger gleichzeitig umgewandelt wird.

Wie wir früher zeigen konnten [5], ist es möglich, aus einjährigen Pflanzenrückständen, wie Stroh oder Schilf, Komplexdünger herzustellen, wenn der Prozess in zwei Schritte durchgeführt wird :

1. — Die Hydrolyse mit geringen Mengen verdünnter Säuren, oder deren sauren Salzen wie z.B. Kaliumbisulfat, oder auch unter gleichzeitiger Einwirkung von verdünnten Säuren und Wasserstoffperoxyd und

* Manuskript am 25 September 1968, eingegangen.

2. — Das braun gefärbte Nebenprodukt wird nach Neutralisation mit Ammoniak, oder mit Kali- bzw. Calciumhydroxyd einer thermischen Behandlund bei ca, 180°C unterworfen.

In der ersten Stufe werden die Strohbestandteile wie folgt beeinflusst: Die Pentosane werden in Furfurol umgewandelt, die Cellulose wird teilweise bis zu Glukose, teilweise bis zu Oligomeren mit geringem Polymerisationsgrad abgebaut. Das Lignin bleibt fast unverändert. Wenn das Hydrolysegemisch neben verdünnten Säuren auch Wasserstoffperoxyd enthält, dann ist auch eine Oxydation von Lignin feststellbar. In der zweiten Stufe finden die Humifizierungsvorgänge gleichzeitig mit den Inkohlungsprozessen statt, infolge deren die Eigenschaften des Produktes wesentlich verbessert werden. Fast unabhängig von der angewandte Hydrolysemethode gehen die Pentosane zum grössten Teil in Furfurol über und sie werden aus dem Gemisch entfernt.

Die wichtigste Frage ist nun, wie der Prozess geleitet werden muss, damit der Rückstand als organische Nährstoffträger oder Komplexdünger verwendet werden kann. Um diese Frage zu lösen, sollten die während der Hydrolyse antretenden chemischen Veränderungen verfolgt und ausgewertet werden.

Experimenteler Teil

Die Hydrolyse des Strohes wurde in einem 2l-Dreihals-Rundkolben durchgeführt, wobei zerkleinertes Material mit einer Teilchengrösse von 0,8 mm zum Einsatz gelangte. Das Verhältnis Stroh zu Reagens betrug in unserem Falle 1 : 6. Als Reagens verwandten wir 5%ige Schwefelsäure oder Gemische von 2,5%iger Schwefelsäure mit 10%igem Wasserstoffperoxyd.

Das entstandene Furfurol wurde abdestilliert und nach Abkühlen nach Standard TAPPI T 19 m 50 als Furfurolfloroglucid bestimmt. Die Farbe des Reaktionsgemisches konnten wir beim Umrühren der Substanz, das alle 15 Minuten erfolgte, gut kontrollieren. Vom Antreten der Dunkelfärbung an gerechnet (= Beginn der im folgenden erwähnten Reaktionszeit) wurde die Reaktion zu verschiedenen Zeiten in regelmässigen Intervallen unterbrochen. Die Intervalle betrugen 10,15 oder 30 Minuten. 5 Minuten nach der Unterbrechung erfolgte jeweils die Neutralisation mit 25%igem Ammoniumhydroxyd und das Trocknen and der Luft. Die getrockneten Präparate wurden dann einer thermischer Behandlung im Trockenschrank bei 180°C unterworfen. Diese Behandlungstemperatur wurde gewählt, da ab 190—200°C eine intensive trockene Destilation des Strohes einsetzt, die jedoch vermieden werden sollte [6, 7]. Die Zeit für die thermische Behandlung hatten wir durch Vorversuche ermittelt und als günstigen Wert 90—120 Minuten festgestellt. Nach dem Abkühlen wurden die Präparate in Pulverflaschen abgefühlt.

Die so gewonnen Substanzen sind hell bis dunckelbraune manchmal schwarze lockere Materialien, die nicht hygroskopisch sind, nicht zusammenbacken und die sich lange Zeit (unzersetzt) aufbewahren lassen, ohne ihre Eigenschaften zu ändern. Das Stroh behält teilweise seine ursprüngliche Struktur, wird jedoch sehr spröde und lässt sich sehr leicht mahlen.

Ergebnisse

Die Hydrolyse mit 5%iger Schwefelsäure und mit 2,5%iger Schwefelsäure und 10%igem Wasserstoffperoxyd führt zu Produkten mit einem mittlerem Gehalt an gesamter organischer Substanz von ca. 65 bis 70% ; fast 50% davon sind wasserlöslich. Die Analyse zeigt folgende zusammensetzung der in den Präparaten erhaltenen organischen Substanz :

Tabelle 1

Mittelwerte nach der Hydrolyse mit 5%iger H_2SO_4 bzw. mit 2,5%iger H_2SO_4 und 10%igem H_2O_2 im Vergleich zum Stroh, bezogen auf die TS :

Nr.	Reagenz	Temp °C	Zeit Min.	Ges. org. Substanz. %	Lignin %	Cellulose %	wasserlösl. organ. S	Furfurol %
Stroh	—	—	—	95,66	15,90	43,94	7,67	9,90
2	H_2SO_4 5%	70	1000	69,23	16,88	18,44	30,13	8,61
3	H_2SO_4 5%	90	380	63,94	19,41	16,58	28,14	9,48
4	H_2SO_4 2,5% $+H_2O_2$ 10%	90	830	69,40	18,51	16,40	33,30	9,51

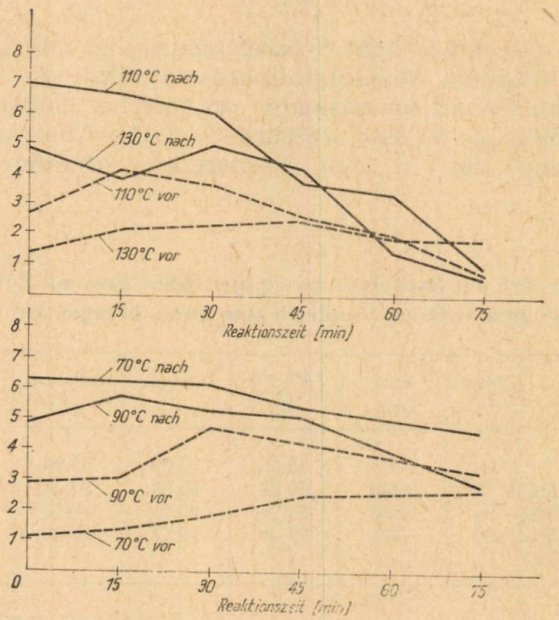
Man stellt fest, dass die Pentosane unter solchen Bedingungen fast vollkommen, die Cellulose dagegen nur zu 50—60% hydrolysiert wurden. Der Lignin-Gehalt zeigt eine Zunahme bis zu 15% gegenüber den ursprünglichen Werten. Diese ähnlichen Ergebnisse wurden jedoch nach unterschiedlichen Reaktionszeiten gewonnen, die bei 70°C mehr als doppelt so lang waren wie bei 90°C, was einem entsprechenden Unterschied der Hydrolysegeschwindigkeiten bzw. den Einfluss der Temperatur andeuten.

Infolge einer Behandlung mit 10%igem Wasserstoffperoxyd und 2,5%iger Schwefelsäure bei 90°C wurden die Pentosane und die Cellulose in gleichem Masse abgebaut, wie später unter alleiniger Verwendung von Schwefelsäure der doppelten Konzentration.

Grundsätzliche Unterschiede zwischen diesen beiden Präparaten zeigen aber die Bildungsgeschwindigkeit der Huminstoffe, die Werte der Kationenumtauschkapazitäten und des organisch gebundenen Stickstoffes, die gleichzeitig die Unterschiede zwischen einem Hydrolyseprozess und einem kombinierten Hydrolyse- und Oxidationsvorgang erkennen lassen (Tabelle 3).

Die Menge der gebildeten Huminsubstanzen weisst im Laufe der Hydrolysereaktion ein Maximum auf.

Die Intensität der Verkohlung steigt mit wachsender Schwefelsäurekonzentration und es sinkt die für diesen Vorgang benötigte Zeit, was die Befunde von Rogowin [8] bestätigt. Die ständige Verminderung der Huminsubstanzen nach der Erreichung eines Maximal-

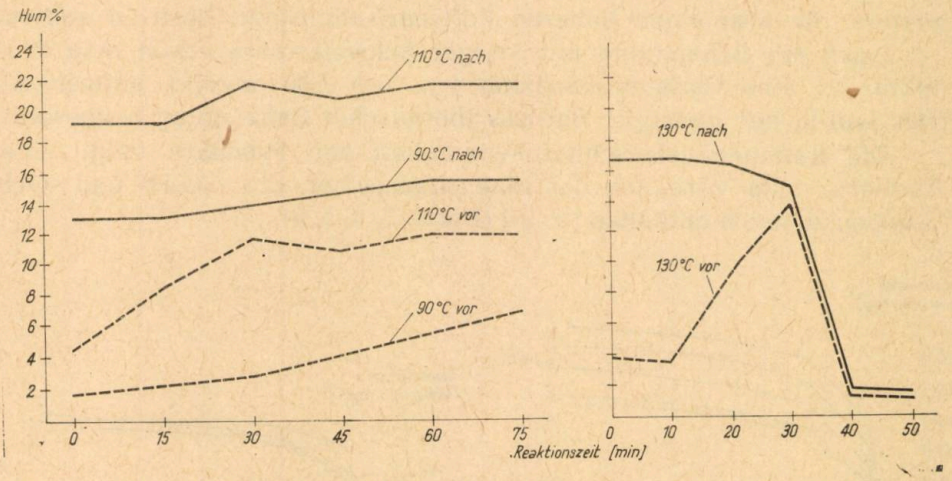


Darstellung 1. Der Huminstoffgehalt vor und nach der therm. Behandl., bei den mit 5%iger H_2SO_4 gewonnen Präp. (in % bezogen auf die TS).

wertes weisst auf die Tatsache hin, dass die Zersetzungswirkung der konzentrierten Schwefelsäure nicht nur auf die Kohlenhydrate, sondern auch auf die gebildeten Huminsubstanzen erstreckt. Meisstens stellt man einen gewissen Zusammenhang zwischen der Hydrolyseintensität und während der thermischen Behandlung erhaltenen Huminstoffmenge fest, z.B. bei den Präparaten 2,3. Dabei ergab sich, dass die Menge der während der thermischen Behandlung gebildeten Huminsubstanzen um so geringer war, je höher ihr Gehalt nach der Hydrolysereaktion gefunden worden war. Es ist vorteilhaft, die Hydrolysereaktion abzubrechen, bevor die erhaltenen Produkte der stark wasserentziehenden bzw. der Inkohlungskraft der konzentrierten Schwefelsäure zu unterliegen beginnen, weil diese Einwirkung der Bildung von Huminsubstanzen hinderlich ist.

Wichtig vom Standpunkt der praktischen Leitung der Hydrolyseprozess wäre auch die Zeitspanne, in der Produkte mit hohem Huminstoffgehalt erhalten werden können. Die Verwendung niedriger Temperaturen ist dabei vorzuziehen.

Durch die Behandlung mit 2,5%iger Schwefelsäure und 10%igem Wasserstoffperoxyd sind die erhaltenen Produkte viel homogener



Darstellung 2. Der Gehalt an Huminsubstanzen vor und nach der thermischen Behandlung, bei den mit 2,5%iger H_2SO_4 und 10%igem H_2O_2 hergestellten Präparaten (bezogen auf die TS).

(Darst: 2) Die Huminstoffmenge steigt ziemlich langsam bei 90° und 110°C an. Bei 130°C erreicht der Huminstoffgehalt nach 480 Min. ein Maximum, dannach sinkt er in der relativ kurzen Zeit von nur 10 Min. von 14,26% auf 1,43% ab. Die Durchführung des Prozesses bei 130°C hat somit keine praktische Bedeutung.

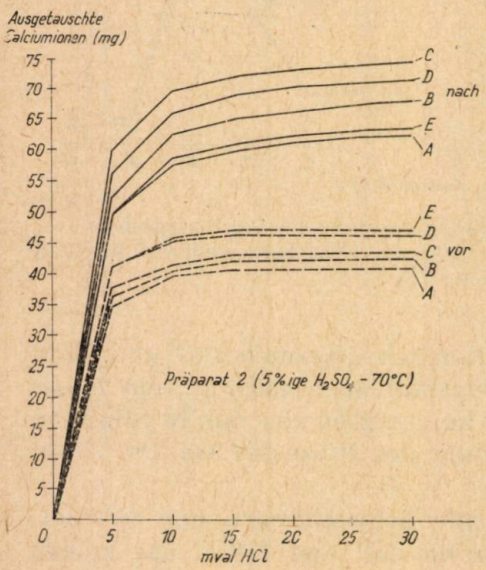
Die thermische Behandlung der mit Schwefelsäure und Wasserstoffperoxyd hergestellten Präparaten bei 90° und 110°C übt keinen günstigen Einfluss auf die Eigenschaften der Produkten aus, mit Ausnahme der Huminsubstanzengehalt. Die Werte der Kationenumtauschkapazität z.B. sinken während dieses Prozesses von ca. 1,20 mval/g auf ca. 0,60 mval/g. Die unter der Säureeinwirkung gebildeten austauschfähigen Gruppen sind durch die hohe Temperatur abgebaut. Ähnlich verhält sich ein Teil der organischen Stickstoffverbindungen u.z. ca. 15%, die abgespaltet werden. Auf diese Weise entstehen N-Verluste. Rogovin A. Z. [8] weisst darauf hin, dass die Verwendung des Wasserstoffperoxydes zu einer Oxydation der primären und sekundären Alkoholgruppen der Cellulose zu Carbonyl und Carboxylgruppen führen kann.

Die Entstehung der Carboxylgruppen könnte in unserem Fall die Erhöhung der Umtauschkapazität nach der Hydrolysereaktion und auch ihre geringere Temperaturbeständigkeit aufklären.

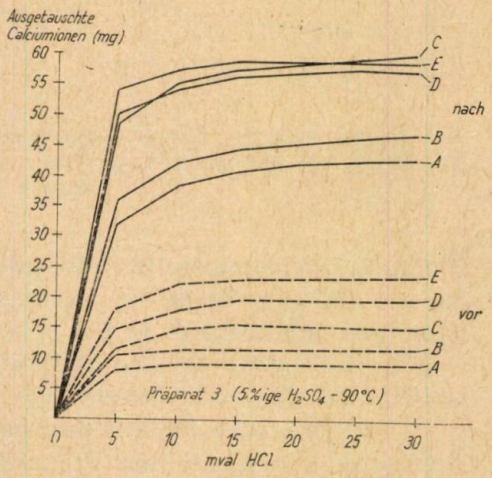
Es ist hervorzuheben, dass durch thermische Behandlung nicht nur Reversionsprodukte der Glukose mit niedrigen Polymerisationsgrad (4—6) erhalten werden, die mit 2%iger Salzsäure leicht hydrolysierbar sind, sondern auch organische Verbindungen, die als Cellulose bestimmt werden, die also einen höheren Polymerisationsgrad besitzen sollten.

Auch mit Behandlung mit 5%iger Schwefelsäure erhält man Produkte, die eine Umtauschkapazität von fast 1,30 mval/g aufweissen. Hier wurde der günstige Einfluss thermischer Behandlung festgestellt.

Die Kationenaustauschgeschwindigkeit der Produkte zeigt eine Ähnlichkeit im Verhalten der Ionenaustauscher, die -SO_3H- und -OH-Gruppen zugleich enthalten [9, 10] (Darst. 3, 4, 5, 6).



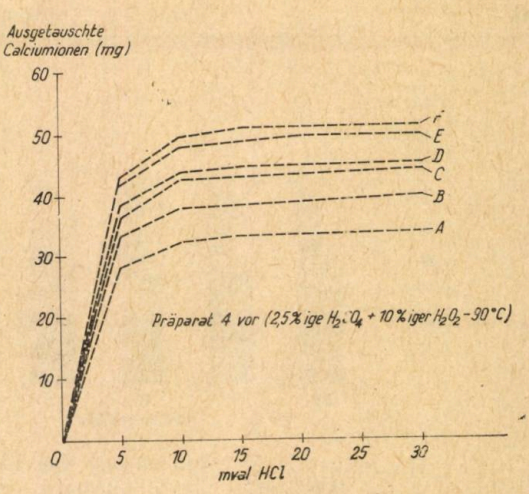
Darstellung 3. Austauschgeschwindigkeit.



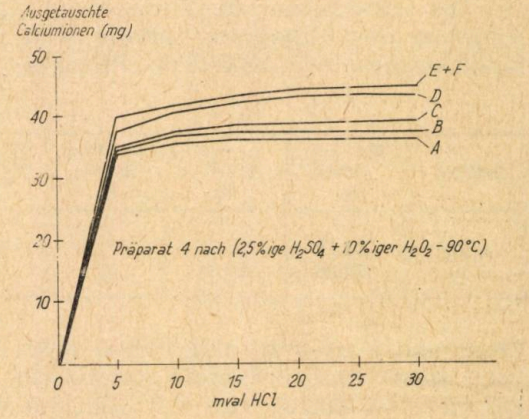
Darstellung 4. Austauschgeschwindigkeit.

Durch die Bestimmung der gesamten organischen Substanz, d.H. der wasserlöslichen und wasserunlöslichen, jedoch mit Salzsäure leicht hydrolysierbaren organischen Substanz, ferner der Cellulose und des Lignins, verfolgten wir alle organischen Stoffgruppen, die sich während der analysierten Prozesse verändern und die für die Charakterisierung der Richung, in der sich diese Prozesse enrwickeln, bedeutsam sein können (Darst. 7, 8).

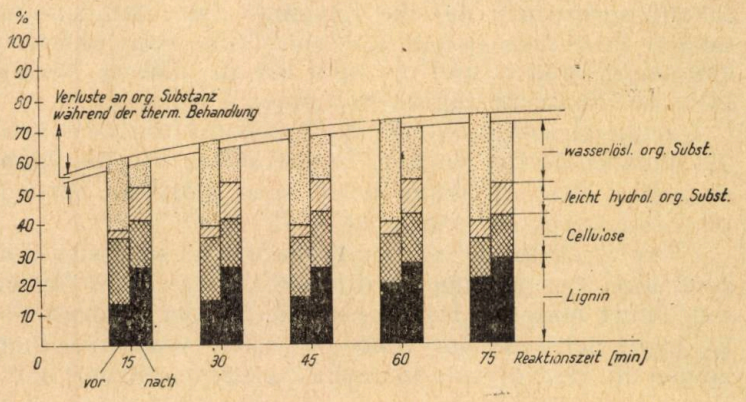
Darstellung 5. Austauschgeschwindigkeit bei den mit 5% iger H_2SO_4 und mit 5% iger H_2SO_4 und 10% igem H_2O_2 hergest. Präp.

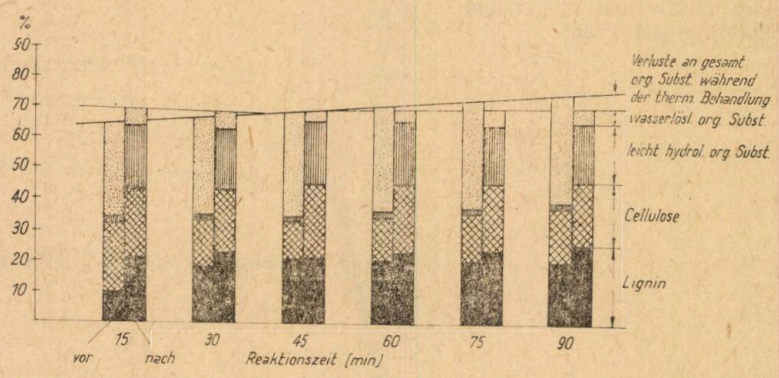


Darstellung 6. Austauschgeschwindigkeit bei den mit 5% iger H_2SO_4 und mit 5% iger H_2SO_4 und 10% igem H_2O_2 hergest, Pväp.



Darstellung 7. Die Entwicklung des Gehaltes an gesamt. org. Substanz und der analysierten organischen Stoffgruppen während der therm. Behandlung bei dem Präparat 2 (5% igem H_2SO_4-70°C)





Darstellung 8. Die Entwicklung des Gehaltes an gesamt org. Subst. u. der analysierten org. Stoffgruppen während der therm. Behandlung, bei dem Präparat 4 (2,5%ige H_2SO_4 + 10%iger H_2O_2 — 90°C).

Die Entwicklung der Prozesse sind darauf leicht zu überprüfen. Die Angaben der folgenden Tabelle sind ein typisches Beispiel für die Reaktionsgeschwindigkeit der Prozesse :

Tabelle 2

Präparat	Ges org. Subst. %	Lignin-gehalt %	Cellulose-gehalt. %	Leicht hydroi. org. Subst. %	Wasserlösl. org. Subst. %	Huminstoff. %	F. Q.
8 D	85,15	41,64	16,29	21,88	5,33	15,20	4,82
8 E	72,28	52,52	2,71	7,16	9,89	1,90	8,09

Erwähnenswert erscheint dabei, dass die Zeitdifferenz bei der Erhaltung dieser zwei Präparate nur 10 Min. betrug. In dieser im Verhältnis zur Gesamtreaktion von 500 Min. nur kurzen Zeit enwickeln sich zwei Hauptprozesse in entgegengesetzten Richtungen : ein Hydrolyseprozess, der die Steigerung der wasserlöslichen organischen Substanzen, und ein Inkohlungsprozess, der die Zunahme des ligningehaltes zur Folge hat. Beiden Prozessen liegen Kohlenhydrate von unterschiedlichen Polymerisationsgraden und die sich bis zu diesem Reaktionsstadium gebildeten Huminsubstanzen zugrunde.

Zugleich erweisen sich die Temperaturen zwischen 90°C und 110°C als günstig, da bei solchen Temperaturen die Inkohlungsprozesse nicht so heftig, sondern Stufenweise, ohne plözliche Sprünge verlaufen und praktisch leicht zu beherschen sind.

Der Stickstoffgehalt der Präparate ist in erster Linie von der Konzentration der bei der Hydrolyse verwendeten Schwefelsäure abhängig. Führt man die Hydrolyse mit 5%iger Schwefelsäure oder mit 2,5%iger Schwefelsäure und 10%igem Wasserstoffperoxyd durch, so zeigen die Hydrolysate folgende Zusammensetzung auf :

Tabelle 3

Nr. der Prap	Reagenz	Temp. °C	Zeit Min.	Huminstoffe vor %	Huminstoffe nach %	Kationen-umtausch-kapazit. vor mval/g	Kationen-umtausch-kapazit. nach mval/g	Stikkstoffgehalt (bez. auf die T. S) vor: Ges. N %	vor: wass.—losl. %	vor: Aus-tausch-bar %	vor: org. geb. %	nach: Ges. N % N	nach: wass. losl. %	nach: Aus-tausch-bar % N	nach: org. geb %	pH Wert (wasserextrakt) vor	pH Wert (wasserextrakt) nach
2 A	H_2SO_4	70	930	1,14	6,32	109,19	118,2	9,58	5,50			9,71	7,14			7,2	4,3
2 B	5%	70	960	1,38	6,20	114,19	126,7	9,49	5,38			9,60	7,64			7,2	4,4
2 C	5%	70	990	1,84	6,08	120,08	137,2	9,37	5,15			9,47	6,96			7,3	4,4
2 D	5%	70	1020	2,50	5,45	118,78	133,8	9,38	5,34			9,36	6,96			7,3	4,3
2 E	5%	70	1050	2,70	4,61	105,26	119,9	9,11	5,11			9,13	6,95			7,3	4,2
	Mittelwerte			1,91	5,73	113,50	127,10	9,38	5,30	0,62	3,46	9,45	7,01	0,62	1,82	7,3	4,3
3 A	H_2SO_4	90	360	2,90	4,85	27,61	89,3	12,34	6,12			11,65	7,98			7,3	4,1
3 B	5%	90	370	3,04	5,70	34,76	93,1	12,43	5,85			11,24	7,65			7,4	4,1
3 C	5%	90	380	4,75	5,32	44,88	112,9	10,80	6,33			11,35	7,29			7,4	4,1
3 D	5%	90	390	4,28	5,13	53,99	110,9	11,70	6,28			11,92	7,27			7,3	4,1
3 E	5%	90	420	3,29	2,76	64,67	116,4	11,63	6,38			11,60	7,29			7,3	4,1
	Mittelwerte			3,65	4,75	45,18	104,5	11,55	6,19	0,23	5,36	11,55	7,49	0,23	3,83	7,3	4,1
4 A	H_2SO_4 5%	90	795	1,76	13,25	97,99	58,8	7,78	6,89			6,91	6,63			5,2	4,3
4 B	$+H_2O_2$ 10%	90	810	2,34	13,36	113,63	58,3	7,56	6,79			6,96	6,51			5,3	4,3
4 C	,,	90	825	2,85	14,15	125,73	59,8	7,47	6,96			6,95	6,41			5,3	4,3
4 D	,,	90	840	4,14	14,92	127,57	66,6	7,75	7,08			7,04	6,34			5,3	4,2
4 E	,,	90	855	5,47	15,68	133,03	71,5	7,96	7,01			7,06	6,07			5,4	4,1
4 F		90	870	6,90	15,74	133,16	70,9	8,17	7,07			7,10	5,87			5,3	4,1
	Mittelwerte			3,92	14,50	121,80	64,3	7,78	6,97	0,62	0,19	7,00	6,32	0,62	0,06	5,3	4,2

Die thermische Behandlung übt einen günstigen Einfluss auf die Umwandlung der unlöslichen Stickstoffverbindungen in löslichen aus, wie aus den obenerwähnten Analysendaten zu entnehmen ist.

Einige ähnlich hergetellten Präparate haben keine toxische oder Hemmwirkung auf die Haferpflanzen im ersten Wachstumsstadium (wenn die Pflanzen am empflindlichsten sind) ausgeübt, wie wir früher gezeigt haben [5].

Auf Grund den obengesagten können die Präparaten als organomineralische Komplexdünger angewendet werden.

LITERATURANGABEN

1. * * * Französisches Patent 10555505/52.
2. * * * Französisches Patent 1175909/57.
3. *Mastagli P.:* F.P. 1067918.
4. *Mesnil, M.:* Furfurol et Agriculture. Industr. Agric .alim. 305, 1954.
5. *Constantinescu, C. Gh.:* Über die technische Humifizierung von Stroh als Grundlage für organische Nährstoffträger, Bodenverbesserungsmittel und organomineralische Komplexdünger. Diss. Leipzig, 1966.
6. *Sergeewa, N. W.:* Isutschenije prozessow prewrasstschenija i raspada drewesnoi pakani i sse wyssokomolekulijarnych komponentow podwlijaniem termitscheskowo wosdejsstwija. Doktorskaja dissertatia, Riga, 1962.
7. *Panassijuk, G. W.:* Srawnenie raslitschnich metodow termitscheskowo raslojenija gidrolisnowo lignina. J. Angew. Chem. 31, Nr. 10, 1605, 1958.
8. *Rogowin, A. Z. und Schorygina N. N.:* Chimia celulozei şi a substanţelor însoţitoare. Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
9. *Griessbach, R.:* Auschtauschadsoption in Theorie und Praxis. Akademie-Verlag, Berlin, 1957.
10. *Ionescu, D. T.:* Schimbători de ioni. Editura tehnică, Bucureşti, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

NOTĂ

C.Z. : 546:543/545:542.951.5:547.792.3

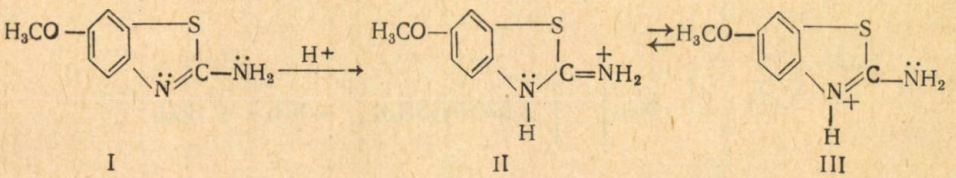
METODĂ DE DETERMINARE PENTRU 6-METOXI-2-AMINO-BENZOTIAZOL *

GRIGORE TEODORESCU

6-Metoxi-2-amino-benzotiazolul (MABT) este un intermediar organic întrebuințat în diverse sinteze organice, între care, în special, în obținerea unor tipuri de pigmenți și coloranți organici valoroși (pentru fibre poliesterice și poliacrilo-nitrilice). Pentru aceasta MABT trebuie supus procesului de diazotare care, pentru a decurge în condiții optime (conversie completă), reclamă cunoașterea exactă a conținutului în MABT 100% existent în MABT tehnic. O diazotare incompletă duce la obținerea unor pigmenți sau coloranți cu randamente scăzute și caracteristici tinctoriale necorespunzătoare.

Determinarea precisă a acestui produs prin diazotare clasică cu soluție de nitrit de sodiu, este foarte dificilă sau chiar imposibilă, dat fiind faptul că această amină, așa cum se va arăta mai jos, nu poate fi diazotată decît în acid sulfuric concentrat (>50%), în acid nitrozil-sulfuric, sau în amestec de acizi organici (propionic, acetic, formic, etc.) și acid minerai, din cauza bazicității (densității de electroni) *sensibil*, scăzute la azotul aminic [1—11].

Într-adevăr, amino-derivații de acest tip (la care se pot adăuga și 2-amino-benzotiazol, 6-metil-2-amino-benzotiazol, 3-amino-1,2,4,-triazol, 6-clor-2,4-dinitro-anilină, etc.), au o densitate mică de electroni la azotul grupei amino-primară. Aceasta se poate explica, de exemplu prin efectul puternic atrăgător de electroni, pe care-l are nucleul heterociclic asupra azotului aminic. Se mai poate explica și pe baza structurii I (formularea clasică).

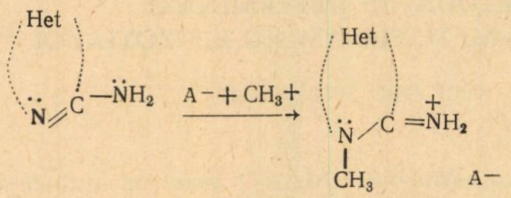


I II III

* Manuscris predat la redacție la 15 octombrie 1968.

care este după cum se vede de tipul unei amidine ciclice și care prin adiția unui proton trece în cationul stabilizat prin mezomeria dintre cele două structuri limită II și III [12].

Structura II predomină probabil exclusiv în soluție acidă. Ea conferă bazicitatea puternică la heteroatomul de azot și *sensibil scăzută* la azotul aminic. Așa s-ar explica de altfel și faptul că în reacția de alchilare (cu halogenuri de achil sau sulfat de metil) se N-alchilează heteroatomul de azot și *nu* azotul aminic conform reacției :



unde A^- = anion și Het = heterociclu).

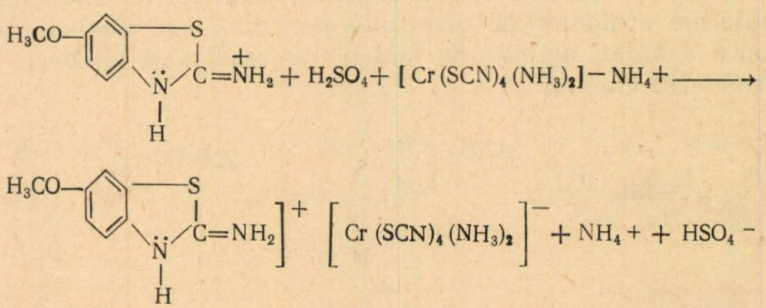
Densitatea de electroni sensibil scăzută de la azotul aminic face ca viteza reacției de diazotare să fie scăzută și deci posibilitatea de determinare a acestui produs prin diazotare să fie redusă la minimum.

Dat fiind că rainecatul de amoniu (RA) reacționează cu azotul aminic sub forma ionului de *oniu*, existent în echilibrul

$$R-\ddot{N}H_2 \rightleftarrows R=\overset{+}{N}H_2$$

am considerat că este indicat a studia metoda de determinare a acestui produs, cu acest reactiv, $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]^-NH_4^+$ (tetra-tiocianato diamino cromat (III) de amoniu, întrebuințat de noi și la determinarea altor substanțe [13—19]. În plus, dat fiind faptul că echilibrul dintre baza liberă și ionul de *oniu* trebuie să fie cu atît mai mult deplasat spre dreapta cu cît concentrația acidului mineral (acid sulfuric sau acid sulfuric și acid acetic glacial) este mai mare, am considerat că este util să facem încercările la diverse concentrații de acid mineral.

Reacția care are loc este următoarea :



bineînțeles pe structura II puternic cationizată la azotul aminic.

Din încercările făcute s-a observat că dacă se face condiționarea MABT în soluție apoasă de acid sulfuric cu concentrație mai mică decît 45%, complexarea cu RA nu mai are loc cantitativ, randamentul scăzînd concomitent cu scăderea concentrației de acid sulfuric.

Principiul metodei

Precipitarea complexului dintre MABT și RA se face prin introducerea soluției apoase de RA în soluție apoasă acidă (H_2SO_4 + + CH_3COOH) de MABT. După filtrarea și spălarea complexului, se solubilizează acesta în acetonă, se precipită ionul rainecat pus în libertate ca rainecat de argint cu exces de azotat de argint conform reacție :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]^- + Ag^+ \rightarrow Ag[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]$$

se filtrează acesta și se titrează excesul de azotat de argint cu soluție de tiocianat de amoniu 0,1 n în prezența alaunului de fier (III) amoniu. Complexul precipitat este de culoare violet, insolubil în apă și ușor solubil în acetonă.

Modul de lucru

Se cîntăresc 2,25 g MABT, se dizolvă în acid acetic glacial (cca 45—50 cc), se filtrează de impurități și se aduce în balon cotat la 250 cc cu CH_3COOH glacial. Din această soluție se iau probe de 4...10 cc.

La fiecare probă luată pentru determinare se adaugă 20 cc soluție de H_2SO_4 45% și în continuare, treptat sub agitare soluție apoasă de RA 3% concentrație, proaspăt preparată, pînă cînd soluția apoasă de deasupra precipitatului de complex este intens colorată. Se filtrează pe creuzet G_4, se antrenează cantitativ precipitatul rămas pe pahar cu soluție de RA 0,1%, se spală pe filtru de 3...4 ori cu cîte 3...5 cc soluție RA de 0,1% și final de două ori cu cîte 5 cc apă distilată.

Se dizolvă complexul spălat direct pe creuzet cu acetonă (25... 30 cc) se spală creuzetul cu 10...20 cc apă și se prinde totul în pahar de 250 cc. Se adaugă 30 cc azotat de argint 0,1 n se acidulează cu 2...3 picături de acid azotic 2 n, se filtrează pe filtru cantitativ și se prinde filtratul și apele de spălare în flacon de titrare de 800 cc. Se diluează la 500 cc cu apă distilată se mai adaugă 2 picături de acid azotic 2 n și 0,5...1 cc soluție alaun de fier (III) amoniu ; soluție saturată la rece (40%). Se titrează excesul de azotat de argint cu soluție de tiocianat de amoniu 0,1 n cu factor cunoscut.

La 1 cc soluție de $AgNO_3$ 0,1 n corespund 0,0180 g MABT 100%.

Laboratorul de Chimie anorganică-analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

Rezultatele sînt redate în tabelă :

Dozarea 6-metoxi-2-amino-benzotiazolului cu reinecat de amoniu

Tabelă

Nr. crt.	Soluție de analizat	MABT tehnic în probă	$AgNO_3$ la precipitare $F_{0,1n} = 1,0000$	NH_4SCN $F_{0,1n} = 1,1049$	$AgNO_3$ reacționat $F_{0,1n} = 1,0000$	MABT 100 % în probă	MABT 100 % în MABT tehnic dozat cu RA	MABT 100 % în MABT tehnic prin Kjeldahl
	cc	g	cc	cc	cc	g	%	%
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	0,0360	30	28,15	1,85	0,0333	91,81	92
2	4	0,0360	30	28,15	1,85	0,0333	91,81	92
3	5	0,0450	30	27,70	2,30	0,0414	92,00	92
4	6	0,0540	30	27,25	2,75	0,0495	91,66	92
5	7	0,0630	30	26,80	3,20	0,0576	91,43	92
6	8	0,0720	30	26,35	3,65	0,0657	91,25	92
7	8	0,0720	30	26,35	3,65	0,0657	91,25	92
8	9	0,0810	30	25,90	4,10	0,0738	91,11	92
9	10	0,0900	30	25,40	4,60	0,0828	92,00	92
10	10	0,0900	30	25,40	4,60	0,0828	92,00	92

BIBLIOGRAFIE

1. *Ushenco, I. V.*, — J. Obshchei Him. — 31, 2861 (1961).
2. Brevet german, 1.056.757 (1955).
3. Brevet francez 1.145.235 (1957).
4. Brevet american, 3.090.789; 3.057.848 (1961).
5. Brevet britanic, 840.903 (1960).
6. *Dapkina, D. A., Brugz, V. G., Sidenko, Z. S.* — J. Obschei, Him., — 32, 1535 (1962).
7. Brevet german, 1.050.940 (1955).
8. Brevet american, 2.857.372 (1958); 2.868.774 (1959).
9. Brevet american, 2.868.775 (1959).
10. Brevet american, 2.857.371 (1958).
11. Brevet francez, 1.145.751 (1956).
12. *Angyal, S. J., Angyal, C. L.* — J. Chem. Soc., Part. II, 1461 (1952).
13. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.* — Rev. de chimie, nr. 1, pg. 41 (1957).
14. *Teodorescu, Gr. Dinescu, A.* — Bul. Institutul Politehnic București, vol. XXVI, nr. 1, pg. 49 (1964).
15. *Teodorescu, Gr., Niculescu, Il.* — Bul. Institutul Politehnic București, vol., XXIX, nr. 1, pg. 43 (1967).
16. *Teodorescu, Gr., Niculescu, Il.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXIX, nr. 4, pg. 43 (1967).
17. *Teodorescu, Gr.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol., XXIX, nr. 5, pg. 83 (1967).
18. *Teodorescu, Gr.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXIX, nr. 6, pg. 55 (1907).
19. *Teodorescu, Gr., Niculescu, Il.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXX, nr. 1, pg. 17 (1968).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

MECANICĂ

C.Z. : 629.136.3:629.19:522

CONSIDERAȚII ASUPRA REGIMULUI OPTIM DE URCARE AL RACHETELOR *

C. GUȚĂ

Zborul rachetei pe porțiunea activă a traiectoriei este definit [1—4], [6], [7] de ecuațiile :

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= F\cos\alpha - R - G\sin\psi \text{ (după tangentă)} \\ mV\dot{\varphi} &= P - G\cos\varphi + F\sin\alpha \text{ (după normală)} \end{aligned} \tag{1}$$

Notînd valoarea curentă a înălțimii cu z și ținînd seama de figura 1 se poate scrie viteza de urcare a rachetei sub forma :

$$v = \dot{z} = V\sin\varphi$$

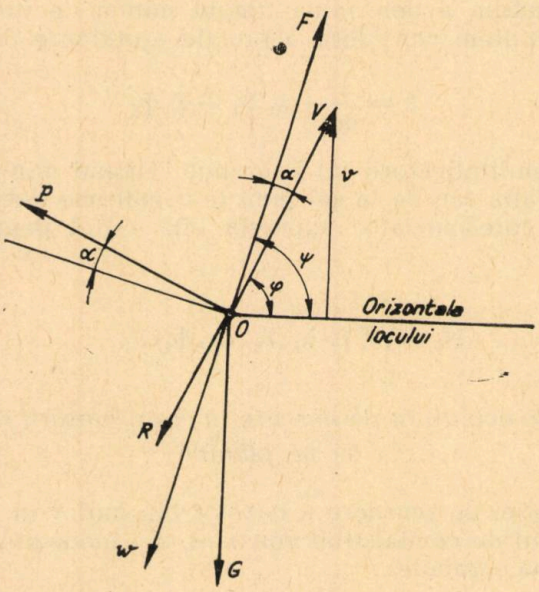


Fig. 1.

* Manuscris predat la redacție la 20 ianuarie 1969.

Forța de tracțiune a motoarelor rachetă cu combustibili chimici, în forma ei generală este :

$$F = \delta \dot{m} w + A_s (p_s - p_a) \tag{2}$$

După cum se știe din teoria motoarelor rachetă în formula (2), $\delta = \frac{1 + \cos 2\gamma}{2}$, este un factor care ține seama de unghiul de divergență (2γ) al ajutajului Laval; m este debitul masic de produse de ardere ce trece în unitatea de timp prin ajutaj; w_s, p_s viteza, respectiv presiunea gazelor în secțiunea de ieșire A_s, iar p_a este presiunea mediului ambiant.

Un regim frecvent întîlnit în funcționarea motoarelor rachetă este cel nominal, adică $p_s = p_a$

Considerînd α unghiul de incidență al rachetei, mic, se pot lua în sistemul (1) aproximațiile lui Euler ($\cos \alpha \simeq 1$ și $\sin\alpha \simeq \alpha$) care devin :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m \frac{dV}{dz} v + w \frac{dm}{dz} v + R + mg \sin \varphi = 0 \\ \Phi_2 &= mV \frac{d\varphi}{dz} v - P + mg \cos \varphi + \frac{dm}{dz} v w \alpha = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Întrucît urmărim a determina timpul minim de urcare, pînă la o altitudine dată, putem considera o funcție ajutătoare de forma :

$$E = \frac{1}{v} + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \tag{4}$$

λ_1, λ_2 fiind multiplicatorii lui Lagrange. Timpul minim de urcare de la o înălțime la alta sau de la sol pînă la o înălțime dată [8], [9], se deduce integrînd corespunzător expresia (4). Astfel pentru primul caz, avem :

$$\Omega_1 = \int_{z_0}^{z} E (v, \lambda_1, \lambda_2, \Phi_1, \Phi_2)\, dz \tag{5}$$

1. *Soluțiile ecuațiilor de mișcare în cazul lansării rachetelor de pe pămînt*

Variația vitezei de scurgere a gazelor din motor în altitudine, considerînd consumul de combustibil constant, din momentul lansării poate fi scrisă sub forma parabolei :

$$w = w_0 + az^2 \tag{6}$$

„a" este o constantă dimensională care determină forma parabolei și depinde de regimul de funcționare al motorului.

Pentru zborul la înălțimi mici, unde accelerația gravitației este mai puțin influențată, se poate considera $g=g_0=\text{const}$. Aceasta se poate admite în limitele atmosferei dense, întrucît la altitudinea de 50 km, accelerația gravitației diferă cu numai 1,3% de cea de la sol.

Aplicînd relațiile lui Euler-Lagrange din Calculul Variațional [5], [9]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial V}-\frac{d}{dz}\,\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{dV}{dz}\right)}=0\\
&\vdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial E}{\partial m}-\frac{d}{dz}\,\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{dm}{dn}\right)}=0\\
&\vdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial E}{\partial \lambda_2}-\frac{d}{dz}\,\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{d\lambda_2}{dz}\right)}=0
\end{aligned}\tag{7}$$

asupra funcției ajutătoare (4), se obține pentru variația cu înălțimea a funcțiilor V, φ, m, λ_1, λ_2, următoarele ecuații diferențiale de ordinul întîi:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dz}&=a_{11}+\left(a_{12}+\frac{a_{14}}{z^2}\right)\varrho(z)+\frac{a_{13}}{z^2}\\
\frac{d\varphi_1}{dz}&=a_{21}+\left(a_{22}+\frac{a_{24}}{z^2}\right)\varrho(z)+\frac{a_{23}}{z^2}\\
\frac{dm}{dz}&=a_{31}+\frac{a_{33}}{z}+a_{34}\frac{\varrho(z)}{z^2}+\frac{a'_{35}}{z^2}+\frac{a''_{35}}{z^3}+a_{36}\frac{\varrho(z)}{z^3}\\
\frac{d\lambda_1}{dz}&=a_{41}+a_{42}\varrho(z)+\frac{a'_{43}}{z}+\frac{a''_{43}}{z^2}+a_{44}\frac{\varrho(z)}{z^2}+a''_{44}\frac{\varrho(z)}{z^3}+\\
&\quad\frac{a'_{45}}{z^3}+\frac{a''_{45}}{z^4}+a_{46}\frac{\varrho(z)}{z^4}\\
\frac{d\lambda_2}{dz}&=a_{51}+a_{52}\varrho(z)+\frac{a'_{53}}{z}+\frac{a''_{53}}{z^2}+a'_{54}\frac{\varrho(z)}{z^2}+a''_{54}\frac{\varrho(z)}{z^3}+\\
&\quad\frac{a'_{55}}{z^3}+\frac{a''_{55}}{z^4}+a_{56}\frac{\varrho(z)}{z^4}
\end{aligned}\tag{8}$$

Luînd în (8) o variație pentru densitatea mediului ambiant de forma :

$$\varrho(z) = \frac{\varrho_0}{1 + b\,z} \tag{9}$$

unde ρ_0 este densitatea mediului ambiant la nivelul mării iar b, o constantă dimensională ce se determină pe baza datelor obținute cu ajutorul rachetelor sau se deduce din tabelele atmosferei standard, pentru intervalul care interesează.

Coeficienții $a_{11}....a_{56}$, din ecuațiile (8) sînt indicați în cele ce urmează :

$$a_{11} = \frac{1 + \alpha \operatorname{ctg} \varphi_0}{\sqrt{2}\; V_0^2 \alpha\, m_0 \sin \varphi_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{(\lambda_{10} + \alpha\,\lambda_{20}) \sin \varphi_0}{\sqrt{2}\,\alpha\,\lambda_{10} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} +$$

$$+ \frac{2 \cos \varphi_0 \times \alpha\,(1 + 3 \sin^2 \varphi_0 + \alpha \sin 2\varphi_0)}{\sqrt{2}\,\lambda_{10}\, V_0 \sin \varphi_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\, \lambda_{20}\, g +$$

$$+ \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{2}\,\alpha \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\, g = a'_{11}\, g + a''_{11}$$

$$a_{12} = \frac{\left[(\lambda_{10} - 2\lambda_{20}) \frac{\overline{P}_0}{V_0} + \frac{\alpha}{V_0} \overline{R}_0 (\lambda_{10} \operatorname{ctg} \varphi_0 + \lambda_{20}) + \overline{P}_{v0}\,\lambda_{20} - \overline{R}_{v0}\,\lambda_{10}\right.}{\sqrt{2}\,\alpha\, m_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\left. - \alpha\,\lambda_{20} \frac{\overline{P}_0}{V_0} \operatorname{ctg} \varphi_0\right]$$

$$a_{13} = \frac{\sqrt{2}\, g \sin \varphi_0}{2\, a\, \alpha\, \lambda_{10} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} = a'_{13}\, g$$

$$a_{14} = \frac{\lambda_{20}\, \overline{P}_0 - \lambda_{10}\, \overline{R}_0}{3a\sqrt{2}\,\lambda_{10}\,\alpha\, m_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{21} = (\alpha - \operatorname{ctg} \varphi_0)\, \frac{g}{V^2} + \frac{(\lambda_{10} + \alpha\,\lambda_{20}) \sin \varphi_0}{\sqrt{2}\,\lambda_{10} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\alpha}{V_0}\, a_{11} = a'_{21}\, g + a''_{21} \tag{10}$$

$$a_{22} = \frac{\bar{P}_0 + \alpha \bar{R}_0}{V_0^2 m_0 \sin \varphi_0} + \frac{\alpha}{V_0} a_{12}$$

$$a_{23} = \frac{\sqrt{2}\,\alpha \sin \varphi_0}{2\,a\,V_0\,\lambda_{10}\,\alpha \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot g = a'_{23}\,g$$

$$a_{24} = \frac{\lambda_{20}\bar{P}_0 - \lambda_{10}\bar{R}_0}{2\,a\sqrt{2}\,\lambda_{10}\,V_0\,m_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{31} = \frac{(\lambda_{10} + \alpha\,\lambda_{20}) \sin \varphi_0}{\sqrt{2}\,\lambda_{10} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = -\frac{m_0}{2a} a_{11}\ ;\ a_{34} = \frac{m_0}{2a} a_{12}$$

$$a'_{35} = -\frac{m_0 g}{2a} \cdot \frac{\sqrt{2}\,\sin \varphi_0}{3\,a\,V_0\,\alpha \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\ ;$$

$$a''_{35} = \frac{\sqrt{2}\,g \sin \varphi_0}{2\,a\,\alpha\,\lambda_{10} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{36} = -\frac{\lambda_{20}\bar{P}_0 - \lambda_{10}\bar{R}_0}{4a^2\sqrt{2}\,\lambda_{10}\,\alpha \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{41} = \left[(\operatorname{ctg} 2\varphi_0 - \alpha)\,\lambda_{10} + \alpha\,\lambda_{20}(1 + 2\,\alpha \operatorname{ctg} \varphi_0 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_0)\right] \frac{g}{V_0^2}$$

$$+ \frac{\alpha \operatorname{ctg} \varphi_0}{m_0 V_0^3 \sin^2 \varphi_0} - \frac{a_{11}}{V_0}\left[\lambda_{10}(1 + \alpha) - \alpha\,\lambda_{20}\right]$$

$$a_{42} = -(\lambda_{10} + \lambda_{20}) \frac{P_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{m_0 V_0^2 \sin \varphi_0} - \frac{a_{11}}{V_0}\left[\lambda_{10}(1 + \alpha) - \alpha\,\lambda_{20}\right]$$

$$a'_{43} = \frac{1}{2a}\left(\frac{g}{V_0} + \alpha\right)\lambda_{10} + \frac{\sqrt{2}\,\left[\lambda_{10}(1 + \alpha) - \alpha\,\lambda_{20}\right]}{2\,a\,\lambda_{10}\,\alpha \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \sin \varphi_0$$

$$a''_{43} = \lambda_{20}\left(\frac{\alpha}{3a} - 1\right) - \alpha\lambda_{20} - \frac{V_0(\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})\ [\lambda_{10}(1+\alpha) - \alpha\lambda_{20}]}{\sqrt{2}\,\lambda_{10}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\sin\varphi_0$$

$$a''_{44} = \frac{1}{2a}\left(\lambda_{10}\alpha + \frac{\lambda_{20}P_0}{m_0 V_0 \sin\varphi_0}\right)$$

$$a'_{44} = \frac{(\lambda_{20}P_0 - \lambda_{10}R_0)\ [\lambda_{10}(1+\alpha) + \alpha\lambda_2]}{2a\sqrt{2}\,\alpha V_0 m_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a'_{45} = \frac{\lambda_{10}(\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})\sin\varphi_0}{2\sqrt{2}\,a\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a''_{45} = \frac{\sqrt{2}\,g\sin\varphi_0}{2a\lambda_{10}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{46} = \frac{\lambda_{10}}{4a^2}\ \frac{\lambda_{20}\overline{P}_0 - \lambda_{10}\overline{R}_0}{\sqrt{2}\lambda_{10}\alpha m_0 \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{51} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi_0}{V_0}\left(\frac{\lambda_{10}g}{V_0} - \frac{1}{m_0 V_0^2}\right) - \lambda_{20}\frac{g}{V_0^2} - \frac{\lambda_{20}}{V_0}(2 + \alpha\operatorname{ctg}\varphi_0)\,a_{11}$$

$$a_{52} = -\frac{1}{V_0}[(2\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})\operatorname{cgt}\varphi_0 + 2\lambda_{20}]\,a_{12}$$

$$a'_{53} = -\frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}}\ \frac{(\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})\ (2 + \operatorname{ctg}\varphi_0)\sin\varphi_0}{\sqrt{2}\,\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a''_{53} = \frac{\lambda_{20}}{2a}\left[a_{11} - \frac{\sqrt{2}}{V_0}g(2 + \operatorname{ctg}\varphi_0)\ \frac{\sin\varphi_0}{\lambda_{10}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}\right.$$

$$a'_{54} = -\frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}}(2 + \alpha\operatorname{ctg}\varphi_0)\ \frac{\lambda_{20}\overline{P}_0 - \lambda_{10}\overline{R}_0}{2a\lambda_{10}\alpha m_0\sqrt{2}\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a''_{54} = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \frac{\lambda_{20}\overline{P}_0 - \lambda_{10}\overline{R}_0}{4a^2\alpha m_0\sqrt{2}\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a'_{55} = -\frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \frac{(\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})(2 + \operatorname{ctg}\varphi_0)\sin\varphi_0}{2a\sqrt{2}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a''_{55} = \frac{\sqrt{2}\lambda_{20}\sin\varphi_0}{4a^2\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g$$

$$a_{56} = \frac{\lambda_{20}}{2a} \frac{\lambda_{20}\overline{P}_0 - \lambda_{10}\overline{R}_0}{2a\lambda_{10}\alpha m_0\sqrt{2}\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Pornind de la relația (9) se pot integra ecuațiile (8), prin metode elementare și obține pentru porțiunea activă a traiectoriei, în primă aproximație funcțiile căutate. Pentru aceasta se consideră integrarea în straturile dense ale atmosferei, cu indicele „0" afectîndu-se parametri corespunzători cunoscuți.

$$V^{(1)} = V_0 + a_{11}(z - z_0) + \frac{a_{12}\varrho_0}{b} ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} -$$

$$-(a_{13} + a_{14}\varrho_0)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) + a_{14} b \varrho_0 ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} \cdot \frac{z_0}{z}$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi_0 + a_{21}(z - z_0) + \frac{a_{22}\varrho_0}{b} ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} -$$

$$-(a_{23} + a_{24}\varrho_0)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) + a_{14} b \varrho_0 ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} \frac{z_0}{z}$$

$$m^{(1)} = m_0 + a_{31}(z - z_0) + a_{33} ln \frac{z}{z_0} \qquad (11)$$

$$-[(a_{34} - a_{36} b)\varrho_0 + a_{35}]\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) - \frac{1}{2}\left(a''_{35} + a_{36}\right)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}\right) -$$

$$b\varrho_0(a_{34} - a_{36} b) ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} \cdot \frac{z_0}{z}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + a_{41}(z - z_0) + \frac{a_{42}\varrho_0}{b} ln \frac{1 + bz}{1 + bz_0} + a'_{43} ln \frac{z}{z_0} -$$

$$-[a''_{43}-(a'_{44}+a''_{44}b-a_{46}b^2)\varrho_0]\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}[\varrho_0(a''_{44}-a_{46}b)-a'_{45}]\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right)$$

$$+\frac{1}{3}(a''_{45}-a_{46}\varrho_0)\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z_0^3}\right)-b^2\varrho_0(a''_{44}-a_{46}b)\ln\frac{1+bz}{1+bz_0}\cdot\frac{z_0}{z}\cdot$$

$$\lambda_2^{(1)}=\lambda_{20}+a_{51}(z-z_0)+\frac{a_{52}\varrho_0}{b}\ln\frac{1+bz}{1+bz_0}+a'_{53}\ln\frac{z}{z_0}-$$

$$-[a''_{53}-(a'_{54}+a''_{54}b-a_{56}b^2)\varrho_0]\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)-\frac{1}{2}[\varrho_0(a''_{54}-a_{56}b)-a'_{55}]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right)+\frac{1}{3}(a''_{55}-a_{56}\varrho_0)\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z_0^3}\right)-$$

$$-b^2\varrho_0(a''_{54}-a_{56}b)\ln\frac{1+bz}{1+bz_0}\cdot\frac{z_0}{z}$$

Coeficienții din relațiile (11) pot fi determinați relativ ușor avînd cunoscute valorile inițiale ale parametrilor $V_0,\ldots\lambda_{20}$.

Aceste relații pot fi scrise și mai concentrat. De exemplu, ultima relație :

$$\lambda_2^{(1)}=A_0+A_1z+\frac{A_2}{z}+\frac{A_3}{z^2}+\frac{A_4}{z^3}+A_5\ln z+$$
$$+A_6\ln(1+bz)+A_7\ln\frac{1+bz}{z} \qquad (12)$$

2. *Influența accelerației gravitației asupra parametrilor de bază ai zborului rachetei în plan vertical*

După cum se știe accelerația gravitației variază cu înălțimea, ceea ce poate influența asupra parametrilor traiectoriei. Astfel vom admite pentru g, dependența [7] :

$$g=g_0\frac{R_0^2}{(R_0+z)^2} \qquad (13)$$

unde g_0 este accelerația gravitației la sol iar $R_0=$ 6370 km, raza medie a Pămîntului.

Introducerea corecției datorită influienței variației accelerației gravitației cu altitudinea se impune pentru rachetele geofizice sau meteorologice care evoluează la înălțimi de ordinul sutelor sau miilor de kilometri.

După cum se vede în relațiile (10) nu toți coeficienții conțin accelerația gravitației. Aceasta face ca sistemul de bază (8) să devină :

$$\frac{d\,V_1^{(2)}}{dz} = a_{11}'' + \left(a_{12} + \frac{a_{14}}{z^2}\right)\varrho(z) + \frac{a_{11}'}{(R_0+z)^2} + \frac{a_{13}'}{z^2(R_0+z)^2}$$

$$\frac{d^{(2)}\varphi_1}{dz} = a_{21}'' + \frac{a_{21}}{(R_0+z)^2} + \left(a_{22} + \frac{a_{24}}{z^2}\right)\varphi(z) + \frac{a_{23}'}{z^2(R_0+z)^2}$$

$$\frac{d_{m_0}^{(2)}}{dz} = a_{31} + \frac{a_{33}'}{z(R_0+z)^2} + \frac{a_{33}''}{z} + a_{34}\frac{\varrho(z)}{z^2} + a_{34}\frac{\varrho(z)}{z^2} + \tag{14}$$

$$+ \frac{a_{35}'''}{z^2(R_0+z)^2} + \frac{a_{35}'''}{z^3(R_0+z)^2} + a_{36}\frac{\varrho(z)}{z^3}$$

$$\frac{d\,\lambda_1^{(2)}}{dz} = \frac{a_{41}'}{(R_0+z)^2} + a_{41}'' + a_{42}\varrho(z) + \frac{a_{43}'''}{z(R_0+z)^2} + \frac{a_{43}''}{z^2} +$$

$$+ a_{44}'\frac{\varrho(z)}{z^2} + a_{44}''\frac{\varrho(z)}{z^3} + \frac{a_{45}'''}{z^3(R_0+z)^2} + \frac{a_{45}''}{z^4} + a_{46}\varrho\frac{(z)}{z^4}$$

$$\frac{d\,\lambda_2^{(2)}}{dz} = \frac{a_{51}'}{(R_0+z)^2} + a_{51}'' + a_{52}\varrho(z) + \frac{a_{53}'''}{z(R_0+z)^2} + \frac{a_{53}^{IV}}{z^2}$$

$$+ a_{54}'\frac{\varrho(z)}{z^2} + a_{54}''\frac{\varrho(z)}{z^3} + \frac{a_{55}'''}{z^3(R_0+z)^2} + \frac{a_{55}''}{z^4} + a_{56}\frac{\varrho(z)}{z^4}$$

În ecuațiile diferențiale (14) apar unii coeficienți diferiți de cei din ecuațiile (8), pe care-i redăm mai jos :

$$a_{11}' = \left[\frac{2\cos\varphi_0 + \alpha(1+3\sin^2\varphi_0 + \alpha\sin^2\varphi_0)}{\sqrt{2}\,\lambda_{10}\,V_0\sin\varphi_0\sin\left(\varphi_0\frac{\pi}{4}\right)}\lambda_{20} + \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{2}\,\alpha\sin\left(\varphi_0\frac{\pi}{4}\right)}\right] g_0 R_0^2$$

$$a_{11}'' = \frac{1+\alpha\operatorname{ctg}\varphi_0}{\sqrt{2}\,V_0^2\,\alpha\,m_0\sin\varphi_0\sin\left(\varphi_0-\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{(\lambda_{10}+\alpha\lambda_{20})\sin\varphi_0}{\sqrt{2}\,\alpha\,\lambda_{10}\sin\left(\varphi_0-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a_{13}' = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi_0}{2\,a\,\alpha\,\lambda_{10}\sin\left(\varphi_0-\frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

$$a_{21}' = \left[(\alpha - \operatorname{ctg}\varphi_0)\frac{1}{V_0^2} + \frac{\alpha}{V_0}a_{11}'\right] g_0 R_0^2$$

$$a''_{21} - \frac{(\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20})\sin\varphi_0}{\sqrt{2}\lambda_{10}\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\alpha}{4}a''_{11}$$

$$a'_{23} = \frac{\sqrt{2}\alpha\sin\varphi_0}{2aV_0\lambda_{10}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

$$a_{33} = -\frac{m_0}{2a}\left(a'_{11} + a''_{11}\right) = a'_{33} + a''_{33}$$

$$a'''_{35} = a'_{35} g_0 R_0^2 = -\frac{\sqrt{2} m_0 \sin\varphi_0}{4a^2 V\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

$$a^{IV}_{35} = a''_{35} g_0 R_0^2 = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi_0}{2a\alpha\lambda_{10}\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2 \qquad (15)$$

$$a'_{41} = [(\operatorname{ctg}^2\varphi_0 - \alpha)\lambda_{10} + \alpha\lambda_{20}(1 + 2\alpha\operatorname{ctg}\varphi_0 + \operatorname{ctg}^2\varphi_0)]\frac{g_0 R_0^2}{V_0^2} + a'_{11}$$

$$a''_{41} = \frac{\alpha\operatorname{ctg}\varphi_0}{m_0 V_0^3 \sin^2\varphi_0} + a''_1$$

$$a'''_{43} = \frac{\lambda_{10}}{2aV_0} g_0 R_0^2$$

$$a'''_{45} = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi_0}{2a\lambda_{10}a\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

$$a'_{51} = \frac{1}{V_0^2}(\lambda_{10}\operatorname{ctg}\varphi_0 - \lambda_{20}) - \frac{\lambda_{20}}{V_0}(2 + \alpha\operatorname{ctg}\varphi_0) g_0 R_0^2 + a'_{11}$$

$$a''_{51} = -\frac{\operatorname{ctg}\varphi_0}{m_0 V_0^3} - \frac{\lambda_{20}}{V_0}(2 + \alpha\operatorname{ctg}\varphi_0) a''_{11}$$

$$a'''_{53} = \frac{\lambda_{20}}{2a} a'_{11} \quad \frac{\sqrt{2}}{V_0} \frac{(2 + \alpha\operatorname{ctg}\varphi_0)\sin\varphi_0}{\lambda_{10}\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

$$a^{IV}_{53} = \frac{\lambda_{20}}{2a} a''_{11}$$

$$a'''_{55} = \frac{\sqrt{2}\lambda_{20}\sin\varphi_0}{4a^2\alpha\sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)} g_0 R_0^2$$

Soluțiile ecuațiilor (15), integrînd (8) între o înălțime de referință (z_0) și o înălțime curentă z, sînt :

$$V_1^{(2)} = a_{11}''(z-z_0) + a_{12}\frac{\varrho_0}{b} ln\frac{1+bz}{1+bz_0} + a_{14} b \varrho_0 ln\frac{1+bz}{1+bz_0}$$

$$\frac{z_0}{z} - a_{14}\varrho_0\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)$$

$$+ a_{11}'\left(\frac{1}{R_0+z_0}-\frac{1}{R_0+z}\right) - \frac{a_{13}'}{R_0(R_0+z)}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{R_0}\right) +$$

$$+ \frac{a_{13}'}{R_0(R_0+z_0)}\left(\frac{1}{z_0}+\frac{2}{R_0}\right) + \frac{2a_{13}'}{R_0^3} ln\frac{R_0+z}{R_0+z_0}\,\frac{z_0}{z} + V^{(1)}$$

$$\varphi_1^{(2)} = a_{21}''(z-z_0) + a_{22}\frac{\varrho_0}{b} ln\frac{1+bz}{1+bz_0} + a_{24} b \delta_0 ln\frac{1+bz}{1+bz_0}\cdot\frac{z_0}{z} -$$

$$- a_{24}\varrho_0\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right) - \frac{a_{23}'}{R_0(R_0+z)}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{R_0}\right) + \frac{a_{23}'}{R_0(R_0+z_0)}\left(\frac{1}{z_0}+\frac{2}{R_0}\right)$$

$$+ \frac{2a_{23}'}{R_0^3} ln\frac{R_0+z}{R_0+z_0}\cdot\frac{z_0}{z} + \varphi^{(1)},$$

$$m_1^{(2)} = a_{31}(z-z_0) + \left(\frac{a_{33}'}{R_0} - \frac{2a_{35}''}{R_0^2} + \frac{3a_{35}'''}{R_0^3}\right)\frac{1}{R_0+z} -$$

$$- \frac{1}{R_0}\left(a_{35}''' - \frac{3a_{35}^{IV}}{2R_0}\right)\frac{1}{z(R_0+z)} +$$

$$+ \frac{1}{R_0}\left(a_{35}''' - \frac{3a_{35}^{IV}}{2R_0}\right)\frac{1}{z_0(R_0+z_0)} - \frac{a_{35}^{IV}}{2R_0^2}\left[\frac{1}{z^2(R_0+z)} - \frac{1}{z_0^2(R_0+z_0)}\right] +$$

$$+ (a_{34}+a_{36}b^2)\varrho_0 ln\frac{1+bz}{1+pz_0}\cdot\frac{z_0}{z} - \frac{1}{R_0^2}\left(a_{33}' - \frac{2}{R_0}a_{35}''' +\right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{3}{R_0^2}a_{35}^{IV}\right) ln\frac{R_0+z}{R_0+z_0}\cdot\frac{z_0}{z} + a_{33}'' ln\frac{z}{z_0} + \varrho_0(a_{34}+a_{36}b^2)\cdot$$

$$\left(\frac{1}{z_0}-\frac{1}{z}\right) + a_{36}\varrho_0\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z_0^3}-\frac{1}{z^3}\right) - \frac{b}{2}\left(\frac{1}{z_0^2}-\frac{1}{z^2}\right)\right] + m^{(1)}$$

$$\lambda_1^{(2)} = a_{41}''(z-z_0) - \left(a_{41}' - \frac{a_{43}'''}{R_0} - \frac{3a_{45}'''}{R_0^3}\right)\frac{1}{R_0+z} +$$

$$+ \left(a_{41}' - \frac{a_{43}'''}{R_0} - \frac{3a_{45}'''}{R_0^3}\right)\frac{1}{R_0+z_0} + \frac{a_{42}\varrho_0}{b} ln\frac{1+bz}{1+bz_0} +$$

$$+b\varrho_0(a'_{44}-b\,a''_{44}+b^2a_{46})\,ln\,\frac{1+b\,z}{1+b\,z_0}\,\frac{z}{z_0}-\frac{1}{R_0^2}\left(a'''_{43}+3\,\frac{a''_{45}}{R_0^2}\right)\cdot$$

$$ln\,\frac{R_0+z}{R_0+z_0}\cdot\frac{z_0}{z}+\left[a''_{43}+\frac{3}{2}\,\frac{a''_{45}}{R_0^2}+\varrho_0(a''_{44}\,b-a'_{44}-a_{46}\,b^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)-\frac{1}{2}\left(a'''_{44}\varrho_0+\frac{a'''_{45}}{R_0}-a_{46}\varrho_0\,b\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{3}(a'''_{45}-a_{46}\varrho_0)\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z_0^3}\right)+\lambda_1^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(2)}=a''_{51}(z-z_0)-\left(a'_{51}-\frac{a'''_{53}}{R_0}-\frac{3\,a'''_{55}}{R_0^3}\right)\frac{1}{R_0+z}+$$

$$+\left(a'_{51}-\frac{a'''_{53}}{R_0}+\frac{3}{R_0^3}\,a'''_{55}\right)\frac{1}{R_0+z_0}+\frac{a_{52}\varrho_0}{b}\,ln\,\frac{1+b\,z}{1+b\,z_0}+$$

$$+b\varrho_0(a'_{54}-b\,a''_{54}+b^2a_{56})\,ln\,\frac{1+b\,z}{1+b\,z_0}\,\frac{z_0}{z}-\frac{1}{R_0^2}\left(a'''_{53}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{R_0^2}\,a'''_{55}\right)ln\,\frac{R_0+z}{R_0+z_0}\,\frac{z_0}{z}+\left[a''_{53}+\frac{3}{2}\,\frac{a''_{55}}{R_0^2}+\right.$$

$$\left.+\varrho_0(a''_{54}\,b\,a'_{54}-a_{56}\,b^2)\right]\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)-\frac{1}{2}\left(a''_{54}\varrho_0+\frac{a'''_{55}}{R_0}-a_{56}\varrho_0\,b\right)$$

$$\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right)+\frac{1}{3}(a''_{55}-a_{56}\varrho_0)\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z_0^3}\right)+\lambda_2^{(1)}$$

Soluțiile ecuațiilor (15) mai pot fi scrise, dacă se separă partea constantă, sub forma :

$$\vdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_1^{(2)}=M_0+M_1z+\frac{M_2}{z}+\frac{M_3}{z^2}+\frac{M_4}{z^3}+\frac{M_5}{R_0+z}$$

$$+\frac{M_6}{z\,(R_0+z)}+\frac{M_7}{z^2\,(R_0+z)}+M_8lnz+M_9ln\,\frac{1+bz}{z}+M_{10}\,ln\,\frac{R_0+z}{z}\quad(17)$$

$$\vdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_2^{(2)}=P_0+P_1z+\frac{P_2}{z}+\frac{P_3}{z^2}+\frac{P_4}{z^3}+\frac{P_5}{R_0+z}+\frac{P_6}{z\,(R_0+z)}+$$

$$+\frac{P_7}{z^2\,(R_0+z)}+P_8\,ln\,(1+b\,z)+P_9\,ln\,\frac{1+bz}{z}+P_{10}\,ln\,\frac{R_0+z}{z}.$$

Calculul parametrilor $V_1^{(2)} \ldots \lambda_2^{(2)}$ cu ajutorul relațiilor (16) sau (17) este pasibil de simplificări întrucît termenii care conțin $R_0^2, R_2^{(z)}$ la numitor, pot fi neglijați. De asemenea pentru zborul în afara atmosferei dense putem neglija termenii proveniți din relația (3), care se referă la portanța și rezistența la înaintare, întrucît aceștia au valori foarte mici în comparație cu forța de tracțiune sau greutate instantanee a rachetei.

În acest fel, pentru rachete de anumiți parametri pot fi determinate legile de variație în înălțime a vitezei, unghiului de poziție al rachetei sau consumului de combustibil, în așa fel încît ridicarea pînă la o înălțime dată să se facă într-un timp minim.

Catedra de aeronave și aparate de bord
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Marinescu, Al., Guță, C.* — Urcarea în timp minim a rachetelor cu mai multe trepte, Buletinul I.P.B. Tom. XXVII, Nr. 1, 1965.

2. *Țipei, N.* — Asupra mișcării rachetei în mediul rezistent, I. Ascensiunea rachetei, SCMA, Tom. XII, Nr. 3, 1961.

3. *Marinescu, Al., Guță, C.* — Ecuațiile generale de mișcare ale aparatelor cosmice în procesul de apropiere și întîlnire pe orbite, Buletinul IPB, Tom. XXX, Nr. 1, 1968.

4. *Guță, C., Marinescu, Al.* — Calculul și construcția rachetelor, Editura Didactică și Pedagogică, 1967.

5. *Ponomarev, V. M.* — Teoria upravlenia dvijeniem cosmiceschih apparatov, Editura Nauka, Moscova, 1965.

6. *Leitmann, G.* — Optimization Techniques, Academic Press, New-York—London, 1962.

7. *Niță, M. M., Andreescu, D. St.* — Zborul rachetei, Editura militară, 1964.

8. *Etkin, B.* — Dynamics of flight — Stability and control, John Wiley Editor, New-York—London, 1963.

9. *Belman, E. R., Dreyfus, E. S.* — Programarea dinamică aplicată, Traducere din limba engleză, Editura Tehnică, 1967.

10. *Davis, L. Jr, Follin, J. W. Jr, Blitzer, L.* — The Exterior Ballistics of Rockets, New-York, London, 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. : 539.3/.4:624.023.9:624.072.2:534

IZOLAȚII ANTIVIBRATOARE DIN STRATURI VISCOELASTICE *

MIRCEA RADEȘ

1. Introducere

Folosirea plăcilor și straturilor continue din materiale cu proprietăți viscoelastice oferă de multe ori soluții optime în izolarea vibrațiilor, datorită caracteristicilor de amortizare ridicate și gamei largi de dimensiuni disponibile. Ca domenii de utilizare se pot enumera : ambalarea utilajelor în vederea transportului, fixarea aparaturii de măsură și control de structuri cu solicitări dinamice importante, amplasarea echipamentelor ușoare în apropierea unor surse de vibrații etc.

Cînd montajul antivibrator conține un element intermediar de repartiție a presiunii sau cînd structura adiacentă este la rîndul ei deformabilă, comportarea mecanică a acestor straturi poate fi descrisă de un model de fundație viscoelastică Winkler. Pentru calculul răspunsului dinamic al grinzilor cu rezemare viscoelastică continuă, în lucrare se prezintă o metodă bazată pe introducerea amortizării sub formă de module complexe.

2. Coeficientul de tasare complex

În izolarea pasivă a vibrațiilor, izolatorul (fig. 1) este elementul deformabil interpus între infrastructura care transmite perturbațiile și echipamentul al cărui nivel de vibrații trebuie limitat.

Performanțele izolatorului se evaluează printr-una din caracteristicile de răspuns ale sistemului echipament-izolator, la vibrații sinusoidale staționare, de exemplu — transmisibilitatea absolută (raportul între amplitudinea vibrației echipamentului și cea a vibrației infrastructurii).

Se va considera infrastructura rigidă (de ex. o placă de repartiție) și elemente de izolare sub formă de straturi deformabile din cauciuc sau materiale viscoelastice (în domeniul amplitudinilor mici).

* Manuscris predat la redacție la 25 septembrie 1968.

Dacă izolatorul este atașat la o structură relativ rigidă a echipamentului, sistemul din fig. 1 poate fi schematizat ca în fig. 2 și anume,

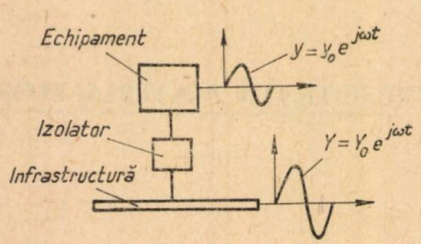


Fig. 1.

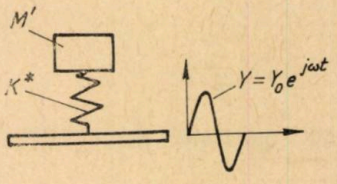


Fig. 2.

echipamentul — prin masa rigidă concentrată M', izolatorul — printr-un element deformabil discret, caracterizat de o constantă „elastică" complexă [1]

$$K^* = K(1 + j\delta) \tag{1}$$

Dacă izolatorul este atașat la o structură nerigidă a echipamentului, aceasta poate vibra cu amplitudini relativ mari la frecvențe de excitație care coincid cu frecvențele sale proprii și eficiența izolatorului scade mult. Evaluarea cantitativă a efectului deformabilității structurii echipamentului se poate face schematizînd sistemul din fig. 1 printr-unul cu parametri distribuiți. Astfel, ne vom referi la sisteme la care în locul masei rigide M' se poate considera o grindă finită, de secțiune constantă, avînd atașată la mijloc o masă concentrată M (fig. 3).

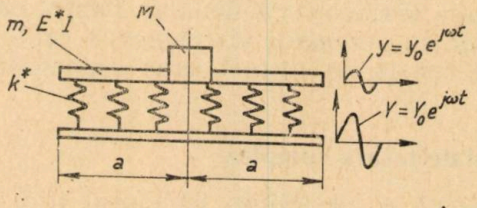


Fig. 3.

Izolatorul, realizat tot ca strat deformabil amortizant (de ex.: carpet cu caneluri sau cu proeminențe tronconice [2]), va fi schematizat acum printr-un model de fundație viscoelastică liniară Winkler [3], caracterizat printr-un *coeficient de tasare complex*

$$k^* = k(1 + j\delta) \tag{2}$$

unde k este un *coeficient de tasare dinamic*, caracterizînd răspunsul elastic al stratului deformabil, iar δ este *factorul de amortizare* al izolatorului, fiind o măsură a proprietăților disipative ale acestuia.

În general, k și δ sînt funcții de frecvența perturbatoare (și temperatură), însă la multe materiale de izolare contra vibrațiilor și într-un domeniu larg de frecvențe $\delta = \text{const.}$, adică există o așa-numită amortizare „de tip solid" [4]. Determinarea experimentală a dependențelor $k = k(\omega)$ și $\delta = \delta(\omega)$ face posibil calcul răspunsului la frecvență al sistemelor cu astfel de izolatori, *fără vreo referire la un anumit model reologic*. Se va calcula în continuare răspunsul staționar al sistemului din figura 3.

3. Răspunsul la frecvență al grinzii pe fundație viscoelastică

Dacă infrastructura are o mișcare

$$Y = Y_0 e^{j\omega t} \tag{3}$$

unde ω este pulsația excitatoare, t — timpul și $j = \sqrt{-1}$, ecuația de mișcare a grinzii este

$$E^* I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^* (y - Y) = 0 \tag{4}$$

în care y este săgeata grinzii în secțiunea de abscisă x;

$E^* = E(1 + j\eta)$ — modulul complex al materialului grinzii;

I — momentul de inerție al secțiunii transversale a grinzii;

m — masa pe unitatea de lungime a grinzii.

S-a considerat o grindă în teoria Bernoulli-Euler completată de Snowdon [4], izolatorul schematizat printr-un model de fundație viscoelastică liniară Winkler și condiții de contact bilateral între grindă și fundație.

Cu o soluție staționară

$$y(x, t) = v(x) e^{j\omega t} \tag{5}$$

ecuația (4) devine

$$\frac{d^4 v}{d x^4} - \mu^4 v = \frac{k^* Y_0}{E^* I} \tag{6}$$

unde

$$\mu^4 = \frac{m \omega^2 - k^*}{E^* I} \tag{7}$$

Dacă se notează

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

$$n = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{9}$$

$$\varkappa = \frac{k a^4}{E I} \tag{10}$$

atunci

$$\bar{\mu}^4 = (\mu a)^4 = \varkappa \frac{n^2 - 1 - j\delta}{1 + j\eta} \tag{7,a}$$

Cu substituția

$$\xi = \mu x \tag{11}$$

ecuația (6) se scrie

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} - v = H^* \tag{6,a}$$

unde

$$H^* = \frac{k^* Y_0}{\mu^4 E^* I} = Y_0 \frac{1 + j\delta}{n^2 - 1 - j\delta} \tag{12}$$

Soluția generală a ecuației (6, a) are forma

$$v(\xi) = A U_1(\xi) + B U_2(\xi) + C U_3(\xi) + H^* [U_1(\xi) - 1] \tag{13}$$

unde $A,...,D$ sînt constante de integrare, iar $U_1(\xi),...,U_4(\xi)$ sînt funcțiile Rayleigh

$$U_1(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi + \cos\xi) \qquad U_3(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi - \cos\xi)$$

$$U_2(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\xi + \sin\xi) \qquad U_4(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\xi - \sin\xi) \tag{14}$$

Dacă relația (7, a) se scrie

$$\bar{\mu}^4 = \alpha - j\beta \tag{7,b}$$

în care

$$\alpha = \varkappa \frac{n^2 - 1 - \delta\eta}{1 + \eta^2}$$

$$\beta = \varkappa \frac{(n^2 - 1)\eta + \delta}{1 + \eta^2} \tag{15}$$

atunci se poate nota

$$\bar{\mu} = r + js \tag{16}$$

în care

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \alpha)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \alpha)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

unde

$$\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

Pentru grinda cu capete libere, la $x=0$ ($\xi=0$), momentul încovoietor și forța tăietoare sînt nule, $(v'')_{\xi=0}=0$ și $(v''')_{\xi=0}=0$ (semnul „prim" indică derivare în raport cu x), de unde rezultă $C=D=0$ și relația (13) devine

$$v(\xi) = AU_1(\xi) + BU_2(\xi) + H^*[U_1(\xi) - 1] \tag{19}$$

La $x=a$ ($\xi=\bar{\mu}$), datorită simetriei, panta liniei elastice este nulă

$$(v')_{\xi=\bar{\mu}} = 0 \tag{20}$$

iar saltul forței tăietoare este egal cu $M\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{\xi=\bar{\mu}}$, astfel că

$$\mu^3 E^* I (v''')_{\xi=\bar{\mu}} = -\frac{M}{2}\omega^2 (v)_{\xi=\bar{\mu}} \tag{21}$$

Aplicînd (19) în (20) și (21), rezultă un sistem de două ecuații din care se calculează A și B, astfel că în final expresia săgeții este

$$v(\xi) = \frac{H^*}{\frac{1}{L^*}V_2(\bar{\mu}) + \frac{1}{2}[V_1(\bar{\mu}) + 1]}[U_1(\bar{\mu})U_1(\xi) - U_4(\bar{\mu})U_2(\xi)] - H^* \tag{22}$$

unde

$$L^* = \frac{n^2 \lambda \bar{\mu}}{n^2 - 1 - j\delta} \tag{23}$$

și în care

$$\lambda = \frac{M}{2ma} \tag{24}$$

iar $V_1(\xi),\ldots,V_4(\xi)$ sînt funcții Krîlov [5] de argument complex

$$\begin{aligned} V_1(\xi) &= \operatorname{ch}\xi \cos\xi \qquad V_3(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi \sin\xi \\ V_2(\xi) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi \sin\xi + \operatorname{sh}\xi \cos\xi) \\ V_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi \sin\xi - \operatorname{sh}\xi \cos\xi) \end{aligned} \tag{25}$$

Pentru calculul eforturilor unitare din grindă, valoarea momentului încovoietor se calculează din relația

$$M(\xi) = \frac{H^* E^* I \mu^2}{\frac{1}{L^*}V_2(\bar{\mu}) + \frac{1}{2}[V_1(\bar{\mu}) + 1]}[U_1(\bar{\mu})U_3(\xi) - U_4(\bar{\mu})U_4(\xi)] \tag{26}$$

Înlocuind $\xi=\bar{\mu}$ în (22), rezultă săgeata la mijlocul grinzii, în punctul de atașare a masei concentrate M:

$$v(\bar{\mu}) = v_0 = -\frac{H^*}{1+L^*\dfrac{V_1(\bar{\mu})+1}{2\,V_2(\bar{\mu})}} \tag{27}$$

4. **Transmisibilitatea sistemului**

Transmisibilitatea absolută — raportul dintre amplitudinea vibrației masei M și amplitudinea vibrației infrastructurii — este

$$T^* = \frac{v_0}{Y_0} = \frac{1}{1-\dfrac{n^2}{1+j\delta}\left\{1+\lambda\dfrac{\bar{\mu}\,[V_1(\bar{\mu})+1]}{2\,V_2(\bar{\mu})}\right\}} \tag{28}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} V_1(\bar{\mu}) = V_1(r+js) = V_1(r)\,V_1(s) + 4\,V_3(r)\,V_3(s) + j\,[2\,V_2(r)\,V_4(s) - \\ -2\,V_4(r)\,V_2(s)] \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} V_2(\bar{\mu}) = V_2(r+js) = V_2(r)\,V_1(s) + 4\,V_4(r)\,V_3(s) + \\ +j\,[4V_3(r)\,V_4(s) + V_1(r)\,V_2(s)] \end{aligned}$$

expresia (28) se poate aduce la forma

$$T^* = \frac{M+jN}{P+jR} \tag{30}$$

în care M, N, P, R sînt mărimi reale date de relațiile

$$\begin{aligned} M &= W_3 - \delta\,W_4 \\ N &= W_4 + \delta\,W_3 \\ P &= M - n^2\left[W_3 + \lambda\left(\frac{r}{2}W_1 - s\,W_2\right)\right] \\ R &= N - n^2\left[W_4 + \lambda\left(\frac{s}{2}W_1 + r\,W_2\right)\right] \end{aligned} \tag{13}$$

iar

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1(r)\,V_1(s) + 4\,V_3(r)\,V_3(s) + 1 \\ W_2 &= V_2(r)\,V_4(s) - V_4(r)\,V_2(s) \\ W_3 &= V_2(r)\,V_1(s) + 4\,V_4(r)\,V_3(s) \\ W_4 &= 4\,V_3(r)\,V_4(s) + V_1(r)\,V_2(s) \end{aligned} \tag{32}$$

Funcțiile V_i și U_i sînt tabelate în lucrarea [5].

Notînd

$$T^* = |T^*|\,e^{j\theta} \tag{33}$$

rezultă

$$|T^*| = \sqrt{\frac{M^2 + N^2}{P^2 + R^2}} \tag{34}$$

și

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{NP - MR}{MP - NR} \tag{35}$$

Deobicei, în izolarea vibrațiilor interesează numai mărimea răspunsului (34). În fig. 4 (curba B) s-a reprezentat variația lui $|T^*|$ funcție de n, în cazul particular $\varkappa = 1$; $\lambda = 2$; $\delta = 0{,}5$; $\eta = 0{,}005$.

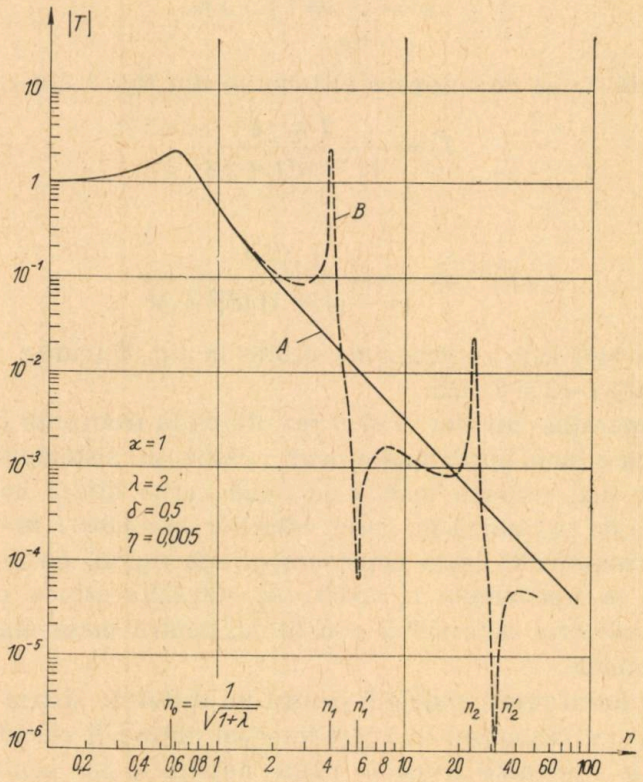


Fig. 4.

Dacă $M = 0$, $\lambda = 0$ și din (28) rezultă

$$T^*_{\lambda=0} = \frac{1 + j\delta}{(1 - n^2) + j\delta} \tag{36}$$

adică transmisibilitatea complexă în cazul unui sistem cu un grad de libertate și parametri concentrați. Deci, în lipsa masei M, grinda vibrează fără să se deformeze.

Dacă se consideră grinda nedeformabilă, frecvența proprie a sistemului fără amortizare va fi

$$\overline{\omega_0} = \sqrt{\frac{K}{M'}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{2a}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{37}$$

Atunci

$$\bar{n} = \frac{\omega}{\overline{\omega_0}} = \sqrt{1+\lambda}\, n \tag{38}$$

iar transmisibilitatea complexă a sistemului din fig. 2 are expresia

$$T_0^* = \frac{1 + j\delta}{(1 - \bar{n}^2) + j\delta} \tag{39}$$

și

$$|T_0^*|^2 = \frac{1 + \delta^2}{[1 - (1+\lambda)\, n^2]^2 + \delta^2} \tag{40}$$

Expresia (40) este reprezentată grafic în fig. 4 (curba A) în funcție de n, pentru $\lambda = 2$ și $\delta = 0{,}5$.

Din comparația curbelor A și B rezultă că la frecvențe joase ($n \leqslant 1$) relația (40) dă o bună aproximație pentru răspunsul sistemului din fig. 3. La frecvențe mai ridicate însă, cele două curbe diferă net. Curba B prezintă zone de rezonanță în jurul valorilor $n_1 = 4{,}048$; $n_2 = 22{,}8$;..., pe care teoria simplificată (care consideră grinda rigidă) nu le poate descrie. La fel, la frecvențele $n_1' = 5{,}68$; $n_2' = 30{,}225$; grinda elastică împreună cu izolatorul deformabil constituie, pentru masa atașată M, un amortizor dinamic.

Zona de lucru recomandabilă pentru un astfel de sistem este în domeniul $n_0 < n < n_1$, răspunsul în acest interval putînd fi calculat din (28). În general, la frecvențe $n < n_0$ se poate neglija η, iar pentru $n > n_1$ se poate neglija δ. Un material izolant corespunzător asigură o frecvență de rezonanță n_0 cît mai scăzută, o transmisibilitate la rezonanță cît mai mică și o scădere rapidă a transmisibilității, la creșterea frecvenței peste cea de rezonanță. Acestea sînt criteriile cu ajutorul cărora, pe baza curbelor de răspuns ridicate pentru diferite feluri de izolatori, se alege materialul de izolație cel mai adecvat.

5. Concluzii

Prin introducerea conceptului de coeficient de tasare complex (2) — care include atît proprietățile elastice (partea reală) cît și cele disipative (partea imaginară) ale unui strat deformabil continuu — este posibilă dezvoltarea unei metode simple pentru calculul eficienței unui astfel de izolator antivibrator, montat sub o structură elastică.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Myklestand, N. O.*, The Concept of Complex Damping, Journal of Applied Mechanics, vol. 19, nr. 3, sept. 1952.

2. *Buzdugan, Gh.*, Dinamica fundațiilor de mașini, Editura Acad. R.S.R., București, 1968, p. 147.

3. *Freudenthal, A., Lorsch, H.*, The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation, Proc. ASCE, vol. 83, nr. EM1, p. 1158, 1957.

4. *Snowdon, J. C.*, Representation of the Mechanical Damping Possessed by Rubberlike Materials and Structures, Journal of Acoust. Soc. Amer., vol. 35, nr. 6, p. 821, 1963.

5. *Ананьев И. В., Тимофеев П. Г.*, Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование, Издат. Машиностроение, Москва, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C.Z. : 621.432.3/.4 621.43.04:621-232

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE ALE MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE LA MOTORUL ÎN LINIE CU APRINDERI NEUNIFORM REPARTIZATE ȘI CU DISTANȚE EGALE ÎNTRE CILINDRI CONSECUTIVI *

GEORGE BĂRĂNESCU

La motoarele în linie în doi timpi al căror număr de cilindri este o putere de doi, precum și la motoarele cu număr impar de cilindri echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție este nesatisfăcător dacă aprinderile sînt uniform repartizate și distanțele dintre cilindri consecutivi egale.

O posibilitate de îmbunătățire a echilibrajului momentelor externe ale forțelor de inerție o constituie repartizarea neuniformă a aprinderilor. În acest caz, pentru asigurarea unui echilibraj acceptabil al forțelor de inerție, este necesar să existe anumite simetrii în distribuirea manivelelor. Manivelele trebuie aranjate în două sau mai multe serii, fiecare serie avînd manivelele uniform distribuite în jurul axei de rotație a arborelui cotit ; aceasta înseamnă că arborele cotit al motorului considerat este realizat din mai mulți arbori cotiți parțiali pentru motoare cu aprinderi uniform repartizate ; fiecare din acești arbori cotiți echilibrează o parte din termenii forțelor de inerție F_t ale maselor cu mișcare de translație și în consecință motorul va fi dezechilibrat numai de termenii ce subzistă în fiecare serie. Echilibrarea momentului extern al termenilor de un anumit ordin ai forțelor F_t se poate realiza prin decalarea corespunzătoare a seriilor de manivele ; operația nu introduce dezechilibre noi, deoarece echilibrarea forțelor de inerție din fiecare serie nu este condiționată de poziția manivelelor din celelalte serii.

Pentru obținerea unui echilibraj satisfăcător al forțelor de inerție numărul manivelelor din fiecare serie trebuie să fie mai mare decît doi, deoarece la o serie de două manivele rămîn neechilibrați toți termenii de ordin par, deci și termenul de ordinul doi, care are o amplitudine însemnată. Cu deosebire avantajos este cazul seriilor cu număr impar de manivele, întrucît prin axarea mecanismelor bielă-manivelă sînt eli-

* Manuscris predat la redacție la 10 ianuarie 1969.

minați termenii de ordin impar, începînd cu cei de ordinul trei, și ca urmare la fiecare serie rămîn neechilibrați numai termenii al căror ordin este un multiplu par al numărului de manivele al seriei.

Dacă în fiecare serie sînt echilibrați primii trei-patru termeni, echilibrajul forțelor de inerție nu este practic influențat de decalajele dintre seriile de manivele, deoarece amplitudinile termenilor de ordin superior sînt foarte mici.

Ca exemplu se consideră un motor cu nouă cilindri în linie, ale cărui manivele au fost aranjate în trei serii de cîte trei manivele uniform distribuite în jurul axei de rotație a arborelui cotit. Dacă motorul este prevăzut cu mecanisme bielă-manivelă axate, în fiecare serie rămîn neechilibrați numai termenii forțelor F_t al căror ordin este multiplu de șase. Pentru întregul motor fiecare din acești termeni va da o rezultantă a cărei mărime depinde de unghiurile cu care sînt decalate între ele cele trei serii de manivele ; datorită valorilor extrem de mici ale termenilor multiplu de șase, toate soluțiile ce diferă între ele numai prin valorile acestor unghiuri sînt practic echivalente din punctul de vedere al echilibrajului forțelor de inerție.

Unghiurile la care trebuie calate seriile de manivele în vederea echilibrării momentului extern al termenilor de un anumit ordin ai forțelor F_t depind de numărul de serii de manivele și de valoarea momentului extern produs în fiecare serie de termenul respectiv. La rîndul lor momentele seriilor de manivele sînt determinate de repartiția manivelelor în lungul axei de rotație a arborelui cotit. Deoarece numărul de repartiții posibile este foarte mare chiar la motoarele cu număr de cilindri relativ mic, este necesar să se precizeze repartițiile care principial nu pot fi luate în considerare.

Cînd manivelele sînt aranjate în două serii vin în discuție numai repartițiile manivelelor pentru care momentele produse în cele două serii de către termenul considerat au aceeași valoare, deoarece două momente se pot echilibra numai dacă sînt egale (opoziția momentelor fiind realizată prin decalarea corespunzătoare a celor două serii de manivele). Întrucît distanțele dintre cilindri consecutivi sînt presupuse egale, se obțin momente egale dacă cele două serii au același număr de manivele și formează doi arbori cotiți identici din punct de vedere dinamic ; aranjarea manivelelor în două serii este deci posibilă numai la motoarele cu număr par de cilindri.

Dacă manivelele au fost aranjate într-un număr de serii mai mare decît doi, pot fi luate în considerare numai repartițiile pentru care este posibilă construirea unui poligon închis cu vectorii care reprezintă momentele produse în fiecare serie de termenii considerați, deci cînd cel mai mare dintre momente este mai mic decît suma celorlalte.

Din observațiile precedente rezultă că îmbunătățirea echilibrajului momentelor externe ale forțelor de inerție prin repartizarea neuniformă a aprinderilor se poate obține numai la anumite motoare. Fiindcă numărul minim de serii de manivele este doi și numărul minim de manivele dintr-o serie este trei, motorul trebuie să aibă cel puțin șase cilindri. Dacă numărul de cilindri este par metoda se ia în considerare

începînd cu motorul în doi timpi cu opt cilindri (primul număr de putere de doi mai mare decît șase). Dacă numărul de cilindri este impar metoda poate fi aplicată motoarelor în patru sau doi timpi cu cel puțin nouă cilindri, întrucît manivelele trebuie aranjate în cel puțin trei serii, aranjarea manivelelor în două serii fiind posibilă numai la motoarele cu număr par de cilindri.

Metoda analizată nu intră în discuție la motoarele în linie în patru timpi cu număr par de cilindri, deoarece, la aceste motoare, se pot echilibra momentele externe ale tuturor termenilor fără a renunța la repartiția uniformă a aprinderilor. Pentru toate celelalte motoare, dacă aprinderile sînt uniform repartizate, manivelele sînt și ele uniform repartizate în jurul axei de rotație a arborelui cotit și în consecință unghiul dintre manivele este un multiplu de $\frac{2\pi}{i}$, unde i reprezintă numărul de cilindri ai motorului; în vederea micșorării abaterilor de la repartiția uniformă a aprinderilor, această condiție de calaj al manivelelor trebuie păstrată pentru fiecare serie.

Se presupune că în steaua manivelelor există μ_1, μ_2, μ_3 ... serii de manivele, fiecare comportînd respectiv ν_1, ν_2, ν_3 ... manivele uniform distribuite în jurul axei de rotație a arborelui cotit; aceste numere trebuie să îndeplinească egalitatea evidentă

$$\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 + \ldots = i. \tag{1}$$

Deoarece în fiecare serie unghiul dintre două manivele este un multiplu al unghiului $\frac{2\pi}{i}$, se pot scrie relațiile

$$\frac{2\pi}{\nu_1} = k_1 \frac{2\pi}{i},$$

$$\frac{2\pi}{\nu_2} = k_2 \frac{2\pi}{i},$$

$$\frac{2\pi}{\nu_3} = k_3 \frac{2\pi}{i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde k_1, k_2, k_3.... sînt numere întregi. Din aceste relații se deduce

$$\nu_1 = \frac{i}{k_1}, \quad \nu_2 = \frac{i}{k_2}, \quad \nu_3 = \frac{i}{k_3}, \ldots,$$

care arată că numerele ν_1, ν_2, ν_3 ... sînt divizori ai numărului de cilindri.

Dacă i se divide cu aceste numere, se divide și cu produsul lor, adică

$$i = k \nu_1 \nu_2 \nu_3 \ldots \quad (k = 1, 2, 3 \ldots). \tag{2}$$

Din (1) și (2) se obține

$$\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 + \ldots = k \nu_1 \nu_2 \nu_3 \ldots . \qquad (3)$$

Potrivit formulei (2) numărul de cilindri crește o dată cu numărul de tipuri de serii de manivele. Cel mai mic număr de cilindri care permite organizarea manivelelor în serii cu număr diferit de manivele se obține cînd numărul seriilor este minim, adică 2 și cînd numerele ν_1 și ν_2 au valorile cele mai mici posibile, adică 3 și 4. Relația (3) devine în acest caz

$$3\mu_1 + 4\mu_2 = 12k .$$

Se observă că cele mai mici numere întregi μ_1, μ_2 și k, ce satisfac această egalitate sînt $\mu_1 = 4, \mu_2 = 3$ și $k = 2$. Din (2) rezultă numărul minim de cilindri pentru care este posibilă organizarea manivelelor în serii cu număr diferit de manivele și anume $i = 24$.

Astfel, motoarele la care poate fi luată în considerare îmbunătățirea echilibrajului momentelor forțelor de inerție prin repartizarea neuniformă a aprinderilor trebuie să admită divizori mai mari decît 2. Pentru $i < 24$ toate seriile de manivele nu pot avea decît același număr de manivele.

Dintre toate soluțiile posibile pentru un motor dat, cea mai avantajoasă este în general soluția care prezintă abateri minime de la repartiția uniformă a aprinderilor. Se pot prefera și soluțiile care duc la abateri mai mari de la repartiția uniformă a aprinderilor, însă care asigură un echilibraj mai bun al momentelor forțelor de inerție. De pildă, la motorul în doi timpi, al cărui număr de cilindri este o putere de doi, trebuie preferată soluția la care repartiția manivelelor pe serii asigură echilibrarea pe serii a momentelor externe ale termenilor de ordin par, chiar dacă această soluție reclamă abateri mai mari de la repartiția uniformă a aprinderilor pentru echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi, deoarece soluția conduce la un foarte bun echilibraj al momentelor externe ale forțelor de inerție.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

C.Z. : 621.431:662.61:621.43-4:662.613.5

CALCULUL ENERGIEI INTERNE A GAZELOR DIN CILINDRUL MOTORULUI CU ARDERE INTERNĂ, CU CONSIDERAREA NEOMOGENITĂȚII TERMICE A AMESTECULUI ÎN PERIOADA ARDERII *

B. GRÜNWALD, N. APOSTOLESCU

1. Obiectul studiului

Determinarea legii de ardere pentru un motor cu ardere internă dat, constituie o operație laborioasă și adeseori nesigură din cauza ipotezelor simplificatorii care se fac. Una dintre ipotezele fundamentale care se admit neglijează gradienții de temperatură din camera de ardere, considerînd amestecul omogen din punct de vedere termic. În consecință, energiile interne ale amestecului de gaze se determină cu erori relativ mari, mai ales în etapele mediane ale procesului de ardere.

În lucrare, autorii urmăresc să stabilească o metodă de calcul a energiilor interne, ținînd seama de gradienții de temperatură din amestecul de gaze în timpul arderii. Avînd în vedere volumul impresionant de calcule care trebuie efectuate, autorii au urmărit să exprime energia internă într-o formă convenabilă pentru programarea pe calculatoare numerice. În acest caz exigențele față de precizia de calcul pot fi sporite și, ca urmare, autorii și-au propus să apeleze la ipoteze noi care limitează eroarea în determinarea energiei interne.

2. Un model fizic al amestecului de gaze neomogen termic

În timpul arderii, în cilindrul motorului este prezent un amestec de gaze, format din produse de ardere și amestec inițial, în proporții variabile. Ca urmare, energia internă U a amestecului de gaze se exprimă ca suma

$$U = U_{ga} + U_{ai} \tag{1}$$

unde U_{ga} este energia internă a gazelor de ardere, iar U_{ai} — energia internă a amestecului inițial.

* Manuscris predat la redacție la 21 decembrie 1968.

În general, energia internă a amestecului din relația (1) se calculează pentru temperatura T_{es}, precizată de ecuația de stare

$$T_{es} = \frac{pV}{\nu_{am} R} \cdot \tag{2}$$

Soluția este convenabilă, întrucît presiunea p, volumul V și numărul de moli de amestec de gaze ν_{am} sînt determinate pe cale experimentală. Ca urmare, ecuația (1) devine

$$(U)_{Tes} = (U_{ga})_{Tes} + (U_{at})_{Tes}, \tag{3}$$

unde evident cele două componente ale energiei interne se calculează pentru temperatura T_{es}.

Una dintre particularitățile esențiale ale amestecului de gaze în timpul arderii o constituie neomogenitatea lui termică. Ca urmare, se pune întrebarea : ce reprezintă din punct de vedere fizic temperatura determinată din ecuația de stare ?

Plecînd de la proprietatea fundamentală a flăcării turbulente, se poate obține o imagine mai reală a temperaturii gazelor din camera de ardere. Astfel, datorită amestecării la diferite scări de turbulență, la motorul cu aprindere prin scînteie în spatele frontului de aprindere, precum și la motorul cu aprindere prin comprimare în toată camera de ardere, se găsesc elemente de volum de amestec inițial format din aer, combustibil și gaze reziduale.

Dacă temperatura acestor elemente de volum ar fi egală cu temperatura gazelor de ardere, combustibilul nu și-ar putea păstra individualitatea. Experiența arată însă că în flacăra turbulentă se găsește combustibil. Ca urmare, trebuie admis că temperatura elementelor de volum de amestec inițial are valori cu mult mai mici decît cea a elementelor de volum de gaze arse. În motorul cu aprindere prin comprimare neomogenitatea termică este cu atît mai accentuată, cu cît mișcările gazelor sînt de mai mare intensitate, iar concentrațiile locale de combustibil au variații mult mai însemnate.

În acest sens, se elaborează următoarea imagine a amestecului din camera de ardere. Se consideră că la un moment dat, amestecul este împărțit în două părți : una este constituită din gazele arse, iar cealaltă din amestecul inițial. Această divizare nu trebuie înțeleasă în sensul strict geometric nici chiar la motorul cu aprindere prin scînteie, deoarece în afară de volumul geometric ocupat de amestecul din fața frontului de aprindere, elementele de volum de amestec inițial din spatele frontului de aprindere ocupă și ele o parte din volumul geometric parcurs de flacără. Faptul că la un moment dat se concentrează într-o parte a volumului camerei de ardere toate elementele de volum de gaze arse, iar în cealaltă parte toate elementele de volum de amestec proaspăt reprezintă o imagine simplificată, care ușurează tratarea matematică a neomogenității termice. Această concentrare poate fi admisă și în condițiile motorului cu aprindere prin scînteie, chiar după parcurgerea amestecului de către frontul de aprindere, și în condițiile motorului cu

aprindere prin comprimare în tot timpul procesului, ținînd seama de cantitatea de combustibil prezent în cilindru. Modelul propus presupune că elementele de volum de diverse temperaturi se comportă la scara microscopică identic cu volumele macroscopice de gaze. Deci neomogenitatea termică de diferite scări se reduce la cea mai simplă formă de neomogenitate termică, caracterizată prin două temperaturi distincte: temperatura gazelor arse T_{ga} și temperatura amestecului inițial T_{ai}:

În consecință, relația (1) devine

$$U = (U_{ga})_{T_{ga}} + (U_{ai})_{T_{ai}}, \tag{4}$$

astfel încît cele două componente ale energiei interne se calculează pentru temperaturile T_{ga}, respectiv T_{ai}.

Pentru a sublinia deosebirile de principiu dintre relațiile (3) și (4), este necesar să se precizeze sensul fizic al temperaturii T_{es}. În acest scop se admite că amestecul de gaze este format din două componente, gaze de ardere și amestec inițial, de cantitate molară ν_{ga} respectiv ν_{ai}, de temperaturi T_{ga} și T_{ai}, concentrate corespunzător în volumele V_{ga} și V_{ai}, pentru care se scriu ecuațiile de stare

$$p V_{ga} = \nu_{ga} R T_{ga},$$

$$p V_{ai} = \nu_{ai} R T_{ai}.$$

Prin adunare se obține

$$p V = R (\nu_{ga} T_{ga} + \nu_{ai} T_{ai}), \tag{5}$$

unde

$$V = V_{ga} + V_{ai}.$$

Identificînd ecuațiile (2) și (5), se obține

$$T_{es} = \frac{\nu_{ga}}{\nu_{am}} T_{ga} + \frac{\nu_{ai}}{\nu_{am}} T_{ai}. \tag{6}$$

Se pune condiția

$$(U)_{T_{es}} = U,$$

și se explicitează energiile interne:

$$\int_0^{T_{es}} \nu_{ga} C_{v_{ga}} d T_{es} + \int_0^{T_{es}} \nu_{ai} C_{v_{ai}} d T_{es} = \int_0^{T_{ga}} \nu_{ga} C_{v_{ga}} d T_{ga} + \int_0^{T_{ai}} \nu_{ai} C_{v_{ai}} d T_{ai}. \tag{7}$$

Dacă se tratează amestecul de gaze drept un gaz ideal, deci căldura specifică este independentă de compoziție și temperatură — rezultă din relația (7)

$$(\nu_{ga} + \nu_{ai}) T_{es} = \nu_{ga} T_{ga} + \nu_{ai} T_{ai}, \tag{8}$$

și întrucît

$$\nu_{ga} + \nu_{ai} = \nu_{am},$$

relația (8) se reduce la relația (6). Prin urmare, temperatura determinată din ecuația de stare pentru calculul energiilor interne reprezintă

temperatura medie a unui amestec de gaze ideale. În calculul energiilor interne cu temperatura T_{es} ipoteza se corectează, utilizînd în expresia energiilor interne căldurile specifice variabile cu compoziţia şi temperatura. Astfel, rezultă principial o tratare inconsecventă a relaţiei (1), care antrenează erori de calcul importante.

Aplicarea relaţiei (3) este justificată de nevoia reducerii volumului de calcul la stabilirea legii de ardere. În eventualitatea desfăşurării calculului pe calculatoare numerice, această simplificare nu mai prezintă însă interes, ţinînd seama de necesitatea sporirii preciziei de calcul. În acest sens, este interesant să se evalueze diferenţele care apar la calculul energiilor interne cu relaţiile (3) şi (4).

Pentru a evalua diferenţele dintre $(U)_{Tes}$ şi U, s-a considerat drept exemplu arderea stoichiometrică a octanului (0,0165 C_8H_{18} + 0,206 O_2 + 0,780 N_2 = 0,132 CO_2 + 0,148 H_2O + 0,780 N_2 kmoli/kmol amestec aer-combustibil) determinîndu-se temperatura T_{es} pentru un kmol de amestec aer-combustibil, corespunzătoare arderii combustibilului în trei proporţii diferite (ξ=25% ; 50% ; 80%). În fiecare caz s-a ales cîte un grup de valori T_{ga}, T_{ai} (tabela 1), pentru care s-au citit din tabele energiile interne specifice (tabela 2).

Tabela 1

ξ	T_{ga} [°K]	T_{ai} [°K]	T_{es} [°K]	$(U)_{Tes}$ [kcal]	U [kcal]	$e_{\Delta U}$* %
0,25	2200	650	1058	5785	6738	14,1
0,50	2400	700	1560	9410	10740	12,4
0,80	2600	750	2244	15370	16126	4,7

*) $e_{\Delta U}$ — eroarea procentuală la energii interne.

Tabela 2

ξ		CO_2	H_2O	N_2	C_8H_{18}	aer
0,25	ν_i	0,033	0,037	0,195	0,0124	0,739
	$\nu_i U_i$	750	662	2520	386	2420
0,50	ν_i	0,066	0,074	0,390	0,0082	0,493
	$\nu_i U_i$	1660	1480	5550	290	1760
0,80	ν_i	0,105	0,118	0,622	0,0033	0,197
	$\nu_i U_i$	2920	2620	9700	131	755

ν_i — numărul de kmoli al componenţilor; U_i — energia internă molară a componenţilor

În toate cazurile, la calculul energiei interne cu temperatura T_{es} s-a neglijat energia internă a octanului, deoarece la temperaturi de peste 1000°K octanul este parțial disociat, parțial intrat în reacții chimice, iar valorile căldurilor sale specifice la temperaturi mari devin nesigure (de la temperaturi de 1200—1300°K în sus asemenea valori nici nu se mai indică în tabele).

În concluzie, se observă că utilizarea în calculul energiilor interne a temperaturii T_{es} conferă calculelor un caracter convențional și conduce la erori importante, de 10—15%, pe anumite intervale ale arderii, ceea ce afectează sensibil legea de ardere.

3. Influența disocierii asupra nivelului energiei interne

Cînd amestecul de gaze arse atinge temperaturi de peste 2000°K, compoziția stoichiometrică se corectează, luîndu-se în considerare deplasarea echilibrelor chimice.

După cum se știe [2], dintre toate echilibrele care se stabilesc în gazele rezultate prin arderea unui combustibil, cel mult șase prezintă interes din punct de vedere practic. Întrucît determinarea compoziției cu considerarea disocierii prezintă dificultăți mari de calcul, autorii au cercetat posibilitatea eliminării unora dintre echilibre în limitele unui anumit grad de precizie acceptat. În acest sens s-au efectuat calcule pentru 1 kmol de octan și următoarele condiții de stare: coeficientul excesului de aer $\lambda=1$, $p=30$ kgf/cm², $T=2600$°K. În tabela 3 se arată compoziția amestecului de gaze (kmoli/kmol) fără și cu considerarea echilibrelor chimice.

Tabela 3

Cantitățile molare	ν_{CO_2}	ν_{CO}	ν_{N_2}	ν_{NO}	ν_{O}	ν_{H_2O}	ν_{H_2}	ν_{O_2}	ν_{OH}	ν_{H}
fără disociere	8	—	47	—	—	9	—	—	—	—
cu disociere	6,95	1,05	46,8640	0,272	0,0204	8,9117	0,1836	0,0318	0,265	0,0248

Modificarea compoziției chimice prin disociere antrenează două consecințe importante: modificarea efectului termic al reacției și modificarea energiilor interne, ambele influențînd bilanțul energetic. Pentru a evalua influența disocierii, este necesar să se calculeze separat, efectele fiecărui echilibru chimic din punct de vedere energetic.

În tabela 4 se arată ponderea căldurii de disociere $\nu_i Q_{vd}$ corespunzătoare fiecărui echilibru chimic, în raport cu căldura totală de reacție $Q_{vc} = 1.230.000$ kcal/kmol.

Tabela 4

Substanța	CO	H_2	NO	OH	O	H
ν_i	1,050	0,1836	0,272	0,265	0,0204	0,0248
Q_{vd}	62903	57612	21500	66734	58084	80943
$\nu_i Q_{vd}$	66050	3670	5350	17670	1190	2000
$\frac{\nu_i Q_{vd}}{Q_{vc}}$ %	5,370	0,298	0,435	1,44	0,097	0,162

Se observă că deși condițiile de calcul au fost astfel alese încît să rezulte grade avansate de disociere, patru din cele șase echilibre intervin cu o pondere atît de mică, încît pot fi neglijate la determinarea căldurii totale de disociere.

Pentru a evalua modificarea energiei interne totale prin deplasarea echilibrelor chimice, s-a determinat energia internă a amestecului pentru cazurile fără și cu disociere, considerîndu-se numai cele două echilibre chimice care pot prezenta interes :

$$CO + \frac{1}{2} O_2 \rightleftharpoons CO_2,$$

$$OH + \frac{1}{2} H_2 \rightleftharpoons H_2O.$$

În tabela 5 se arată modificarea energiei interne pentru cazul cu disociere (1), în raport cu energia internă a amestecului, determinată fără disociere (2).

Tabela 5

Substanța	CO_2		CO		H_2O		OH		O_2		N_2
	fără	cu	fără	cu	fără	cu	fără	cu	fără	cu	—
ν_i	8	6,95	—	1,05	9	8,9117	—	0,265	—	0,0318	47
$U_i^{*)}$	27752		15699		22227		14869		16532		15531
$\nu_i U_i$	222000	192500	—	16500	200000	198000	—	3935	—	526	732000
$\sum \nu_i U_i$ 1	1.154.000 kcal										
$\sum \nu_i U_i$ 2	1.143.461 kcal										

*) la 2600 °K

Se observă că eroarea care rezultă la calculul energiei interne totale a amestecului fără considerarea disocierii este sub 1%, față de calculul exact.

În concluzie pentru calculul energiei interne totale, cu gradul de precizie propus, disocierea nu prezintă interes. Ca urmare, se acceptă compoziția chimică a amestecului ca fiind cea rezultată pe baza ecuațiilor stoichiometrice.

4. Variațiile elementare ale energiilor interne în timpul arderii

Pentru calculul energiilor interne se consideră că fluidul motor este un gaz perfect cu călduri specifice variabile. El este alcătuit inițial — în momentul declanșării injecției sau a scînteii electrice — din aer și gaze reziduale, respectiv dintr-un amestec de aer, gaze reziduale și combustibil. În timpul arderii compoziția amestecului se modifică treptat datorită oxidării combustibilului.

Întrucît se urmărește programarea calculului pe calculatoare numerice este avantajos să se exprime căldurile specifice sub formă analitică. Această soluție este posibilă numai dacă funcțiile de temperatură pentru căldurile specifice asigură gradul de precizie propus. Într-o lucrare recentă [3], Faltin găsește dependența de temperatură a căldurilor specifice sub forma unor polinoame de grad n ($n=2...4$ în raport cu intervalul de temperatură considerat), care dau erori locale maxime sub 1%. Întrucît acest grad de precizie satisface cerințele studiului de față, în cele ce urmează se utilizează funcțiile de temperatură din anexa 1, prelucrate după [3].

Legea de ardere pentru un motor cu ardere internă dat — la care s-a ridicat pe cale experimentală diagrama indicată — se determină prin integrarea ecuației diferențiale de bilanț energetic, care are forma

$$\nu_c Q_{vc} d\xi = dU + d(AL + Q_p + Q_{vd} + Q_{vap}), \qquad (9)$$

unde: ν_c (kmoli/ciclu) este doza de combustibil pe ciclu; Q_{vc} — căldura molară de reacție a combustibilului la volum constant; ξ — fracțiunea din căldura de reacție degajată din momentul inițial al arderii pînă în momentul considerat *); U — energia internă a amestecului de gaze; AL — echivalentul caloric al lucrului mecanic; Q_p — căldura schimbată de amestecul de gaze cu pereții; Q_{vd} — căldura de disociere la volum constant; Q_{vap} — căldura de vaporizare a combustibilului, în cazul injectării combustibilului în amestec.

*) Variația coeficientului ξ de degajare a căldurii de reacție în raport cu timpul sau cu unghiul RAC α, reprezintă legea de degajare a căldurii sau legea de ardere.

Pentru modelul fizic propus, energia internă elementară dU a amestecului de gaze se obține diferențiind ecuația (1) :

$$dU = dU_{ai} + dU_{ga} . \tag{10}$$

Variațiile elementare ale energiilor interne dU_{ai} și dU_{ga} au expresia generală

$$dU_{ai} = d\left[\nu_{ai\alpha}\int_0^{T_{ai}} C_{vai}\, dT_{ai}\right], \tag{11}$$

$$dU_{ga} = d\left[\nu_{ga\alpha}\int_0^{T_{ga}} C_{vga}\, dT_{ga}\right], \tag{12}$$

unde $\nu_{ai\alpha}$, $\nu_{ga\alpha}$ reprezintă cantitatea momentană de amestec inițial, respectiv de gaze arse ; C_{vai}, C_{vga} — căldurile specifice momentane ale amestecului inițial, respectiv ale gazelor arse.

Expresiile generale ale căldurilor specifice (anexa 1) sînt :

$$C_{vai} = a_{ai} + b_{ai}\, T + c_{ai}\, T^2 + d_{ai}\, T^3 + e_{ai}\, T^4 , \tag{13}$$

$$C_{vga} = a_{ga} + b_{ga}\, T + c_{ga}\, T^2 + d_{ga}\, T^3 + e_{ga}\, T^4 . \tag{14}$$

Coeficienții $a_{ai} \ldots e_{ai}$ și $a_{ga} \ldots e_{ga}$ se determină pentru amestecul inițial de gaze (aer, combustibil și gaze reziduale) și pentru amestecul de gaze de ardere (CO_2, H_2O, N_2, O_2, gaze reziduale), rezultate din ecuațiile stoichiometrice, fiind evident invariabile în timpul arderii.

Dezvoltînd expresiile (11) și (12) rezultă

$$\begin{aligned} dU_{ai} &= \left(\int_0^{T_{ai}} C_{vai}\, dT_{ai}\right) d\nu_{ai\alpha} + \nu_{ai\alpha}\, C_{vai}\, dT_{ai} = \\ &= \left(\int_0^{T_0} C_{vai}\, dT_{ai} + \int_{T_0}^{T_{ai}} C_{vai}\, dT_{ai}\right) d\nu_{ai\alpha} + \nu_{ai\alpha}\, C_{vai\alpha}\, dT_{ai} , \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} d_{ga}U &= \left(\int_0^{T_{ga}} C_{vga}\, dT_{ga}\right) d\nu_{ga\alpha} + \nu_{ga\alpha}\, C_{vga}\, dT_{ga} = \\ &= \left(\int_0^{T_0} C_{vga}\, dT_{ga} + \int_{T_0}^{T_{ga}} C_{vga}\, dT_{ga}\right) d\nu_{ga\alpha} + \nu_{ga\alpha}\, C_{vga\alpha}\, dT_{ga} . \end{aligned} \tag{16}$$

Compoziția amestecului se determină în ipoteza egalității dintre proporția de combustibil intrat în reacție și proporția cantității de căldură de reacție degajată din momentul inițial pînă în momentul considerat. În aceste condiții fracțiunea ξ precizează în același timp și fracțiunea din cantitatea de combustibil care a reacționat pînă la un moment dat. Aceasta presupune că reacția decurge instantaneu pe baza ecuațiilor stoichiometrice. Ca urmare, se neglijează produsele intermediare de oxidare.

Amestecul din cilindru fiind separat în două părți în baza modelului fizic adoptat pentru tratarea neomogenității termice, rezultă

$$\nu_{ai\,\alpha} = (1 - \xi)\,\nu_{ai}\,, \tag{17}$$

$$\nu_{ga\,\alpha} = \xi\,\nu_{ga}\,, \tag{18}$$

unde ν_{ai} este numărul de kmoli de amestec inițial în momentul declanșării scînteii sau injecției, iar ν_{ga} este numărul de kmoli de amestec de gaze din cilindru la finele arderii teoretice.

Variația elementară a compoziției în timpul arderii este

$$d\,\nu_{ai\,\alpha} = -\nu_{ai} \cdot d\,\xi\,, \tag{19}$$

$$d\,\nu_{ga\,\alpha} = \nu_{ga}\,d\,\xi\,. \tag{20}$$

Ținînd seama de neomogenitatea termică a gazelor din cilindru, temperatura amestecului inițial T_{ai} și temperatura gazelor arse T_{ga} se determină astfel.

Dacă discontinuitățile de temperatură nu pot fi neglijate, cele de presiune sînt neînsemnate (în condițiile arderii normale în motorul cu aprindere prin scînteie, precum și în condițiile arderii din motorul cu aprindere prin comprimare, la care intensitatea detonației diesel este limitată). În cazul funcționării cu detonație intensă, la motorul cu aprindere prin comprimare, ipoteza reduce întrucîtva gradul de precizie.

Dacă se presupune că în fiecare moment se stabilește aceeași presiune în camera de arderе, rezultă că amestecul inițial este comprimat instantaneu de gazele arse care se destind. Prin urmare, se poate admite cu suficientă precizie că amestecul inițial suportă în timpul arderii o comprimare adiabată. Această ipoteză se bazează pe rezultatele experimentale ale lui Livengood, Taylor și Wu [5], privind temperatura amestecului din fața frontului de aprindere, pe baza vitezei de propagare a sunetului. Reprezentînd în coordonate logaritmice datele experimentale, Livengood ș.a. au obținut că dependența temperaturii amestecului din fața frontului de aprindere (amestec final sau endgas) în raport cu presiunea este liniară, ceea ce corespunde unei transformări de tipul $T_p^{\frac{1-n}{n}} = \text{const}$. Potrivit datelor experimentale, exponentul n se apropie suficient de precis de exponentul adiabatic ($n = 1{,}35$).

Temperatura amestecului inițial va fi determinată atunci de relația

$$T_{ai} = T_i \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}}. \tag{21}$$

unde p_i și T_i sînt parametrii de stare în momentul declanșării calculului legii de ardere (momentul declanșării scînteii electrice sau injecției).

Variația elementară a temperaturii amestecului inițial este

$$dT_{ai} = \frac{k_{ai}-1}{k_{ai}} \frac{T_i}{p_i} \left(\frac{p}{p_i}\right)^{-\frac{1}{k_{ai}}} p' \, d\alpha \,, \tag{22}$$

p' fiind derivata presiunii în raport cu unghiul RAC α.

Temperatura amestecului inițial variază în cursul perioadei arderii cu cel mult 200—250°. În adevăr, pentru o valoare extremă a raportului $\frac{p}{p_i}=4$ (cazul motorului cu aprindere prin scînteie), raportul T_{ai}/T_i, pentru $k_{ai}=1{,}33$, este de 1,4 ; dacă $T_i=600°K$, rezultă $T_{ai}-T_i=240°K$. La variații atît de reduse ale temperaturii, exponentul $(k_{ai}-1)/k_{ai}$ se modifică în limite restrînse.

Întrucît ecuația diferențială a bilanțului energetic se rezolvă prin integrare pe intervale mici, în interiorul cărora temperatura înregistrează variații de 30—50°, se poate considera cu suficientă aproximație că exponentul adiabatic k_{ai} este constant pe interval și se determină cu temperatura de la începutul intervalului. Ca urmare, ținînd seama de expresia căldurii specifice precizată în anexa 1, rezultă

$$k_{ai} = 1 + \frac{1{,}986}{a_{ai} + b_{ai} T_{ai} + c_{ai} T_{ai}^2 + d_{ai} T_{ai}^3}. \tag{23}$$

Temperatura T_{ga} rezultă din ecuația (5), în care T_{ai} se substituie din relația (21)

$$T_{ga} = \frac{p\,V}{R\,\nu_{ga\alpha}} - \frac{\nu_{ai\alpha}}{\nu_{ga\alpha}} \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}} T_i \,. \tag{24}$$

Volumul V din expresia (24) se exprimă sub forma

$$V = 0{,}5\, V_S\, \sigma_\alpha \,, \tag{25}$$

unde V_S este cilindreea, iar σ_α este o funcțiune cinematică definită în anexa 2.

Substituind volumul V din relația (25) și cantitățile molare din relațiile (17) și (18), se obține

$$T_{ga} = \frac{0{,}5\, V_S}{R\,\nu_{ga}} \cdot \frac{\sigma_\alpha\, p}{\xi} - \frac{T_i}{\mu_t} \cdot \frac{1-\xi}{\xi} \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}}, \tag{26}$$

unde μ_t este coeficientul total de variație molară.

Variația elementară a temperaturii gazelor arse este

$$dT_{ga} = \frac{0{,}5 V_S}{R\,\nu_{ga}} \frac{1}{\xi} (p\,\sigma'_\alpha + \sigma_\alpha\, p')\, d\alpha - \frac{0{,}5 V_S}{R\,\nu_{ga}} \frac{\sigma_\alpha\, p}{\xi^2}\, d\xi +$$

$$+\frac{T_t}{\mu_t}\left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}}\frac{1}{\xi^2}d\xi-\frac{k_{ai}-1}{\mu_t k_{ai}}\frac{T_i}{p_t}\frac{1-\xi}{\xi}\left(\frac{p}{p_i}\right)^{-\frac{1}{k_{ai}}}p'\,d\alpha, \qquad (27)$$

unde σ'_α este derivata funcțiunii cinematice σ_α (anexa 2).

Relația (27) se transcrie într-o formă concentrată :

$$dT_{ga}=g_1\,d\alpha+g_2\,d\xi, \qquad (27')$$

unde g_1 și g_2 sînt determinați în anexa 3 prin identificare

Pe baza relațiilor (13), (17), (19) și (22), relația (15) devine :

$$dU_{ai}=-\nu_{ai}\left[(u_0)_{ai}+a_{ai}(T_{ai}-T_0)+\frac{1}{2}b_{ai}(T_{ai}-T_0^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}c_{ai}(T_{ai}^3-T_0^3)+\frac{1}{4}d_{ai}\cdot(T_{ai}^4-T_0^4)\right]d\xi+$$
$$+\frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}\nu_{ai}\frac{T_i}{p_i}(a_{ai}+b_{ai}T_{ai}+c_{ai}T_{ai}^2+d_{ai}T_{ai}^3)\,(1-\xi)\left(\frac{p}{p_i}\right)^{-\frac{1}{k_{ai}}}p'd\alpha, \qquad (28)$$

unde $(u_0)_{ai}$ este energia internă specifică a amestecului inițial la temperatura inițială T_0 de referință $-(u_0)_{ai}=\int_0^{T_0}C_{vai}\,dT_{ai}-$ și se determină din tabele.

În mod analog, cu ajutorul relațiilor (14), (18), (20), (26), (27'), relația (18) devine :

$$dU_{ga}=\nu_{ga}\left[(u_0)_{ga}+a_{ga}(T_{ga}-T_0)+\frac{1}{2}b_{ga}(T^2{}_{ga}-T_0^2)+\frac{1}{3}c_{ga}(T_{ga}^3-T_0^3)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}d_{ga}(T_{ga}^4-T_0^4)+\frac{1}{5}e_{ga}(T_{ga}^5-T_0^5)\right]d\xi+\nu_{ga}\,\xi\,(a_{ga}+ \qquad (29)$$
$$+b_{ga}T_{ga}+c_{ga}T_{ga}^2+d_{ga}T_{ga}^3+e_{ga}T_{ga}^4)(g_1\,d\alpha+g_2\,d\xi),$$

unde $(u_0)_{ga}$ este energia internă specifică a gazelor de ardere la temperatura inițială T_0 de referință $-(u_0)_{ga}=\int_0^{T_0}C_{vga}\,dT_{ga}$ -- și se determină din tabele.

Relațiile (28) și (29) pot fi exprimate sub forma concentrată

$$dU_{ai}=g_3\,d\xi+g_4\,d\alpha, \qquad (28')$$

și

$$dU_{ga}=(g_5+g_2g_6)\,d\xi+g_1g_6\,d\alpha, \qquad (29)$$

unde funcțiile $g_3...g_6$ sînt explicitate în anexa 3.

În final, variația elementară a energiei interne a amestecului de gaze — relația (10) — capătă forma

$$dU = (g_3 + g_5 + g_2 g_6)\, d\xi + (g_4 + g_1 g_6)\, d\alpha\,. \tag{30}$$

Pornind de la modelul fizic admis al amestecului de gaze, neomogen termic, energia internă se poate exprima sub forma generală

$$U = U\,(\xi, \alpha)\,,$$

întrucît temperaturile T_{ga} și T_{at} au fost determinate în funcție de unghiul *RAC*. Diferențiind ultima expresie, se obține

$$dU = U'_{\xi}(\xi, \alpha)\, d\xi + U'_{\alpha}(\xi, \alpha)\, d\alpha\,, \tag{31}$$

unde U'_{ξ} și U'_{α} sînt derivatele parțiale ale energiilor interne în funcție de ξ, respectiv de α. Identificînd relațiile (30) și (31), se obțin expresiile funcțiunilor U'_{ξ} și U'_{α} în condițiile neomogenității termice, necesare calculului legii de ardere cu ajutorul calculatoarelor numerice.

5. Concluzii

În lucrare se elaborează o reprezentare a amestecului de gaze din cilindrul motorului cu ardere internă, care permite determinarea energiei interne în perioada arderii, ținînd seama de discontinuitățile de temperatură. Autorii arată că la prelucrarea diagramei indicate în vederea determinării legii de ardere, calculul energiei interne a amestecului de gaze cu temperatura medie obținută pe baza ecuației de stare introduce erori, care pot ajunge pînă la 15%, pe anumite intervale ale procesului de ardere. Metoda de calcul elaborată de autori micșorează erorile de cîteva ori și permite exprimarea variației elementare a energiei interne într-o formă convenabilă programării calculului legii de ardere pe calculatoare numerice.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Apostolescu N.* — Considerații asupra desfășurării arderii în motoarele rapide cu aprindere prin comprimare și cu injecție directă. Buletinul Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", Buc., 4, 1965.

2. *Bărănescu, G.* — Calculul proceselor de ardere. București, Ed. Acad., 1955.

3. *Faltin, H.* — Technische Wärmelehre. Berlin, Akademie Verlag, 1961.
4. *Grünwald, B.* — Cu privire la împărțirea pe faze a procesului de ardere în motorul cu aprindere prin scînteie. Buletinul Institutului politehnic, Buc., 5, 1963.
5. *Livengood, J., Taylor, C., Wu, P.* — Measurement of gas temperature in an engine by the velocity of sound method. SAE-Transaction, 1958, p. 683—699.
6. *Stecikin, B. S. ș.a.* — Indicatornaia diagramma, dinamica teplovîdelenia i rabocii țikl bîstrohodnogo porșnevogo dvigatelia, Moskva, Izd. Akad. Nauk., 1960.

ANEXA 1

Coeficienții funcției de temperatură a căldurii specifice a gazelor

$$C_v = a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4 \text{ (kcal/kmol)}$$

A. Intervalul de temperatură 275—1150°K

Substanța	a	b	c	d	eroarea max. %
aer	4,915	$-0{,}373 \cdot 10^{-3}$	$2{,}272 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}912 \cdot 10^{-9}$	+0,5
octan	5,485	$148{,}0 \cdot 10^{-3}$	$-51{,}5 \cdot 10^{-6}$	0	—0,6
ceten	17,07	$273{,}6 \cdot 10^{-3}$	$-95{,}7 \cdot 10^{-6}$	0	—0,5
CO_2	3,9170	$11{,}39 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}20 \cdot 10^{-6}$	0	1,0
H_2O	5,4933	$1{,}734 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}628 \cdot 10^{-6}$	0	1,0
N_2	5,246	$-0.249 \cdot 10^{-3}$	$3{,}0665 \cdot 10^{-6}$	$0{,}242 \cdot 10^{-9}$	0,5
O_2	4,2362	$3{,}017 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}911 \cdot 10^{-6}$	0	0,9
CO	5,232	$-2{,}135 \cdot 10^{-3}$	$4{,}960 \cdot 10^{-6}$	$-2{.}079 \cdot 10^{-9}$	0,5

B. Intervalul de temperatură 575—2775°K

Substanța	a	b	c	d	e	eroarea max. %
aer	3,653	$3{,}4587 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}412 \cdot 10^{-6}$	$0{,}218 \cdot 10^{-9}$	0	0.5
octan	16,38	$120{,}5\ 10^{-3}$	$-35 \cdot 10^{-6}$	0	0	1,0
ceten	38,05	$220{,}24 \cdot 10^{-3}$	$-64{,}48 \cdot 10^{-6}$	0	0	0,6
CO_2	3,114	$15{,}012 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}848 \cdot 10^{-6}$	$2{,}952 \cdot 10^{-9}$	$-0{,}3294 \cdot 10^{-12}$	—0,8
H_2O	5,8092	$-0{,}2180 \cdot 10^{-3}$	$4{,}388 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}495 \cdot 10^{-9}$	$2{,}077 \cdot 10^{-12}$	0,8
N_2	3,7905	$3{,}249 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}2037 \cdot 10^{-6}$	$0{,}162 \cdot 10^{-9}$	0	0,5
O_2	4,181	$3{,}358 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}450 \cdot 10^{-6}$	$0{,}242 \cdot 10^{-9}$	0	1,0
CO	3,4253	$4{,}034 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}748 \cdot 10^{-6}$	$0{,}279 \cdot 10^{-9}$	0	0,5

ANEXA II

Expresiile unor funcţiuni cinematice

$$\sigma_\alpha = \frac{2}{\varepsilon - 1} + (1 - \cos\alpha) + \frac{\Lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sigma'_\alpha = \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \left[\sin\alpha + \frac{\Lambda}{2}\sin 2\alpha\right]\frac{\pi}{180}$$

ANEXA III

Expresiile funcţiunilor care precizează derivatele parţiale ale energiei interne

$$g_1 = \frac{0{,}5V_S}{R\nu_{ga}}\cdot\frac{1}{\xi}(p\sigma'_\alpha + \sigma_\alpha p') - \frac{k_{ai}-1}{\mu_t k_{at}}\cdot\frac{T_i}{p_i}\cdot\frac{1-\xi}{\xi}\left(\frac{p}{p_i}\right)^{-\frac{1}{k_{at}}} p'$$

$$g_2 = \frac{T_i}{\mu_t}\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k_{at}-1}{k_{at}}}\frac{1}{\xi^2} - \frac{0{,}5\,V_S}{R\nu_{ga}}\cdot\frac{\sigma_\alpha p}{\xi^2}$$

$$g_3 = -\nu_{at}\left[a_{ai}(T_{ai}-T_0) + \frac{1}{2}b_{ai}(T_{ai}^2 - T_0^2) + \frac{1}{3}c_{at}(T_{ai}^3 - T_0^3) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}d_{ai}(T_{ai}^4 - T_0^4)\right]$$

$$g_4 = \frac{k_{ai}-1}{k_{ai}}\nu_{at}\frac{T_i}{p_i}[(u_0)_{ai} a_{ai} + b_{ai}T_{ai} + c_{ai}T_{ai}^2 + d_{ai}T^3](1-\xi)\left(\frac{p}{p_i}\right)^{-\frac{1}{k_{at}}} p'$$

$$g_5 = \nu_{ga}\left[(u_0)_{ga} + a_{ga}(T_{ga}-T_0) + \frac{1}{2}b_{ga}(T_{ga}^2 - T_0^2) + \frac{1}{3}c_{ga}(T_{ga}^3 - T_0^3) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}d_{ga}(T_{ga}^4 - T_0^4) + \frac{1}{5}e_{ga}(T_{ga}^5 - T_0^5)\right]$$

$$g_6 = \nu_{ga}\xi(a_{ga} + b_{ga}T_{ga} + c_{ga}T^2{}_{ga} + d_{ga}T_{ga}^3 + e_{ga}T_{ga}^4)$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

TERMOTEHNICĂ

CZ.: 621.432:621.43.01 : 621.1.01 = 621.43.06

ANALIZA TERMODINAMICĂ A PROCESELOR DE SCHIMB DE GAZE DIN CILINDRUL MOTORULUI CU ARDERE INTERNĂ *

TR. NICOLESCU, AL. DĂNESCU, VS. RADCENCO

În teoria motoarelor cu ardere internă cu piston, un loc important îl ocupă studiul ciclurilor termodinamice ideale, care reflectă aspectul teoretic-ideal al proceselor reale de lucru care se desfășoară în aceste mașini termice. Ipoteza fundamentală care stă la baza definirii acestor cicluri constă în aceea că procesele de admisie și de evacuare sînt înlocuite printr-o răcire izocoră, în timpul căreia agentul termic, considerat gaz ideal, cedează sursei reci o cantitate de căldură echivalentă. Procedînd în acest mod, în teoria ciclurilor ideale ale motoarelor cu piston, nu pot fi luate în considerare unele aspecte interesante ale gazotermodinamicii proceselor teoretice de admisie și evacuare.

Este de subliniat de asemenea că, între cele două etape și anume ciclul termodinamic ideal și diagrama calculată, s-ar putea introduce o etapă intermediară în cadrul căreia, menținînd unele ipoteze simplificatoare care definesc ciclul ideal, să se ia în considerare influența admisiei și evacuării, ca procese ireversibile, cu cantități variabile de agent termic. Pentru ca rezultatele obținute pe baza analizei termodinamice a acestor procese să fie cît mai cuprinzătoare, se consideră cazul motorului cu ardere mixtă, care funcționează pe baza diagramei teoretice arătate în figura 1, ipotezele adoptate fiind următoarele:

1. agentul termic se comportă ca un gaz biatomic ideal;

2. admisia încărcăturii proaspete r'-a are loc, în condiții adiabatice la presiunea atmosferică constantă p_0;

3. comprimarea a-c și destinderea z-d se consideră procese adiabatice reversibile ($dS=0$);

4. procesul de ardere este asimilat cu o evoluție compusă din încălzirile izocoră c-y și izobară y-z, în timpul cărora agentul termic primește de la sursa caldă cantitățile de căldură Q_v și Q_p;

5. evacuarea cilindrului d-s-r se desfășoară în condiții adiabatice, atît pe cale liberă (etapa d-s), la volum constant, cît și la presiunea constantă p_0 (etapa s-r);

* Manuscris predat la redacție 25 ianuarie 1969.

6. în timpul evacuării libere *d-s* parametrii gazului din cilindru respectă ecuaţia transformării adiabatice reversibile (S=const.), destinderea gazului din conducta de evacuare avînd un caracter ireversibil;

7. supapele de admisie şi de evacuare sînt comandate atunci cînd pistonul se află în punctele moarte interior (p.m.i.) şi exterior (p.m.e).

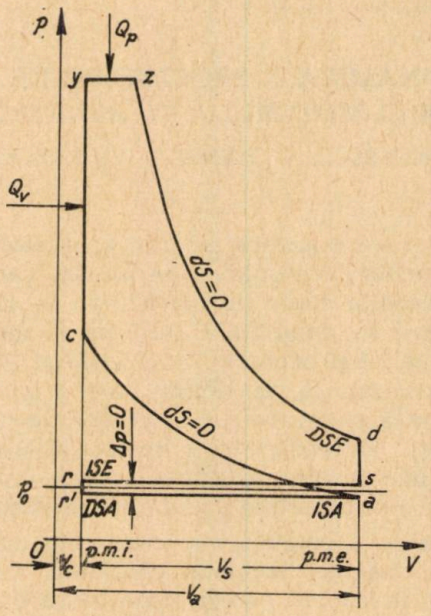


Fig. 1.

Trebuie subliniat că, deoarece se desfăşoară în condiţiile unei diferenţe finite între temperatura gazelor reziduale şi temperatura atmosferică T_0, procesul teoretic de admisie are un caracter ireversibil. Aceeaşi trăsătură este proprie şi procesului de evacuare: într-adevăr, în timpul evacuării libere, există o diferenţă finită între presiunea momentană a gazului din cilindru şi contrapresiunea p_0 din conducta de evacuare, iar în timpul evacuării forţate, această diferenţă finită se manifestă între temperatura gazului din conducta de evacuare şi cea a gazului din cilindru.

În consecinţă, ipoteza fundamentală la care se face apel în studiul diagramei teoretice a motorului cu piston constă în aceea că procesul de destindere a cantităţii variabile de gaz rămas în cilindru în timpul etapei de evacuare liberă are un caracter izentropic. Se poate aprecia că acestei ipoteze [1] nu i s-a acordat pînă în prezent întreaga importanţă şi, din acest motiv, unele aspecte ale proceselor de admisie şi evacuare au rămas neidentificate. Printre acestea se numără, spre exemplu, stabilirea influenţei unor factori constructivi şi funcţionali ai motorului asupra temperaturilor de admisie, evacuare şi gazelor rezi-

duale, precizarea deosebirilor existente între temperatura de evacuare a motoarelor în patru timpi și cea a motoarelor în doi timpi etc.

Spre deosebire de motoarele cu piston, unde desfășurarea procesului de evacuare influențează într-o mică măsură puterea lor mecanică, în cazul detentoarelor cu piston, utilizate pe scară largă în tehnica temperaturilor joase, acest proces contribuie într-o măsură importantă la realizarea puterii frigorifice a acestor mașini. Din acest motiv studiul procesului de evacuare ocupă un loc important în teoria termodinamică a detentoarelor cu piston [8].

Factorii constructivi și funcționali adimensionali caracteristici ai motorului cu piston, care vor fi utilizați în studiu, sînt următorii :

— raportul de comprimare $\varepsilon = V_a/V_c$; (1)

— raportul de creștere a presiunii $\lambda = p_y/p_c$; (2)

— raportul de destindere prealabilă $\varrho = V_z/V_y$. (3)

1. Analiza termodinamică a procesului de admisie

Pentru a studia admisia se consideră, așa cum se arată în figura 2, stările inițială și finală, ale sistemului conductă de admisie—cilindru, corespunzătoare momentelor de deschidere (DSA) și respectiv de închidere (ISA) ale supapei de admisie.

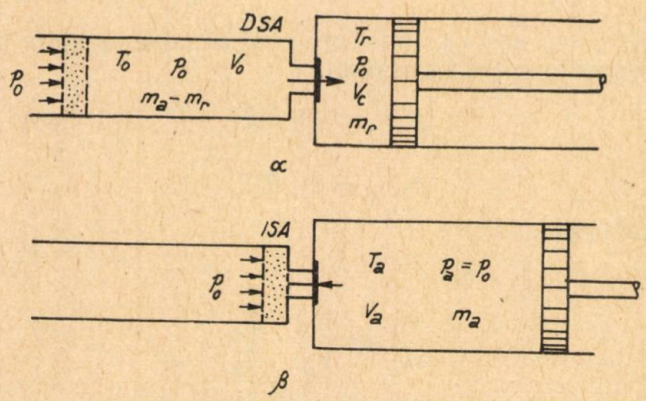


Fig. 2.

La începutul admisiei (fig. 2, α) în cilindru se află o cantitate de gaze reziduale care ocupă volumul V_c la temperatura T_r și presiunea p_0. Cantitatea de gaz m_a—m_r care urmează a fi admisă în cilindru ocupă în conducta de admisie un volum V_0 la temperatura T_0 și presiunea p_0 .

La finele admisiei (fig. 2, β) încărcătura proaspătă din cilindru ocupă volumul V_a la temperatura T_a și presiunea p_0. Pentru determinarea

temperaturii T_a se aplică ecuația bilanțului energetic scrisă sub forma :

$$dI = \delta Q - \delta L_t \tag{4}$$

unde dI reprezintă variația infinit mică a entalpiei gazului, ca urmare a schimburilor elementare de energie sub formă de căldură δQ și de lucru mecanic tehnic δL_t cu exteriorul.

Observînd că $\delta Q = \delta L_t = 0$, se integrează ecuația (1) între cele două momente α și β considerate (fig. 2) :

$$I_\beta - I_\alpha = 0 \tag{5}$$

în care

$$I_\alpha = m_\gamma c_p T_r + (m_a - m_r) c_p T_0 \tag{6}$$

$$I_\beta = m_a c_p T_a \tag{7}$$

c_p fiind căldura specifică la presiune constantă a gazului.

După efectuarea înlocuirilor lui I_α și I_β în expresia (5) și raportarea ei la $m_a T_0$ se obține :

$$\frac{T_a}{T_0} - \frac{m_r}{m_a}\left(\frac{T_r}{T_0} - 1\right) - 1 = 0 \tag{8}$$

Raportul m_r/m_a se determină aplicînd ecuația de stare gazului aflat în cilindru în stările inițială α și finală β

$$p_0 V_c = m_r R T_r \tag{9}$$

$$p_0 V_a = m_a R T_a \tag{10}$$

R fiind constanta gazului.

Rezultă :

$$\frac{m_r}{m_a} = \frac{V_c}{V_a} \cdot \frac{T_a}{T_r} \tag{11}$$

Ținînd seama de relația (11) expresia (8) devine :

$$\frac{T_a}{T_0} - \frac{V_c}{V_a} \cdot \frac{T_a}{T_r}\left(\frac{T_r}{T_0} - 1\right) - 1 = 0 \tag{12}$$

din care se determină raportul T_a/T_0 :

$$\frac{T_a}{T_0} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{T_0}{T_r}\right)\frac{1}{\varepsilon}} \tag{13}$$

Reprezentînd grafic funcția $T_a/T_0 = f(T_r/T_0)$ pentru diferite valori ale raportului de comprimare ε, se obțin curbele arătate în figura 3. Se remarcă faptul că raportul T_a/T_0 este influențat în sensuri contrare de T_r/T_0 și ε, crescînd o dată cu creșterea lui T_r/T_0 și respectiv cu scăderea lui ε.

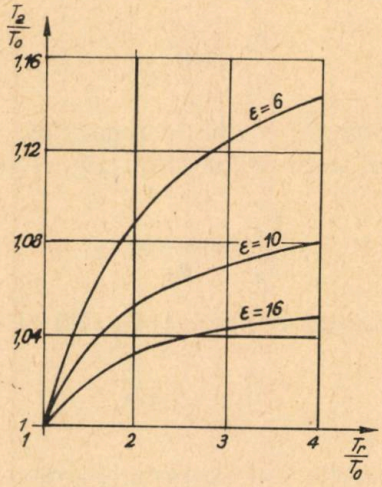


Fig. 3.

Influența factorilor ε, λ și ρ asupra lui T_a

Raportul T_a/T_0 poate fi exprimat numai în funcție de ε, λ și ρ ținînd seama de ipotezele adoptate :

$$T_r = T_s \tag{14}$$

$$\frac{T_s}{T_d} = \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{15}$$

$$\frac{T_d}{T_z} = \left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right)^{\varkappa - 1} \tag{16}$$

$$\frac{T_z}{T_y} = \varrho \tag{17}$$

$$\frac{T_y}{T_c} = \lambda \tag{18}$$

$$\frac{T_c}{T_a} = \varepsilon^{\varkappa - 1} \tag{19}$$

$$\frac{p_d}{p_z} = \left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right)^{\varkappa} \tag{20}$$

$$\frac{p_z}{p_c} = \frac{p_y}{p_c} = \lambda \tag{21}$$

$$\frac{p_c}{p_0} = \varepsilon^{\varkappa} \tag{22}$$

unde $\varkappa$ reprezintă exponentul adiabatic al gazului.

Efectuînd produsul expresiilor (16)...(19) şi respectiv (20)...(22) rezultă că :

$$\frac{T_d}{T_a} = \frac{p_d}{p_0} = \lambda\varrho^{\varkappa} \tag{23}$$

În consecinţă, utilizînd relaţiile (14), (15) şi (23) se obţine :

$$\frac{T_r}{T_a} = \varrho\,\lambda^{\frac{1}{\varkappa}} \tag{24}$$

Ţinînd seama de relaţia (24) expresia (13) devine :

$$\frac{T_a}{T_0} = \frac{\varepsilon - \dfrac{1}{\varrho\,\lambda^{1/\varkappa}}}{\varepsilon - 1} \tag{25}$$

În cazul diagramei teoretice a motorului cu aprindere prin scînteie, caracterizată prin condiţia $\varrho = 1$, expresia (25) devine :

$$\left(\frac{T_a}{T_0}\right)_v = \frac{\varepsilon - \dfrac{1}{\lambda^{1/\varkappa}}}{\varepsilon - 1} \tag{25,a}$$

Aplicînd condiţia $\lambda = 1$, caracteristică diagramei teoretice a motocu aprindere prin comprimare de turaţie mică şi mijlocie, expresia (25) se reduce la :

$$\left(\frac{T_a}{T_0}\right)_p = \frac{\varepsilon - \dfrac{1}{\varrho}}{\varepsilon - 1} \tag{25,b}$$

Influenţa factorilor ε, λ şi ϱ asupra temperaturii teoretice de admisie este arătată în figura 4. Se constată următoarele :

— pentru valori date ale lui ε şi λ, temperatura T_a creşte o dată cu creşterea lui ϱ ;

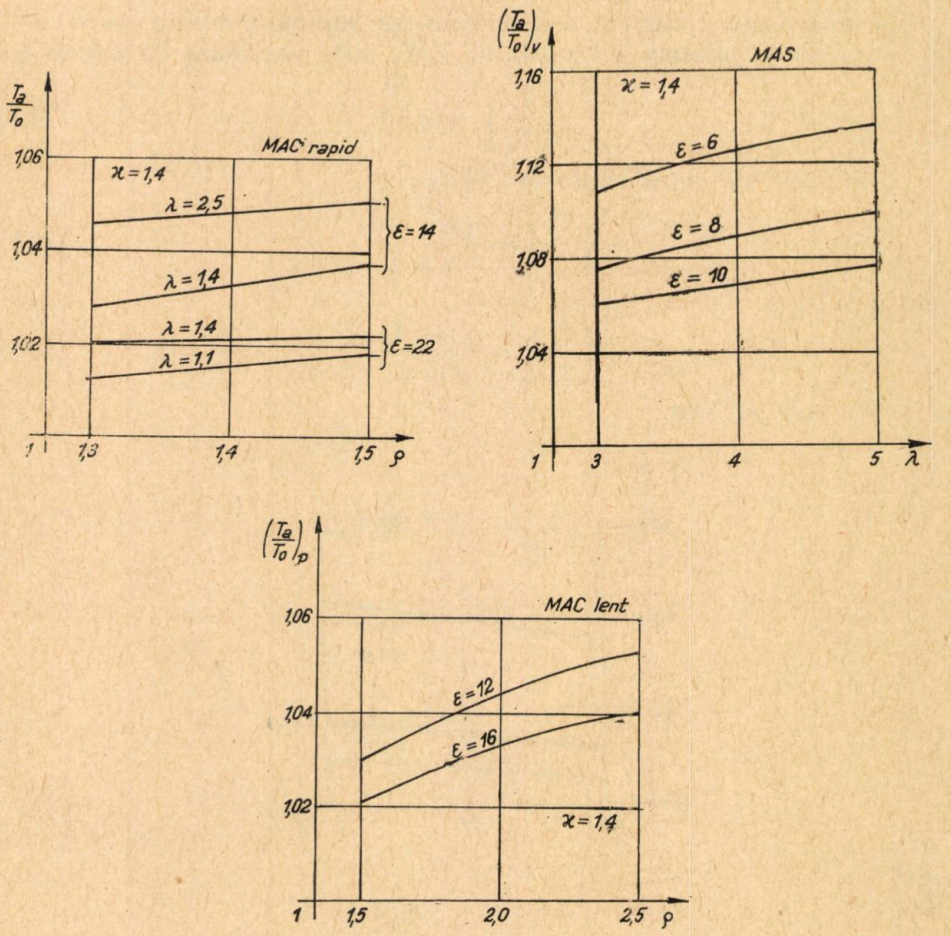


Fig. 4.

— temperatura T_a crește o dată cu λ, la menținerea constantă a lui ε și ρ ;

— creșterea lui ε conduce la scăderea lui T_a, pentru valori date ale lui λ și ρ.

Temperatura teoretică a gazelor reziduale

Efectuînd produsul expresiilor (24) și (25) rezultă :

$$\frac{T_r}{T_0} = \frac{\varepsilon \rho \lambda^{\frac{1}{\varkappa}} - 1}{\varepsilon - 1} \tag{26}$$

La evacuarea completă a cilindrului se impune condiția $\varepsilon \to \infty$, astfel că valoarea minimă a raportului T_r/T_0 este precizată de expresia :

$$\left(\frac{T_r}{T_0}\right)_l = \varrho\, \lambda^{\frac{1}{\varkappa}} \tag{26,a}$$

Prin particularizare, expresia (26) devine :

$$\left(\frac{T_r}{T_0}\right)_v = \frac{\varepsilon\, \lambda^{1/\varkappa} - 1}{\varepsilon - 1} \tag{26,b}$$

pentru MAS și

$$\left(\frac{T_r}{T_0}\right)_p = \frac{\varepsilon\, \varrho - 1}{\varepsilon - 1} \tag{26,c}$$

și pentru MAC-ul lent.

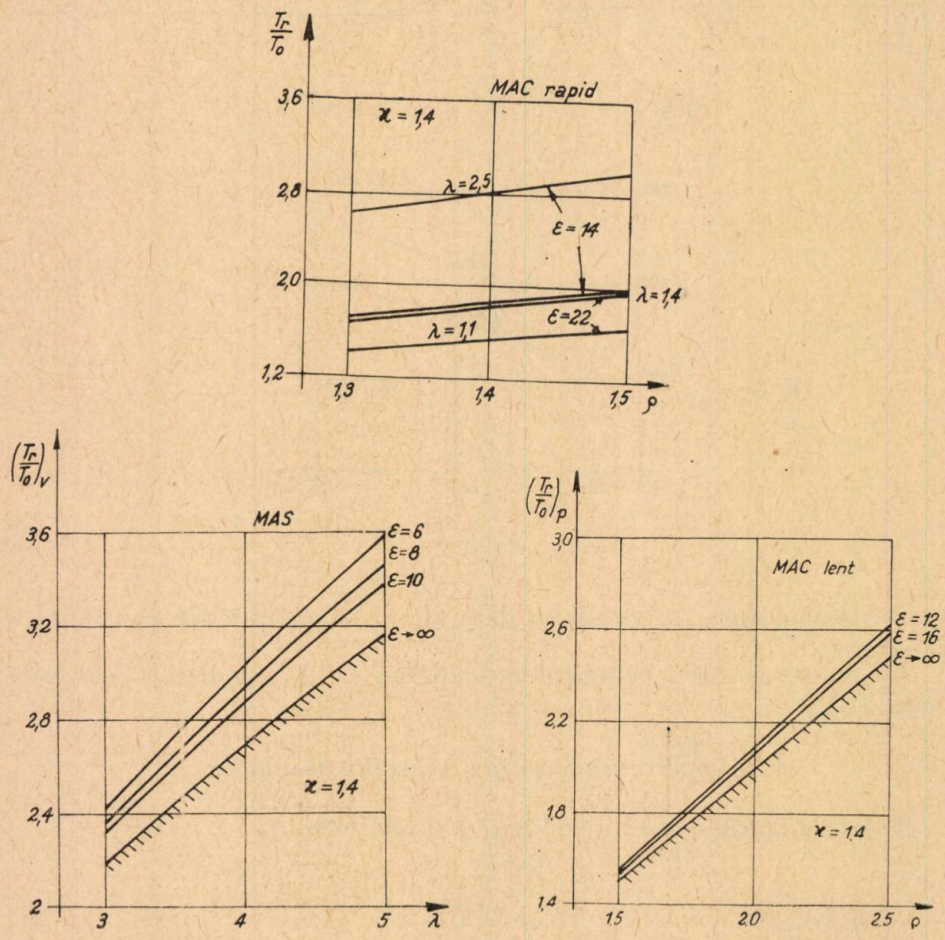


Fig. 5.

Influența factorilor ρ, λ și ε asupra temperaturii teoretice a gazelor reziduale este arătată în figura 5.

Se constată că raportul T_r/T_0 crește o dată cu creșterea lui ρ și λ, înregistrînd o scădere la mărirea lui ε; această scădere prezintă importanță la MAS, fiind însă practic neglijabilă la MAC-uri.

Coeficientul teoretic al gazelor reziduale

Acest coeficient este definit de raportul :

$$\gamma_r = \frac{m_r}{m_a - m_r} \tag{27}$$

Ținînd seama de relațiile (11) și (24) expresia (27) devine :

$$\gamma_r = \frac{1}{\varepsilon \rho \lambda^{1/\varkappa} - 1} \tag{28}$$

Prin particularizare se obține :

$$\gamma_{r,v} = \frac{1}{\varepsilon \lambda^{1/\varkappa} - 1} \tag{28,a}$$

pentru MAS și

$$\gamma_{r,p} = \frac{1}{\varepsilon \rho - 1} \tag{28,b}$$

pentru MAC-ul lent.

Se observă că, o dată cu creșterea lui ρ, λ și ε, valoarea coeficientului γ_r scade. Astfel, în cazul MAS-ului, reprezentarea grafică a dependenței $\gamma_{r,v} = f(\lambda)$ pentru diferite valori ale lui ε este arătată în fig. 6.

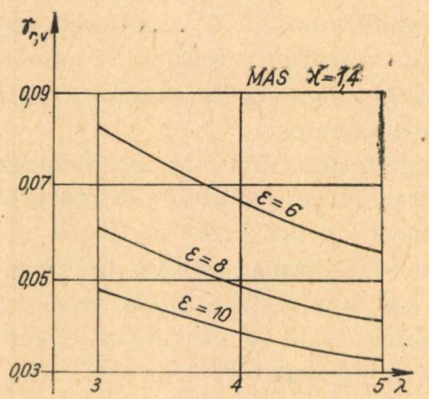


Fig. 6.

2. Analiza termodinamică a procesului de evacuare

Pentru a studia evacuarea se consideră, așa cum se arată în fig. 7, sistemul cilindru-conductă de evacuare reprezentat în trei momente distincte ale procesului.

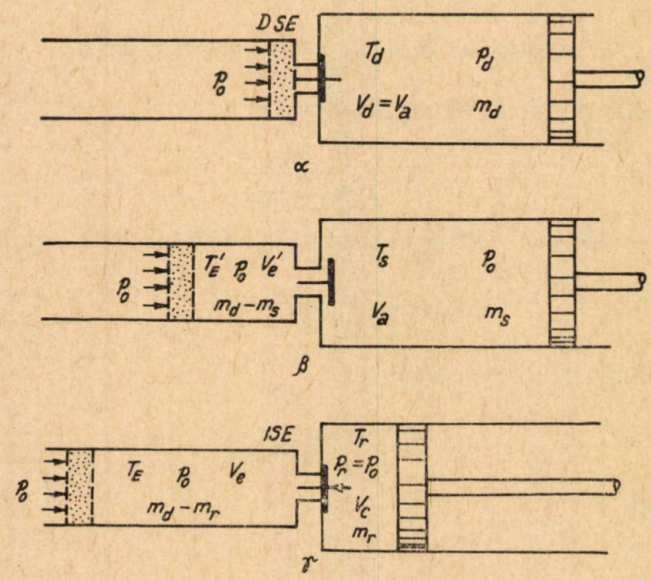


Fig. 7.

La deschiderea supapei de evacuare (DSE), cantitatea de gaze m_d din cilindru ocupă volumul total $V_d = V_a$ la temperatura T_d și presiunea p_d (fig. 7, α).

În timpul evacuării libere presiunea din cilindru scade pînă la cea atmosferică iar temperatura devine T_s. La finele acestei etape (fig. 7, β) cantitatea de gaze din cilindru se reduce la valoarea m_s iar cea evacuată $m_d - m_s$ ocupă în conducta de evacuare un volum V'_E la temperatura T'_E și contrapresiunea p_0.

La finele evacuării forțate cînd are loc închiderea supapei de evacuare (ISE), în cilindru rămîne cantitatea de gaze m_r care ocupă volumul V_c la temperatura T_r și presiunea p_0 (fig. 7, γ). Cantitatea de gaze evacuate $m_d - m_r$ se află permanent sub acțiunea contrapresiunii p_0, ocupînd un volum V_E la temperatura finală de evacuare T_E. Pentru determinarea acestei temperaturi se integrează ecuația (4) între momentele inițial α și final γ ținînd seama că $\delta L_t = -V\,dp$:

$$I_\gamma - I_\alpha = V_a (p_0 - p_d) \tag{29}$$

în care

$$I_\alpha = m_d\, c_p\, T_d \tag{30}$$

$$I_\gamma = m_r\, c_p\, T_r + (m_d - m_r)\, c_p\, T_E \tag{31}$$

Deoarece

$$p_d\, V_a = m_d\, R\, T_d \tag{32}$$

și ținînd seama de relațiile (30) și (31) ecuația (29) devine :

$$m_r\, c_p\, T_r + (m_d - m_r)\, c_p\, T_E - m_d\, c_p\, T_d + \left(1 - \frac{p_0}{p_d}\right) m_d\, R\, T_d = 0 \tag{33}$$

Se raportează ecuația obținută la $m_d\, R\, T_d$ observînd că

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \tag{34}$$

Rezultă :

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\frac{m_r}{m_d} \cdot \frac{T_r}{T_d} + \left(1 - \frac{m_r}{m_d}\right)\frac{T_E}{T_d} - 1\right] - \frac{p_0}{p_d} + 1 = 0 \tag{35}$$

Mărimea m_r/m_d se determină raportînd relațiile (9) și (32) :

$$\frac{m_r}{m_d} \cdot \frac{T_r}{T_d} = \frac{p_0}{p_d} \cdot \frac{V_c}{V_a} \tag{36}$$

Ținînd seama de relațiile (14), (15) și (36) rezultă

$$\frac{T_r}{T_d} = \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{37}$$

$$\frac{m_r}{m_d} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \tag{38}$$

După înlocuirea rapoartelor m_r/m_d și T_r/T_d precizate de expresiile (38) și (39) ecuația (35) devine :

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left\{\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{p_0}{p_d} + \left[1 - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right]\frac{T_E}{T_d} - 1\right\} - \frac{p_0}{p_d} + 1 = 0 \tag{39}$$

Din ultima ecuație se determină raportul T_E/T_d:

$$\frac{T_E}{T_d} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1 + \left(\varkappa \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} - 1\right)\dfrac{p_0}{p_d}}{1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}} \tag{40}$$

Pentru determinarea temperaturii teoretice din conducta de evacuare la finele etapei de evacuare liberă se impune condiția echivalentă $\varepsilon = 1$, care permite excluderea influenței evacuării forțate. În acest mod se obține și temperatura teoretică de evacuare a gazelor din cilindrul motorului în doi timpi :

$$\frac{T_E'}{T_d} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_d}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}} \tag{40,a}$$

Pentru un raport de presiuni p_d/p_0 dat, valoarea limită inferioară a temperaturii de evacuare se obține în ipoteza evacuării complete a cilindrului, definită de condiția echivalentă $\varepsilon \to \infty$ astfel încît expresia (40) devine [4], [6], [7], [9] :

$$\left(\frac{T_E}{T_d}\right)_l = \frac{1}{\varkappa}\left[1 + (\varkappa - 1)\frac{p_0}{p_d}\right] \tag{40,b}$$

La limită, pentru $p_d/p_0 \to \infty$ se observă că :

$$\left(\frac{T_E}{T_d}\right)_{min} = \frac{1}{\varkappa} \tag{40,c}$$

Reprezentînd grafic funcția $T_E/T_d = f(p_d/p_0, \varepsilon)$ precizată de expresia (40) pentru gaze biatomice ideale ($\varkappa = 1{,}4$) se obțin curbele arătate în figura 8. Pentru comparație a fost trasată și curba de destindere izentropică pe baza ecuației (15). Se remarcă faptul că, datorită ireversibilității procesului teoretic de evacuare adiabatică a gazului din cilindrul unui motor cu piston, scăderea temperaturii în acest proces este sensibil mai redusă decît cea corespunzătoare destinderii izentropice în același interval de presiuni. Este de observat de asemenea că, pentru valorile uzuale ale raportului de comprimare $\varepsilon \geqslant 6$, temperatura de evacuare este puțin influențată de valoarea lui ε. Din acest punct de vedere expresia (40, b), utilizată în mod curent în teoria motoarelor cu piston, conduce la rezultate corecte dar prezintă dezavantajul că nu permite stabilirea, prin particularizare, a expresiei (40, a) a temperaturii teoretice de evacuare liberă a gazelor. Deoarece procesul de evacuare a cilindrilor motoarelor în doi timpi se realizează teoretic numai pe cale liberă, rezultă că expresia generală (40) contribuie, printre altele, și la precizarea deosebirilor existente între valorile temperaturilor de evacuare, care caracterizează motoarele în patru timpi și respectiv în doi timpi ; se observă (fig. 8) că aceste deosebiri sînt importante și merită a fi luate în considerare.

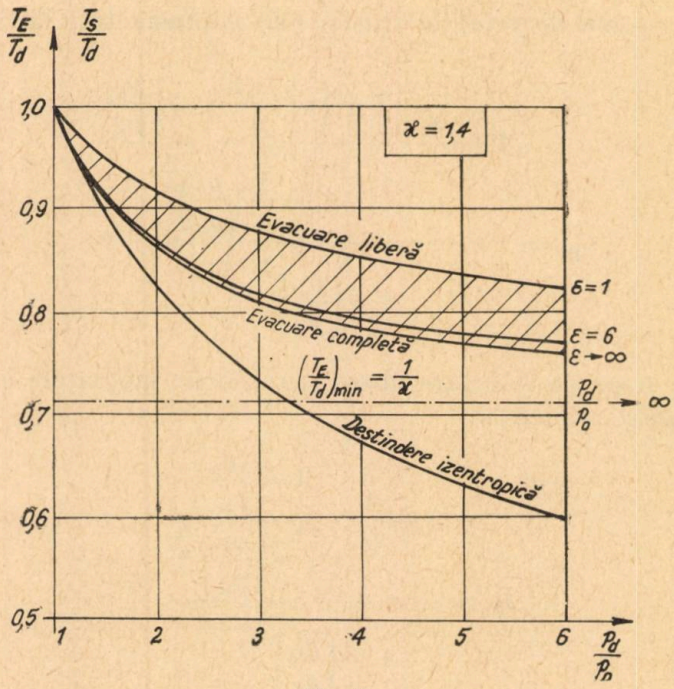


Fig. 8.

În ceea ce privește mecanismul de desfășurare a procesului de evacuare liberă, acesta a fost analizat în lucrarea [8], stabilindu-se ecuația diferențială liniară și neomogenă :

$$\frac{dT}{dp} + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \left(p^{\frac{1}{\varkappa}} - p_d^{\frac{1}{\varkappa}} \right)} T = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{p_d^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \left(p^{\frac{1}{\varkappa}} - p_2^{\frac{1}{\varkappa}} \right)} T_d$$

care precizează legea de variație a temperaturii gazului din conducta de evacuare T, în funcție de presiunea momentană p din cilindru ; soluția acestei ecuații este identică cu cea obținută prin particularizarea expresiei (40).

Randamentul intern al procesului de evacuare

Raportînd scăderea temperaturii gazului evacuat din cilindrul unui motor în patru timpi, la cea corespunzătoare destinderii izentropice, se obține expresia randamentului intern al procesului de evacuare :

$$\eta_{ev} = \frac{T_d - T_E}{T_d - T_s} = \frac{1 - \frac{T_E}{T_d}}{1 - \frac{T_s}{T_d}}. \tag{41}$$

Ţinînd seama de relaţiile (15) şi (40) expresia (41) devine :

$$\eta_{ev} = \frac{1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1 + \left(\varkappa \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{p_0}{p_d}}{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} \tag{42}$$

Pentru etapa de evacuare liberă şi respectiv motoarele în doi timpi expresia (42) se reduce la :

$$\eta'_{ev} = \frac{1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_d}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} \tag{42,a}$$

În ipoteza evacuării complete a cilindrului expresia (42) devine [5], [10] :

$$\eta''_{ev} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_d}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_d}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} \tag{42,b}$$

Pentru $p_d/p_0 \to \infty$ se constată că η_{ev}, η'_{ev} şi η''_{ev} au aceeaşi limită inferioară şi anume :

$$\eta_{ev}^{min} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \tag{42,c}$$

În ceea ce priveşte limita superioară a randamentului intern al procesului teoretic de evacuare, se constată un lucru interesant şi anume că spre deosebire de η_{ev} şi η''_{ev} care pentru $p_d/p_0 \to 1$ tind spre aceeaşi valoare şi anume 100%, randamentul η'_{ev} nu poate depăşi 50%. Faptul că pentru $p_d/p_0 > 1$, $\eta_{ev} < 1$ iar $\eta'_{ev} < 0{,}5$ pune în evidenţă o dată în plus caracterul ireversibil al procesului teoretic de evacuare.

Reprezentînd grafic funcţia $\eta_{ev} = f(p_d/p_0, \varepsilon)$ precizată de expresia (42), se obţin curbele arătate în figura 9; se observă că η_{ev} este puţin influenţat de valorile uzuale ale raportului de comprimare ε.

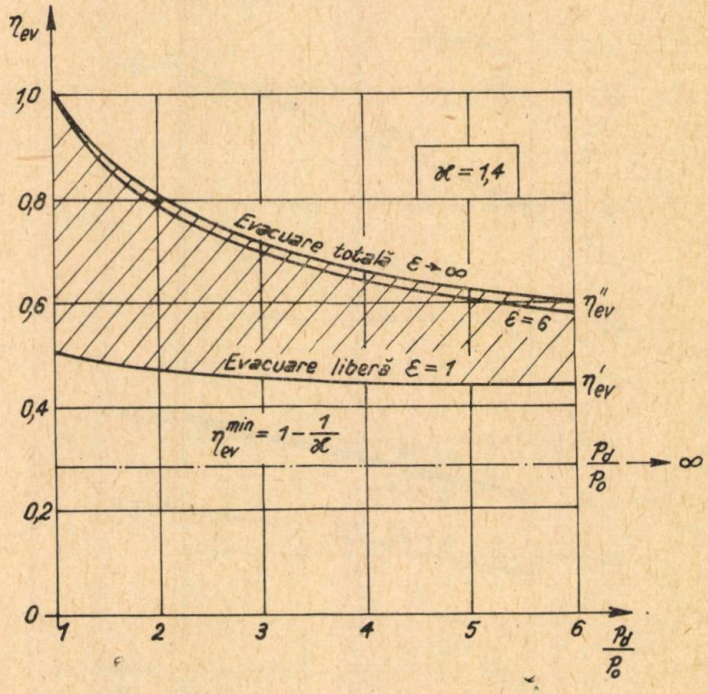


Fig. 9.

Influenţa factorilor ε, λ şi ϱ asupra lui T_E

Dacă se ţine seama de relaţia (23), raportul T_E/T_d poate fi exprimat numai în funcţie de factorii ε, λ şi ϱ astfel că, în final, rezultă:

$$\frac{T_E}{T_d} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{\varrho\,\lambda^{1/\varkappa}}\right)^{\varkappa-1} \frac{\varepsilon(\lambda\varrho^{\varkappa} - 1) + \varkappa(\varepsilon - 1)}{\varepsilon\varrho\,\lambda^{1/\varkappa} - 1} \tag{43}$$

Efectuînd produsul relaţiilor (23), (25) şi (43) se obţine expresia raportului T_E/T_0:

$$\frac{T_E}{T_0} = 1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(\lambda\varrho^{\varkappa} - 1) \tag{44}$$

Limita inferioară a acestui raport se obţine punînd condiţia $\varepsilon \to \infty$ şi rezultă:

$$\left(\frac{T_E}{T_0}\right)_l = 1 + \frac{1}{\varkappa}(\lambda\varrho^{\varkappa} - 1) \tag{44,a}$$

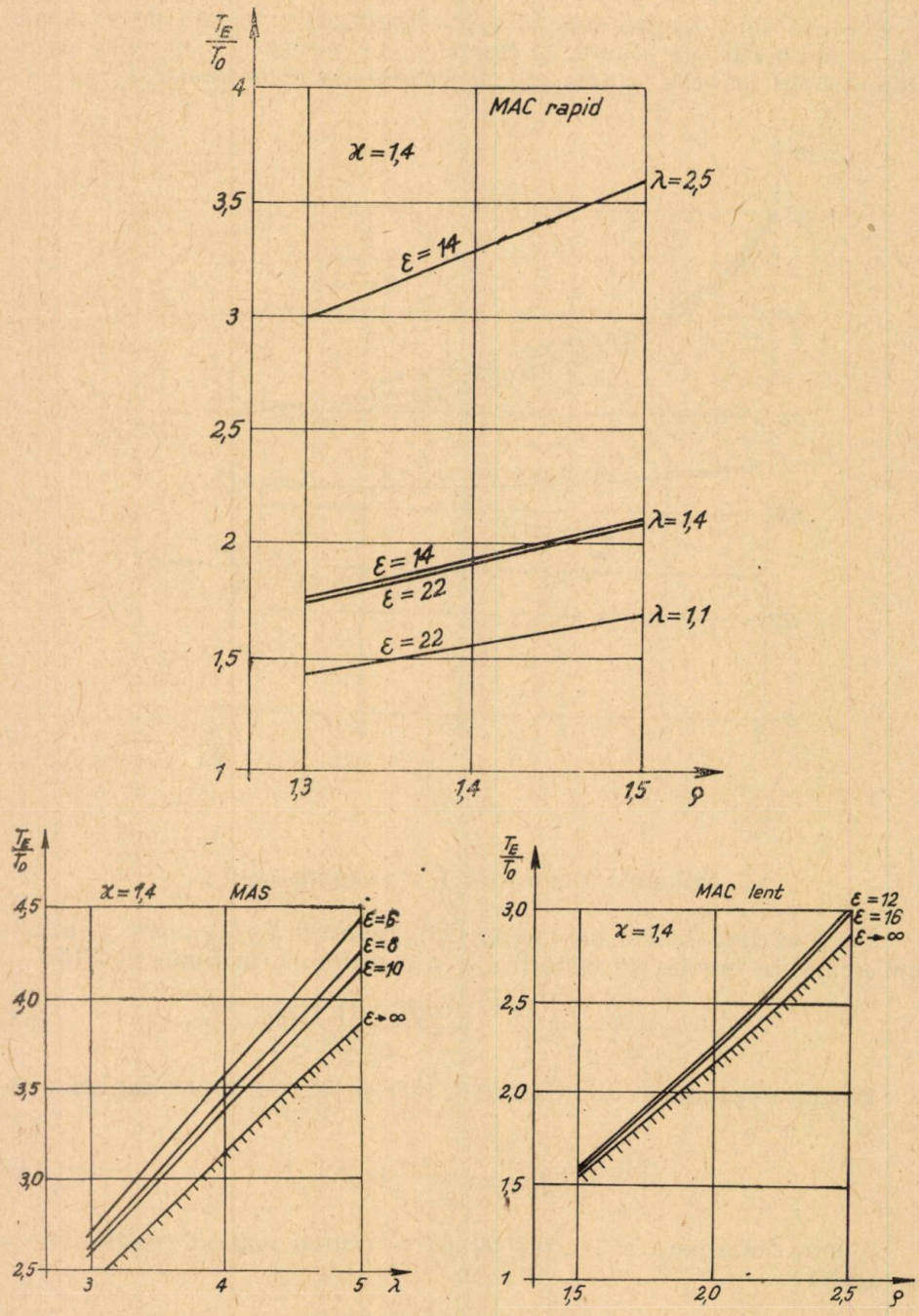

$\frac{T_E}{T_0}$
MAC rapid
$\varkappa = 1{,}4$
$\lambda = 2{,}5$
$\varepsilon = 14$
$\lambda = 1{,}4$
$\varepsilon = 14$
$\varepsilon = 22$
$\lambda = 1{,}1$
$\varepsilon = 22$
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
1,3
1,4
1,5
ρ
$\frac{T_E}{T_0}$
$\varkappa = 1{,}4$
MAS
$\varepsilon = 5$
$\varepsilon = 8$
$\varepsilon = 10$
$\varepsilon \to \infty$
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
3
4
5
λ
$\frac{T_E}{T_0}$
MAC lent
$\varepsilon = 12$
$\varepsilon = 16$
$\varepsilon \to \infty$
$\varkappa = 1{,}4$
3,0
2,5
2,0
1,5
1
1,5
2,0
2,5
ρ

Fig. 10.

Prin particularizare expresia (44) devine

$$\left(\frac{T_E}{T_0}\right)_v = 1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(\lambda - 1) \tag{44,b}$$

în cazul MAS-ului și,

$$\left(\frac{T_E}{T_0}\right)_p = 1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(\varrho^{\varkappa} - 1) \tag{44,c}$$

în cazul MAC-ului lent.

Influența factorilor ε, λ și ϱ asupra temperaturii teoretice de evacuare este arătată în figura 10. Se constată că, spre deosebire de ε a cărui influență este neglijabilă, modificarea valorilor lui ϱ și λ este însoțită de variații importante ale temperaturii de evacuare și anume creșterea lor conduce la creșterea raportului T_E/T_0.

Fracțiunea teoretică de gaze evacuate pe cale liberă

Această fracțiune este precizată de raportul (fig. 7) :

$$\varphi = \frac{m_d - m_s}{m_d} \tag{45}$$

Ținînd seamă de relația (32) și de faptul că :

$$p_0 V_a = m_s R T_s \tag{46}$$

rezultă :

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{p_0}{p_d} \cdot \frac{T_d}{T_s} \tag{47}$$

Prin aplicarea relațiilor (15) și (23) expresia (45) devine :

$$\varphi = 1 - \frac{1}{\varrho\, \lambda^{1/\varkappa}} \tag{48}$$

Particularizînd se obține

$$\varphi_v = 1 - \frac{1}{\lambda^{1/\varkappa}} \tag{48,a}$$

pentru MAS și,

$$\varphi_p = 1 - \frac{1}{\varrho} \tag{48,b}$$

pentru MAC-ul lent.

Influența factorului λ asupra lui φ pentru diferite valori ale lui ρ este arătată în figura 11. Se observă că φ crește o dată cu creșterea lui λ și ρ fără ca să depindă de ε.

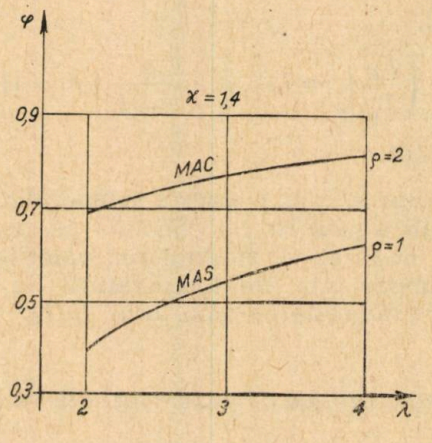


Fig. 11.

3. Bilanțul energetic al diagramei teoretice

Pentru verificarea expresiilor de calcul obținute, se analizează bilanțul energetic al diagramei teoretice definit de egalitatea :

$$L = Q - |Q_0| \tag{49}$$

în care L reprezintă lucrul mecanic al diagramei teoretice ;

$Q = Q_v + Q_p$ — cantitatea de căldură primită de agent de la sursa caldă ;

Q_0 — cantitatea de căldură cedată mediului ambiant într-un proces izobar de răcire de la temperatura teoretică de evacuare T_E pînă la cea atmosferică, adică :

$$|Q_0| = m_E c_p (T_E - T_0) \tag{50}$$

unde $m_E = m_d - m_r$ reprezintă cantitatea de gaze evacuate din cilindru. Este evident că această cantitate este egală cu cea admisă $m_a - m_r$ în cilindru deoarece $m_a = m_c = \ldots = m_d$. Pentru determinarea ei se aplică relațiile (23), (32) și (38) astfel, că :

$$m_E = m_d \left(1 - \frac{m_r}{m_d}\right) = \frac{p_d V_a}{R T_d} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \varrho \lambda^{1/\varkappa}}\right) \tag{51}$$

Relația (23) permite și precizarea raportului p_d/T_d:

$$\frac{p_d}{T_d} = \frac{p_0}{T_a} \tag{52}$$

astfel încît ținînd seama de relațiile (25), (52) și de faptul că

$$V_a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} V_s \tag{53}$$

în final se obține :

$$m_E = \frac{p_0 V_s}{R T_0} \tag{54}$$

Se constată deci că, valoarea cantității de gaze evacuate, egală cu cantitatea de încărcătură proaspătă admisă în cilindru reprezintă, în condițiile diagramei teoretice, cantitatea de agent care ar ocupa volumul V_s în condițiile de presiune și temperatură atmosferică, adică $m_E = m_0$ Aceasta înseamnă că valoarea coeficientului de umplere care caracterizează diagrama teoretică este 100% indiferent de valorile lui ε, λ și ρ ; concomitent rezultă că (fig. 2) $V_0 = V_s$. Aceasta este o consecință a faptului că amestecarea izobară, în procesul de admisie, a doua cantități de gaze ideale de aceeași natură dar avînd temperaturi diferite nu conduce la modificarea volumului total ocupat de gaze.

Aplicînd relațiile (34), (44) și (53) expresia (46) devine :

$$|Q_0| = p_0 V_s \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{1}{\varkappa - 1} (\lambda \rho^{\varkappa} - 1) \tag{55}$$

Dacă se ține seama și de faptul că [2] :

$$L = p_0 V_s \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{1}{\varkappa - 1} \left[(\lambda - 1) \varepsilon^{\varkappa - 1} + \varkappa \lambda (\rho - 1) \varepsilon^{\varkappa - 1} - (\lambda \rho^{\varkappa} - 1) \right] \tag{56}$$

$$Q = p_0 V_s \frac{\varepsilon^{\varkappa}}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{1}{\varkappa - 1} [\lambda - 1 + \varkappa \lambda (\rho - 1)] \tag{57}$$

expresia (49) devine o identitate.

Concluzii

În lucrare este studiată diagrama teoretică a motorului cu piston cu admisie normală, ipoteza principală utilizată referindu-se la faptul că destinderea agentului în cilindru în timpul etapei de evacuare liberă are un caracter izentropic. Pe această bază au fost analizate din punct de vedere termodinamic procesele de admisie și de evacuare, stabilindu-se expresiile generale ale temperaturii teoretice la finele admisiei T_a și temperaturii teoretice a gazelor evacuate din cilindru T_E.

Exprimarea temperaturilor T_a și T_E în funcție de factorii constructivi și funcționali caracteristici ai motorului cu piston ε, λ și ρ a permis precizarea influenței lor asupra acestor temperaturi. De asemenea au fost stabilite expresiile temperaturii și coeficientului teoretic al gazelor

reziduale. Prin particularizarea lor au fost obținute expresiile care caracterizează diagramele teoretice ale motoarelor cu aprindere prin scînteie și respectiv prin comprimare de turație mică și mijlocie.

Studiul efectuat poate constitui o premiză în elaborarea unei metode de calcul a diagramei motorului cu ardere internă cu piston, care să elimine anumite elemente cu caracter empiric existente în metodele simplificate cunoscute, cum sînt spre exemplu, cele referitoare la alegerea temperaturii gazelor reziduale și precizarea deosebirilor existente între temperatura de evacuare a gazelor din cilindrii motoarelor în patru timpi și respectiv doi timpi.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Aramă, C., Grünwald, B.* — Motoare cu ardere internă. București, Editura tehnică, 1966.
2. *Apostolescu, N., Bățagă, N.* — Motoare cu ardere internă. București, Editura didactică și pedagogică, 1967.
3. *Bărănescu, G.* — Motoare cu ardere internă (Manualul inginerului termotehnician, vol. 2). București, Editura tehnică, 1961.
4. *Bosnjacovic, F.* — Technische Thermodynamik, VEB Verlag, Leipzig, 1951.
5. *Epifanova, V. I., Ghilman, I. I.* — Rabocii protess porșnevogo detandera, „Kislorod", 3, 1—16, 1951.
6. *Nigmatulin, I. N.* — Rabocie protessî v turboporșnevîh dvigateliah. Moscova, Mașghiz, 1962.
7. *Portnov, D. A.* — Bistrohodnîe turboporșnevîe dvigateli s vosplameneniem ot sjatia, Moscova, Mașghiz, 1963.
8. *Radcenco, Vs.* — Cercetări privind efectul frigorific al evacuării libere, St. cerc. energ. electr. 18, 3, 611—624, 1968.
9. *Vasilescu, A. C., Pimsner, V.* — Supraalimentarea motoarelor diesel. București, Editura tehnică, 1965.
10. * * * — Razdelenie vozduha metodom glubokogo ohlajdenia, vol. II. Moscova, Mașinostroienie, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

MAȘINI-UNELTE

C.Z. : 621.9:621.22:532

CALCULUL PIERDERILOR VOLUMICE PRIN FANTE CILINDRICE SUBȚIRI *

ION GHEGHEA

Determinarea relațiilor pentru calculul debitului de lichid ce curge prin fante subțiri, prezintă o mare însemnătate practică, deoarece în multe agregate hidraulice etanșarea pieselor în mișcare se realizează datorită fantelor cu grosimi de ordinul micronilor. Acesta se întîlnește la etanșarea pistonașelor în cilindri la pompele cu pistonașe radiale și axiale, la distribuitoarele rectilinii și rotative și la diferite supape.

Cele mai des întîlnite sînt fantele formate de suprafețe cilindrice, deoarece acestea se pot prelucra mult mai ușor pe mașinile unelte.

În literatura de specialitate este tratată această problemă însă incomplet, determinîndu-se relațiile de calcul pentru debit numai în cazul cînd lichidul curge prin fantă în direcția axului de simetrie [1, 2, 3]. În practică însă se întîlnește frecvent și cazul curgerii după circomferință (la pompele cu roți dințate, distribuitoare rotative etc.). În cele mai frecvente cazuri fantele au grosime variabilă din cauze funcționale (așezarea asimetrică a celor două suprafețe care formează fanta) și datorită abaterilor de la prelucrarea prin așchiere.

În lucrarea de față se obțin relațiile pentru calculul debitului de lichid, prin fante cilindrice subțiri atît cu grosime constantă cît și variabilă considerînd curgerea lichidului laminară și vîscozitatea constantă.

Calculele se efectuează pornind de la ecuația generală de curgere a lichidelor vîscoase care este [4] (considerînd vîscozitatea lichidului constantă) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v} = \frac{\vec{F}}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\varrho}\left(\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{v} + \Delta \vec{v}\right) \tag{1}$$

* Manuscris predat la redacție la 20 ianuarie 1969.

și ecuația continuității :

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \tag{2}$$

unde :

$\vec{v}$ — viteza lichidului în fantă ;
p — presiunea lichidului ;
$\frac{F}{\varrho}$ — forța masică ;
η — viscozitatea dinamică ;
ϱ — densitatea lichidului ;
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — operatorul Laplace.

Considerînd densitatea lichidului constantă, ecuația (2) devine :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{3}$$

Introducînd (3) în (1) și neglijînd forțele de inerție și cele masice care au valori foarte mici [4], după unele operații se ajunge la relația :

$$\operatorname{grad} p = -\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} \tag{4}$$

Ecuațiile vectoriale (4) și (3) se pot scrie sub forma a patru ecuații scalare, care în coordonate cilindrice au forma :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\eta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\eta \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\eta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial z} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

unde :

v_r, v_θ, v_z

— componentele vitezei $\vec{v}$ în direcția r, z și după tangenta la suprafața cilindrică.

În practică se întîlnesc cel mai frecvent următoarele cazuri de curgere a lichidului prin fante cilindrice :

— după circomferință

— în direcție axială.

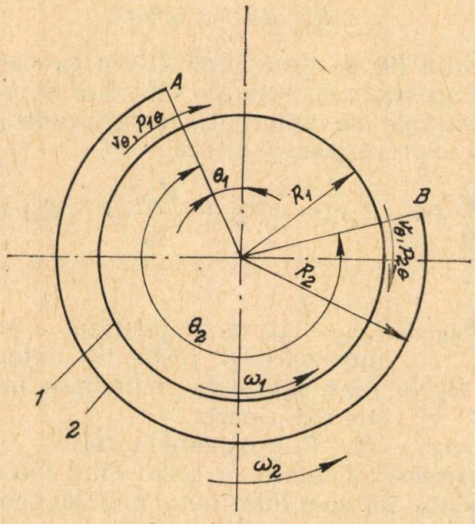


Fig. 1. Fanta cilindrică

Pentru primul caz considerînd mișcarea axial simetrică și presupunînd că lichidul intră în fanta formată de cei doi cilindri coaxiali prin punctul B (fig. 1) și iese prin A, întrucît $v_r = 0$, $v_z = 0$ iar v_θ depinde numai de r ecuațiile (5) și (6) devin :

$$\frac{dp}{dr} = 0 \tag{7 a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{d\theta} = \eta \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}\right] \tag{7 b}$$

$$\frac{dp}{dz} = 0 \tag{7 c}$$

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} = 0 \tag{8}$$

Întrucît $r_{max} = R_1 + \delta_0$ (unde : R_1 — raza suprafeței cilindrice interioare iar δ_0 — grosimea fantei) și $\delta_0 \ll R_1$, în ecuațiile (7) se poate înlocui r cu R_1 pentru a obține relații mai simple acceptabile calculelor inginerești. Termenii din ecuația (7 b) care se neglijează au față de

cei care se consideră ordinul de mărime $\frac{\delta_\theta}{R_1} \approx 10^{-3}$. Cu această simplificare ecuația (7 b) devine :

$$\frac{1}{R_1}\frac{dp}{d\theta} = \eta \frac{d^2 v_\theta}{dr^2} \tag{9}$$

Integrînd ecuația (9) se determină viteza v_θ care trebuie să ia pe conturul fantei valori egale cu cele ale vitezelor suprafețelor respective. Punînd această condiție se determină constantele de integrare și se obține următoarea expresie pentru viteză :

$$v_\theta = \frac{1}{2\eta R_1}\frac{dp}{d\theta}(r-R_1)(r-R_2) \pm \frac{V_{2\theta}}{\delta_\theta}(r-R_1) \mp \frac{V_{1\theta}}{\delta_\theta}(r-R_2) \tag{10}$$

unde :

$V_{1\theta} = R_1\omega_1$, $V_{2\theta} = R_2\omega_2$ — viteza tangențială a suprafeței cilindrice interioare și respectiv exterioare (Fig. 1) ;

R_1, R_2 — raza suprafeței cilindrice interioare și respectiv exterioare.

δ_0 — $R_2 - R_1$ grosimea fantei.

Semnele superioare se referă la cazul cînd vitezele $V_{1\theta}$ și $V_{2\theta}$ au sensul măririi presiunii iar cele inferioare, cînd au sens invers.

Înlocuind în (8) viteza v_θ din (10) se obține :

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = 0 \tag{11}$$

Integrînd ecuația (11) și punînd condiția ca în fanta cu unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ să existe o cădere de presiune $\Delta p_\theta = p_{2\theta} - p_{1\theta}$ se obține :

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\Delta p_\theta}{\Delta\theta} \tag{12}$$

Introducînd (12) în (10) se poate calcula debitul de lichid ce curge prin fanta cilindrică de lungime l, grosime δ_0 și unghiul la centru $\Delta\theta$

$$Q_\theta = \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} v_\theta \, dr\, dz = \frac{\Delta p_\theta \delta_0^3 l}{12\eta R_1 \Delta\theta} \pm \frac{V_{2\theta} + V_{1\theta}}{2} l\delta_\theta \tag{13}$$

În practică se întîlnesc în special fante cilindrice a căror grosime nu este constantă, fie datorită așezării neconcentrice a celor două suprafețe cilindrice, fie datorită impreciziei prelucrării prin așchiere a acestor suprafețe.

Considerînd suprafețele cilindrice așezate excentric ca în fig. 2 vom determina relația de calcul pentru debitul de lichid ce curge după circomferință.

Grosimea fantei, variază cu unghiul θ (se determină din triunghiul $A\,O_2\,O_1$) după relația :

$$\delta = R_2 \cos\gamma + e\cos\theta - R_1 \tag{14}$$

Din triunghiurile $A\,O_2\,B$ și O_1O_2B se deduce :

$$\sin\gamma = \frac{e\sin\theta}{R_2}$$

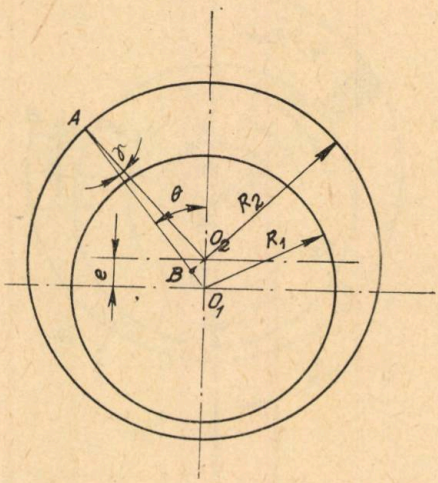


Fig. 2. Fantă formată între două suprafețe cilindrice așezate excentric

deci

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{e^2}{R_2^2}\sin^2\theta} \approx 1$$

deoarece $e^2 \ll R_2^2$ iar $\sin^2\theta \leqslant 1$

În consecință relația (14) se poate scrie :

$$\delta = R_2 - R_1 + e\cos\theta = \delta_0 + e\cos\theta \tag{15}$$

unde :

δ_0 — grosimea fantei cînd cele două suprafețe sînt concentrice.

Debitul de lichid ce curge prin fanta formată de cele două suprafețe cilindrice așezate excentric și avînd unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (fig. 3) este același în oricare din secțiunile radiale cuprinse în acest unghi, dar presiunea nu va mai depinde liniar de unghiul θ, ca în cazul fantei cilindrice de grosime constantă, ci după o altă lege.

Considerăm că în fantă există o cădere de presiune $\Delta p_0 = p_{2\theta} - p_1{}^0$, iar lichidul intră prin orificiul B și iese prin A. La fanta elementară cu

unghiul la centru $d\theta$ (porțiunea hașurată dublu în fig. 3) și de lungime l se poate considera că grosimea este constantă și pentru calculul debitului putem folosi relația (13).

În această fantă va exista o cădere de presiune Δ_p.

Pentru determinarea debitului prin fanta cu unghiul la centru $\Delta\theta$ este necesar să se determine cum variază presiunea cu unghiul θ.

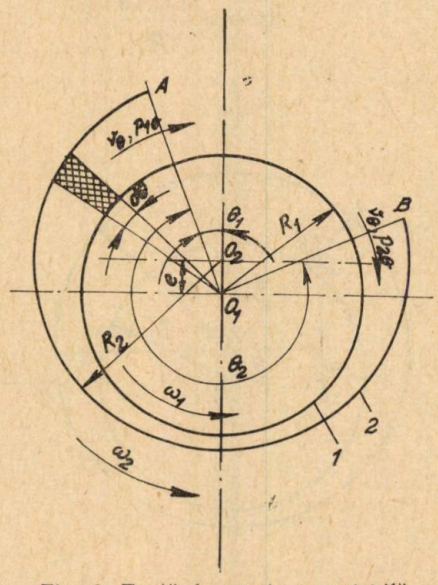


Fig. 3. Fantă de grosime variabilă

În acest scop se înlocuiește căderea de presiune Δp cu căderea elementară de presiune dp iar $\Delta\theta$ cu $d\theta$ în relația (13) și se găsește pentru sectorul elementar relația :

$$d p_\theta = \frac{12 \eta Q_\theta R_1}{l} \frac{d\theta}{\delta^3} \mp 6 \eta R_1 (V_{2\theta} + V_{1\theta}) \frac{d\theta}{\delta^2} \tag{16}$$

Înlocuind δ din (15) și integrînd obținem :

$$p_\theta = \frac{12 \eta Q_\theta R_1}{l} F(\theta, e, \delta_0) \mp 6 \eta R_1 (V_{2\theta} + V_{1\theta}) f(\theta, e, \delta_0) + C \tag{17}$$

unde :

$$F(\theta, e, \delta_0) = -\frac{4 e \delta_0^2 \sin\theta - e^3 \sin\theta + 3 \delta_0 e^2 \sin\theta \cos\theta}{2 (\delta_0^2 - e^2)^2 (\delta_0 + e\cos\theta)^2} + \tag{18}$$

$$+ \frac{2\delta_0^2 + e^2}{(\delta_0^2 - e^2)^{5/2}} \operatorname{arc\ tg} \left(\frac{\sqrt{\delta_0^2 - e^2}}{\delta_0 + e} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$f(\theta, e, \delta_0) = -\frac{e \sin\theta}{(\delta_0^2 - e^2)(\delta_0 + e\cos\theta)} + \\ + \frac{2\delta_0}{(\delta_0^2 - e^2)^{3/2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\delta_0^2 - e^2}}{\delta_0 + e} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) \tag{19}$$

C — constantă.

Punînd condiția ca în fanta cu unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ să fie o cădere de presiune $\Delta p_0 = p_{20} - p_{10}$ se găsește :

$$Q_0 = \frac{\Delta p_0 \, l}{12\eta R_1} \Phi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) \pm \frac{V_{20} + V_{10}}{2} l \, \psi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) \tag{20}$$

unde :

$$\phi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) = \frac{1}{F(\theta_2, e, \delta_0) - F(\theta_1, e, \delta_0)} \tag{21}$$

$$\psi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) = \frac{f(\theta_2, e, \delta_0) - f(\theta_1, e, \delta_0)}{F(\theta_2, e, \delta_0) - F(\theta_1, e, \delta_0)} \tag{22}$$

Pentru $e=0$ se obține funcția $\Phi = \frac{\delta_0^3}{\Delta\theta}$ iar $\psi = \delta_0$ care înlocuite în (20) dau relația (13) pentru calculul debitului prin fanta cilindrică de grosime constantă.

Notînd $e = a\delta_0$ și înlocuind în relația (21) și respectiv (22) obținem :

$$\phi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) = \delta_0^3 \Phi_1(\theta_2, \theta_1, a) \tag{23}$$

$$\psi(\theta_2, \theta_1, e, \delta_0) = \delta_0 \psi_1(\theta_2, \theta_1, a) \tag{24}$$

În fig. 4, este reprezentată dependența funcției Φ_1 de θ_2 cînd $\theta_1 = 0$, pentru diferite valori ale lui a.

Din grafic rezultă că pentru unghiul $\theta_2 < \pi$, funcția este cu atît mai mică cu cît execentricitatea este mai mică. Pentru $\theta_2 > \pi$ valoarea acestei funcții este mai mică decît pentru fanta de grosime constantă. Micșorarea acesteia este substanțială în special la valori mari ale excentricității (fig. 5).

În cazul cînd $\Delta\theta = 3{,}5$ radiani și $a = 0{,}8$ funcția Φ_1 reprezintă numai 4,56% din valoarea acesteia la $a=0$, iar pentru $\Delta\theta = 6$ radiani, 5,7%. Comparînd valorile funcției Φ_1, pentru două fante cu aceiași excentricitate dar cu unghiul la centru $\Delta\theta = 6$ radiani și respectiv $\Delta\theta = 3{,}5$ rad, rezultă că pentru ultima fantă funcția Φ_1 este mai mare cu cca. 38% cînd $a = 0{,}8$ și cu 70% cînd $a = 0$.

Această constatare și graficele din fig. 4 și fig 5, arată că în cazul fantelor formate de suprafețele cilindrice așezate excentric, pierderea de lichid este cu mult mai mică decît pentru cazul cînd excentricita-

tea este nulă, însă fanta trebuie să cuprindă punctul de minim (punctul $\theta_2=\pi$). Influența lungimii fantei la valoarea debitului de lichid ce curge prin fanta de grosime variabilă este mai mică decît la cea de grosime constantă. Așezînd excentric cele două suprafețe cilindrice care for-

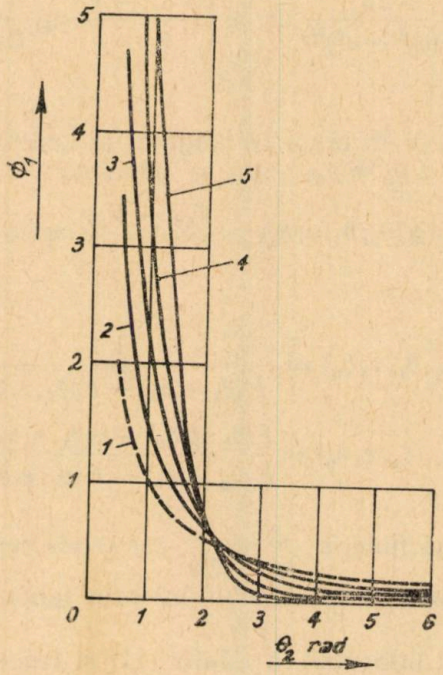


Fig. 4. Dependența funcției Φ_1 de θ_2 pentru $\theta_1=0$
$1-a=0$; $2-a=0,2$; $3-a=0,4$; $4-a=0,6$; $5-a=0,8$.

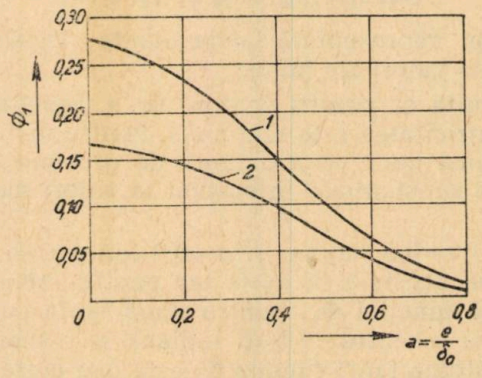


Fig. 5. Variația funcției Φ_1 cu raportul

$$a=\frac{e}{\delta_0}$$

$1-\Delta\theta=3,5$ *rad*; $2-\Delta\theta=6$ *rad*.

mează fanta se poate micşora lungimea acesteia îmbunătăţindu-se în acelaşi timp şi condiţiile de etanşare. Din fig. 5 rezultă că prin înlocuirea fantei de grosime constantă cu unghiul la centru de 6 radiani cu o fantă cu acest unghi de 3,5 radiani dar avînd $a=0,8$ se obţine o pierdere de lichid de cca 12 ori mai mică.

În fig. 6 este reprezentată variaţia funcţiei Φ_1, pentru $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=0,5$ radiani, cu θ_1.

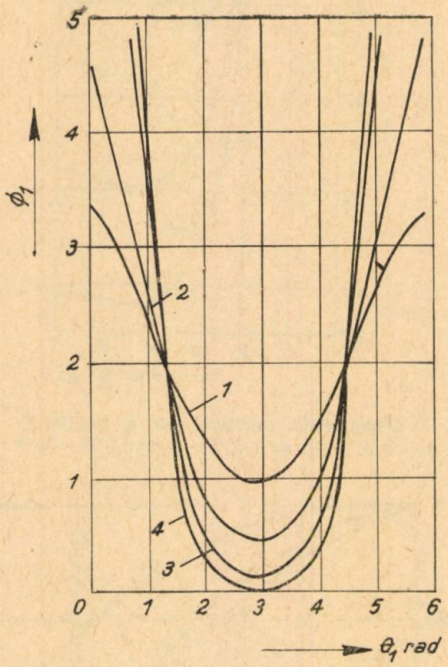


Fig. 6. Dependenţa funcţiei Φ_1 de θ_1 pentru $\Delta\theta = 0,5$ rad.
1 — $a = 0,2$; 2 — $a = 0,4$; 3 — $a = 0,6$; 4 — $a = 0,8$

Din grafic reiese că debitul de lichid prin fantă va fi cu atît mai mic cu cît excentricitatea este mai mare, în cazul cînd fanta este plasată în intervalul $1,4 \text{ rad} < \theta_1 < 4,4$ rad şi cu cît excentricitatea este mai mică cînd fanta se găseşte în afara acestui interval.

Pentru $a=0,8$, $\Delta\theta=0,5$ rad iar fanta se găseşte la $\theta_1=2,9$ rad, debitul de lichid este de aproximativ 75 ori mai mic decît în cazul fantei cu acelaşi unghi la centru dar de grosime constantă. Deci pentru a obţine pierderi de lichid cît mai mici, atunci cînd fanta are grosime variabilă, este necesar ca aceasta să fie plasată astfel încît să aibă grosimea cea mai mică.

Dependenţa funcţiei ψ_1, pentru $\theta_1=0$, de θ_2 şi a este reprezentată în fig. 7 şi fig. 8. În fig. 9 se dă variaţia acestei funcţii cu unghiul θ_1 pentru $\Delta\theta=0,5$ rad.

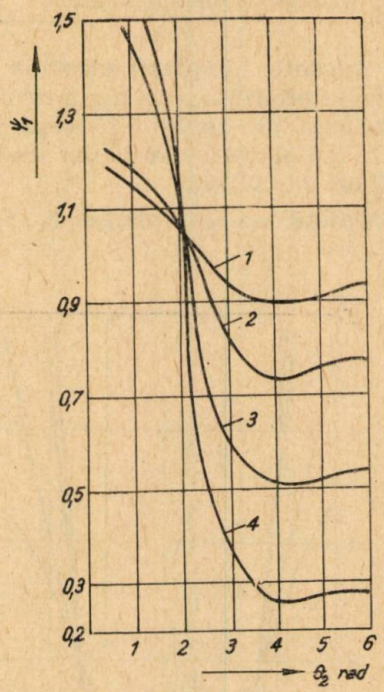


Fig. 7. Dependența funcției ψ_1 de θ_2 pentru $\theta_1 = 0$
$1 - a = 0{,}2$; $2 - a = 0{,}4$; $3 - a = 0{,}6$; $4 - a = 0{,}8$.

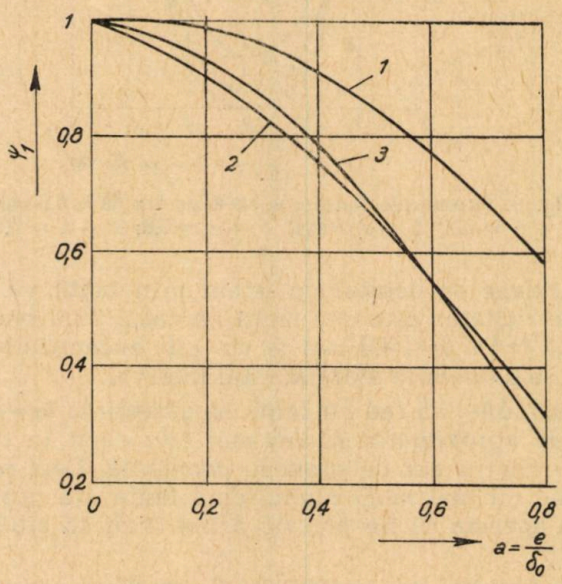


Fig. 8. Variația funcției ψ_1 cu raportul $a = \frac{e}{\delta_0}$
$1\ \theta_2 = 2{,}5$ *rad*; $2 - \theta_2 = 3{,}5$ *rad*; $3 - \theta_2 = 6$ *rad*.

Se observă că funcţia ψ_1, are aproximativ aceiaşi variaţie ca funcţia Φ_1, cu deosebirea că influenţa excentricităţii fantei la micşorarea debitului, este mai mică.

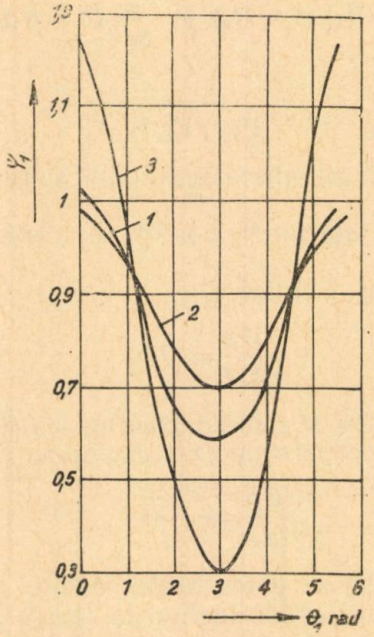


Fig. 9. Dependenţa funcţiei ψ_1 de θ_1 pentru $\Delta\theta = 0{,}5$ rad.
$1 - a = 0{,}2$; $2 - a = 0{,}4$; $3 - a = 0{,}6$

La curgerea în direcţie axială prin fanta formată de doi cilindri coaxiali întrucît $v_r = 0$, $v_\theta = 0$ iar v_z depinde numai de r ecuaţiile (5) şi (6) devin :

$$\frac{dp}{dr} = 0 \tag{25 a}$$

$$\frac{dp}{d\theta} = 0 \tag{25 b}$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \tag{25 c}$$

$$\frac{dv_z}{dz} = 0 \tag{26}$$

Făcînd aceiaşi aproximaţie ca la curgerea după circomferinţă adică înlocuind r cu R_1 ecuaţia (25 c) devine :

$$\frac{dp}{dz} = \eta\frac{d^2 v_z}{dr^2} \tag{27}$$

Integrînd ecuaţia (27) se obţine expresia vitezei, care după determinarea constantelor de integrare din condiţiile ca pe contur v_z să aibă valori egale cu cele ale suprafeţelor respective, are forma :

$$v_z = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dz}(r-R_1)(r-R_2) \pm \frac{V_{2z}}{\delta_0}(r-R_1) \mp \frac{V_{1z}}{\delta_0}(r-R_2) \quad (28)$$

unde :

$$V_{1z}, V_{2z}$$

— viteza suprafeţei cilindrice interioare şi respectiv exterioare în direcţia z.

Semnele duble din faţa lui V_{2z} şi V_{1z} au aceiaşi semnificaţie ca în expresia lui v_θ.

Înlocuind (28) în (26) se obţine :

$$\frac{d^2p}{dz^2} = 0 \quad (29)$$

Integrînd ecuaţia (29) şi punînd condiţia ca în fanta de lungime $l = z_2 - z_1$, să existe o cădere de presiune $\Delta p_l = p_{2z} - p_{1z}$ se obţine

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p_l}{l} \quad (30)$$

Înlocuind (30) în (28) se poate obţine debitul de lichid în direcţia axială prin fanta circulară avînd unghiul la centru $\Delta\theta$, lungime l şi grosime δ_0 cu relaţia :

$$Q_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{R_1}^{R_2} v_z r\, d\theta\, dr = \frac{\Delta\theta\,\Delta p_l}{24\eta l}\delta_0^3(R_2+R_1) \pm \frac{V_{2z}}{6}\Delta\theta\,\delta_0(2R_2+R_1) \pm$$

$$\pm \frac{V_{1z}}{6}\Delta\theta\,\delta_0(R_2+2R_1) \quad (31)$$

Întrucît $R_2 = R_1 + \delta_0$ şi $\delta_0 \ll R_1$ se poate considera că $R_2 = R_1$ şi din (31) se obţine relaţia [1, 2, 3] :

$$Q_z = \frac{\Delta p_l\,\Delta\theta\,\delta_0^3 R_1}{12\eta l} \pm \frac{V_{2z}+V_{1z}}{2} R_1\,\Delta\theta\,\delta_0 \quad (32)$$

În marea majoritate a cazurilor cilindrii care formează fanta nu sînt coaxiali iar diametrul lor variază cu înălţimea creînd o fantă a cărei grosime variază atît după circomferinţă cît şi în direcţia axială (fig. 10).

Debitul lichidului ce curge prin asemenea fantă cu unghiul la centru $\Delta\theta$ şi lungimea l se obţine pornind de la ecuaţia (32).

În acest scop se consideră un sector de fantă cu unghiul la centru $d\theta$ şi de înălţime dz. La trecerea debitului dQ_z prin această fantă va exis-

ta o cădere de presiune Δp Înlocuind în (32) Q_z cu dQ_z și Δp_z cu dp se determină :

$$dp = \frac{12\eta\, dQ_z}{R_z\, d\theta}\frac{dz}{\delta_z^3} \mp 6\eta(V_{2z} + V_{1z})\frac{dz}{\delta_z^2} \tag{33}$$

unde :

δ_z — grosimea fantei într-o secțiune oarecare z=constant și se determină cu relația (fig. 10).

$$\delta_z = \delta_0 + \frac{z}{l}(\delta_1 - \delta_0) + e\cos\theta \tag{34}$$

$\delta_1 = R_{2l} - R_{1l}$ — grosimea fantei la $z=l$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$

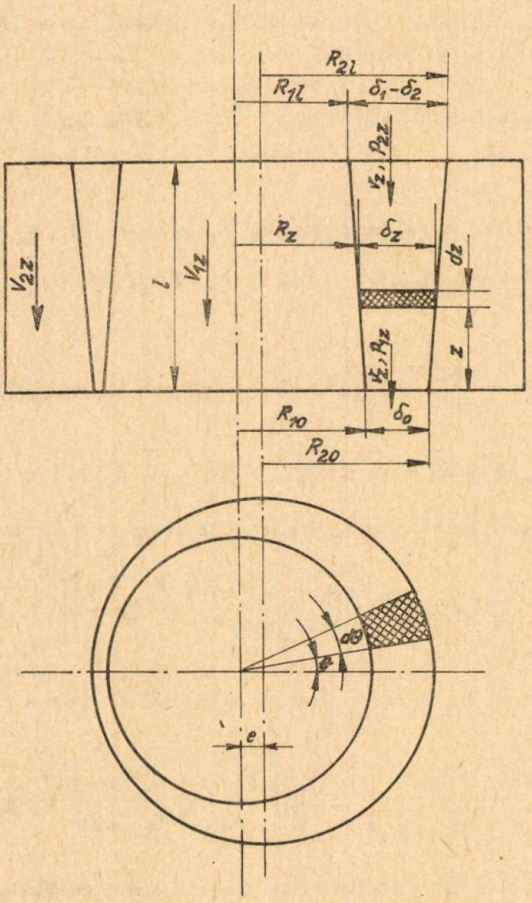


Fig. 10. Fanta de grosime variabilă în cazul curgerii axiale

R_z — raza cilindrului într-o secțiune oarecare z = constant care în cazul cînd δ_1 este mic (în realitate este de $20 \div 30$ μm) se poate înlocui cu R_{10}.

$\delta_0 = R_{20} - R_{10}$ — grosimea fantei la $l=0$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Înlocuind δ_z din (34) în (33), integrînd și punînd condiția ca pe fanta de lungime l să fie o cădere de presiune Δp_l se obține următoarea relație pentru dQ_l:

$$dQ_l = \frac{R_{10}\Delta p_l}{6\eta l}\frac{(\delta_0 + e\cos\theta)^2(\delta_1 + e\cos\theta)^2}{\delta_1 + \delta_0 + 2e\cos\theta}d\theta \pm$$
$$\pm (V_{2z} + V_{1z})R_{10}\frac{(\delta_0 + e\cos\theta)(\delta_1 + e\cos\theta)}{\delta_1 + \delta_0 + 2e\cos\theta}d\theta \qquad (35)$$

Integrînd (35) între θ_1 și θ_2 se obține debitul prin fanta cu unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ și de lungime l

$$Q_l = \frac{\Delta p_l R_{10}}{12\eta l}\Phi_2(\theta_2, \theta_1, \delta_1, \delta_0, e) \pm \frac{V_{2z} + V_{1z}}{2}R_{10}\psi_2(\theta_2, \theta_1, \delta_1, \delta_0, e) \qquad (36)$$

unde

$$\Phi_2(\theta_2, \theta_1, \delta_1, \delta_0, e) = F_2(\theta_2, \delta_1, \delta_0, e) - F_2(\theta_1, \delta_1, \delta_0, e) \qquad (37)$$

$$\psi_2(\theta_2, \theta_1, \delta_1, \delta_0, e) = f_2(\theta_2, \delta_1, \delta_0, e) - f_2(\theta_1, \delta_1, \delta_0, e) \qquad (38)$$

și

$$F_2(\theta, \delta_1, \delta_0, e) = \frac{1}{8}\left\{[\delta_1 - \delta_0)^2(3\delta_0 - \delta_1) + 6(\delta_1 - \delta_0)(2\delta_0^2 + e^2) + \right. \qquad (39)$$
$$+ 8\delta_0^3 + 12e^2\delta_0]\theta + [8e^3 + 24\delta_0^2 e + 2e(\delta_1 - \delta_0)(11\delta_0 + \delta_1)]\sin\theta -$$
$$- \frac{8}{3}e^3\sin^3\theta + 6e^2(\delta_1 + \delta_0)\cos\theta\sin\theta + \frac{2(\delta_1 - \delta_0)^4}{\sqrt{(\delta_1 + \delta_0)^2 - 4e^2}} \times$$
$$\left. \times \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{(\delta_1 + \delta_0)^2 - 4e^2}}{\delta_1 + \delta_0 + 2e}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$f_2(\theta, \delta_1, \delta_0, e) = \frac{1}{2}\left[(\delta_1 + \delta_0)\theta + 2e\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \frac{2(\delta_1 - \delta_0)^2}{\sqrt{(\delta_1 + \delta_0)^2 - 4e^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{(\delta_1 + \delta_0)^2 - 4e^2}}{\delta_1 + \delta_0 + 2e}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (40)$$

Relația (36) care dă debitul este destul de complicată dar în anumite cazuri, care sînt cele mai des întîlnite în practică, se poate simplifica.

Pentru $\delta_1=\delta_0$ și $e=0$ relația (36) se reduce la (32) și dă debitul de lichid prin fanta de grosime constantă.

În cazul cînd $\Delta\theta=2\pi$ ($\theta_2=2\pi$; $\theta_1=0$) din (37), (38), (39) și (40) se obține :

$$\Phi_2(\delta_1, \delta_0, e) = 2\pi\, \delta_0^3\, \Phi_3(b, a) \tag{41}$$

$$\psi_2(\delta_1, \delta_0, e) = 2\pi\, \delta_0\, \psi_3(b, a) \tag{42}$$

unde

$$\Phi_3(b, a) = \frac{1}{8}\left[(b-1)^3(3-b) + 6(b-1)(2+a^2) + 8 + 12a^2 + \right. \tag{43}$$

$$\left. + \frac{2(b-1)^4}{\sqrt{(b+1)^2 - 4a^2}}\right];$$

$$\psi_3(b, a) = \frac{1}{2}\left[b + 1 - \frac{2(b-1)^2}{\sqrt{(b+1)^2 - 4a^2}}\right] \tag{44}$$

$$b = \frac{\delta_1}{\delta_0}\ ;\quad a = \frac{e}{\delta_0} \tag{45}$$

Reprezentînd Φ_3 în funcție de b pentru diferite valori ale lui a se obțin drepte înclinate (Fig. 11), ceea ce arată că pierderile volumice cresc liniar cu mărirea lui δ_1 (primul și ultimul termen din (43) au valori foarte mici în comparație cu ceilalți).

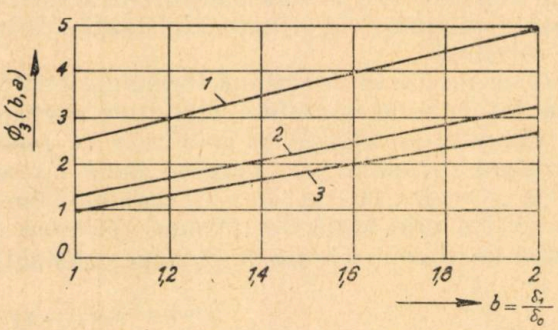


Fig. 11. Dependența funcției $\varnothing_2$ de b
1 — $a=1$; 2 — $a=0{,}5$; 3 — $a=0$

Pentru $b=1$ relațiile (43) și (44) se reduc la :

$$\phi_3(a) = 1 + \frac{3}{2}a^2 \tag{46}$$

$$\psi_3 = 1 \tag{47}$$

Prin înlocuirea valorii funcției Φ_3 din (46) în (41) și apoi (36), în cazul cînd $V_{2z} = V_{1z} = 0$ se obține relația dedusă în [1, 2, 3] pe o altă cale.

Dependența funcției Φ_3 de a este dată în fig. 12.

Se observă că prin așezarea excentrică a celor două suprafețe care formează fanta, debitul de lichid ce curge în direcție axială crește. Din acest motiv trebuie luate măsuri ca excentricitatea acestor suprafețe să fie cît mai mică.

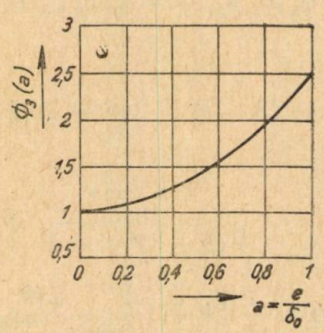


Fig. 12. Variația funcției Φ_3 cu raportul $a = \frac{e}{\delta_0}$ pentru $\Delta\theta = 2\pi$

Concluzii :

În lucrare se deduce, pornind de la ecuația curgerii lichidelor vîscoase și ecuația continuității, relația pentru calculul debitului de lichid ce curge prin fanta cilindrică de grosime constantă atît în direcția axială cît și după circomferință.

Folosind aceste relații se determină formulele pentru debit în cazul cînd fanta este formată de suprafețe cilindrice așezate excentric. Pe baza relațiilor obținute se ajunge la concluzia că pierderile volumice în fante cu grosime variabilă prin curgere după circomferință, pot fi micșorate față de cele rezultate la fante cu grosime constantă. La curgerea în direcție axială, prin fanta de grosime variabilă, pierderile volumice sînt mai mari decît pentru fanta de grosime constantă.

Catedra mașini unelte și scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Faisandier* — Les mecanismes hydraulique. Dunod Paris 1962.
2. *T. M. Basta* — Ghidravliceschie privodî letaiușcih aparatov. Mașinostroenie 1967.
3. *M. Guillon* — Étude et détermination de systemés hidrauliques. Dunod, Paris 1961.
4. *N. Tipei* — Hidro-aerodinamica lubrificației. Editura Academiei R.S.R.. 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 3

TRANSPORTURI

C.Z. : 625.24:625.282-83:621.3.025:338.063.41:338T1

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA VITEZELOR ȘI TONAJELOR OPTIME ALE TRENURILOR DE MARFĂ REMORCATE CU LOCOMOTIVE ELECTRICE 060 EA *

ALEXANDRU POPA

1. Generalități

În scopul utilizării în condiții cît mai bune a locomotivelor electrice 060 EA, de curent alternativ monofazat de 50 Hz cu redresarea curentului, este necesar să se stabilească tonajele trenurilor de marfă în așa fel încît să se transporte un volum maxim de mărfuri și călători în 24 ore, iar prețul de cost al transporturilor să fie cît mai redus.

Stabilirea forței de tracțiune de calcul, pentru care să se determine tonajele trenurilor de marfă, are o importanță deosebită în special pe liniile simple unde capacitatea de transport a acestor linii a ajuns la limită.

Utilizarea puterii locomotivei care remorcă un tren pe întregul parcurs este determinată atît de tonajul trenului, cît și de caracteristicile constructive ale liniei (rampe, pante, curbe).

Îmbunătățirea utilizării puterii locomotivei se poate realiza prin sporirea tonajului trenurilor sau prin mărirea vitezei de circulație a acestora.

Între vitezele de circulație și tonajele trenurilor de marfă există o legătură directă deoarece, o dată cu creșterea tonajelor se reduc vitezele de circulație și invers.

Transportarea unui volum maxim de mărfuri în 24 ore este posibilă numai dacă s-au determinat tonajele optime pe tren și vitezele de circulație corespunzătoare acestora.

Aceste tonaje optime nu corespund întotdeauna și unui preț de cost minim al transportului.

Reducerea prețului de cost al transportului de mărfuri pe calea ferată se realizează prin reducerea la minim a cheltuielilor de exploatare, cheltuieli ce corespund de asemenea unor tonaje și viteze de circulație optime.

Apare, deci, necesitatea stabilirii unor viteze care să satisfacă o capacitate de transport maximă și un preț de cost minim.

* Manuscris predat la redacție la 10 noiembrie 1968.

2. Calculul vitezelor și tonajelor optime, în funcție de capacitatea de circulație a liniei

Volumul maxim de mărfuri ce poate fi transportat în 24 de ore, pe o linie simplă se poate calcula cu relația :

$$Q_{max} = G_v V_m \frac{24 - t_c}{t_s V_m + 2s} (t_b) \quad (1)$$

în care :

G_v este tonajul mediu pe tren, în t_b ;
V_m — viteza medie de circulație pe distanța limitativă în km/h ;
t_c — timpul mediu din zi, ocupat de trenurile de călători, în ore ;
t_s — timpul mediu de staționare pentru încrucișare, în ore ;
s — distanța limitativă, în km.

Din relația 1 rezultă că volumul maxim de mărfuri ce poate fi transportat în 24 ore, pe distanța limitativă, este determinat de produsul $G_v V_m$, deoarece ceilalți termeni sînt constanți, iar produsul $t_s V_m$ este foarte mic în raport cu 2s.

Valoarea maximă a produsului $G_v V_m$ se poate calcula pornindu-se de la ecuația de echilibru a forțelor, care acționează asupra trenului, la circulația acestuia pe distanța limitativă. Această ecuație, pentru cazul cînd trenul circulă cu o viteză constantă și egală cu viteza medie, are forma :

$$F_0 - (G_v + G_l)(r_t + i_e) = 0 \quad (2)$$

de unde :

$$G_v = \frac{F_0}{(1+\beta)(r_t + i_e)}, \quad (3)$$

în care s-au notat :

$$\beta = \frac{G_l}{G_v}$$

F_0 — forța de tracțiune de calcul la obada roților motoare ;
r_t — rezistența specifică a trenului ;
i_e — rampa echivalentă.

Rezistențele specifice la mersul în palier și aliniament ale trenurilor de marfă se pot calcula cu relația de forma :

$$r_t = a + b V^2 \quad (4)$$

Coeficienții a și b, din relația (4), se pot calcula cu ajutorul unor medii ponderate, în funcție de tipul vagoanelor ce compun trenul și de locomotivele care-l remorcă.

Formulele cu care se calculează rezistențele specifice ale vagoanelor și locomotivelor electrice din parcul C.F.R. pot fi prezentate sub forma :

$$r_v = a_v + b_v V^2 \tag{5}$$

$$r_l = a_l + b_l V^2 \tag{6}$$

de unde rezultă :

$$a = \frac{\beta \hat{a}_l + a_v}{\beta + 1} \tag{7}$$

$$b = \frac{\beta b_l + b_v}{\beta + 1} \tag{8}$$

Dacă se au în vedere relațiile (3) și (4) se obține :

$$G_v = \frac{F_0}{(1+\beta)(a + b V^2 + i_e)} \tag{9}$$

Caracteristica de tracțiune a locomotivei electrice 060 EA este formată dintr-o familie de curbe $F_0 = f(V)$ corespunzătoare diferitelor trepte de tensiune ale secundarului transformatorului principal. În scopul măririi domeniului ocupat de aceste curbe în sistemul de axe FOV se realizează și trei șuntări de flux, pentru care coeficientul de șuntaj are valorile : $\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}65$; $\alpha = 0{,}8$.

Domeniul de utilizare al acestor curbe este limitat de aderență, curent și viteza maximă de circulație.

În scopul stabilirii tonajelor optime și a vitezelor corespunzătoare acestor tonaje, deoarece curbele $F_0 = f(V)$ prezintă discontinuități, este necesar să se efectueze calculele pentru mai multe intervale de viteză, după cum urmează : $0 < V < 68$ km/h ; $68 < V < 87{,}5$ km/h ; $87{,}5 < V < 120$ m/h ;

În intervalul de viteze 0—68 km/h, forța de tracțiune a locomotivei este limitată de aderență și de curent ; în intervalul de viteze 68,87 km/h, este limitată de curentul uniorar, iar în intervalul 87,5—120 km/h de puterea mașinilor electrice de tracțiune.

Locomotiva 060 EA, permițînd o suprasolicitare, poate funcționa și cu valori ale curenților mai mari decît curentul uniorar doar un timp relativ scurt, pentru care este necesar să se facă o verificare a încălzirii mașinilor electrice de tracțiune.

2.1. *Calculul forței de tracțiune pentru intervalul de viteză 0—68 km/h.*

Pentru cazul cînd se are în vedere limitarea forței de tracțiune de către curentul uniorar, iar intervalul de viteză de la 0 la 68 km/h, forță de tracțiune rămîne constantă și are valoarea $F_0 = 28{,}8$ tf.

Pentru cazul cînd se are în vedere limitarea forței de tracțiune de către aderență, valoarea forței de tracțiune se poate calcula ca o relație de forma :

$$F_0 = A_1 - B_1 V + \frac{C_1}{V} \tag{10}$$

Coeficienții A_1, B_1 și C_1 se pot stabili în baza curbei $F_0 = f(V)$. Pentru aceasta se aleg trei puncte pe curba $F_0 = f(V)$, după cum se vede din figura 1.

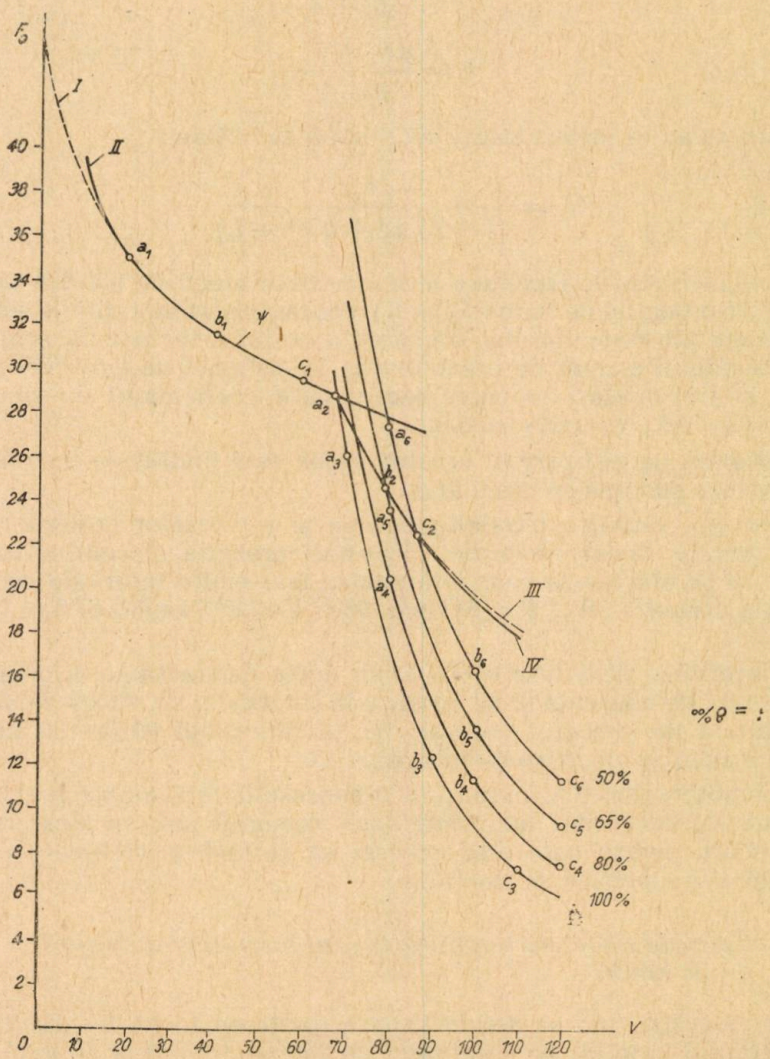


Fig. 1.

Cu ajutorul coordonatelor acestor puncte se poate scrie un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute de forma :

$$A_1 - B_v V_1 + \frac{C_1}{V_1} = F_0$$

$$A_1 - B_1 V_2 + \frac{C_1}{V_2} F_{02}, \qquad (11)$$

$$A_1 - B_1 V_3 + \frac{C_1}{V_3} = F_{02},$$

în care necunoscutele sînt A_1, B_1 și C_1.

Pentru cazul cînd coeficientul de aderență se calculează cu formula stabilită de Curtius, punctele de pe curba $F_0 = f(V)$ pot avea coordonatele : a_1 (20,35) ; b_1 (40, 31,6) ; c_1 (60, 29,5).

Cu aceste valori, sistemul de ecuații (11) devine :

$$A_1 - 20 B_1 + \frac{C_1}{20} = 35;$$

$$A_1 - 40 B_1 + \frac{C_1}{40} = 31{,}6;$$

$$A_1 - 60 B_1 + \frac{C_1}{60} = 29.5. \qquad (12)$$

Rezolvînd acest sistem se obține, pentru necunoscute următoarele valori $A_1 = 32{,}55$; $B_1 = 0{,}0725$; $C_1 = 78{,}0$.

Cu aceste valori, forța de tracțiune a locomotivei 060 EA se poate calcula cu relația :

$$F_0 = 32{,}55 - 0{,}0725 V + \frac{78}{V}(t) \qquad (13)$$

2.2. *Calculul forței de tracțiune pentru intervalul de viteză 68—87,5 km/h.*

Pentru acest interval de viteză, forța de tracțiune a locomotivei este determinată de curentul uniorar. Și în acest caz se aleg trei puncte pe curba $F_0 = f(V)$ figura 1 și se scrie un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute.

Pentru cazul cînd punctele au coordonatele a_2 (68, 28,8) ; b_2 77,5, 25,2) ; c_2 (87,5, 22, 3) sistemul de ecuații se poate scrie :

$$A_2 + 68 B_2 + \frac{C_2}{68} = 28{,}8;$$

$$A_2 + 77{,}5 B_2 + \frac{C_2}{77{,}5} = 25{,}2; \qquad (14)$$

$$A_2 + 87{,}5 B_2 + \frac{C_2}{87{,}5} = 22{,}3.$$

Rezolvînd acest sistem se obţine următoarele valori pentru necunoscute $A_2=-3{,}477$; $B_2=0{,}0201$; $C_2=2\,092{,}356$.

Cu aceste valori forţa de tracţiune se poate calcula cu relaţia :

$$F_0 = -3{,}477 + 0{,}0201\,V + \frac{2092{,}356}{V}\ (t) \qquad (15)$$

2.1. *Calculul forţei de tracţiune în intervalul de viteză 68—120 km/h.*

În acest interval de viteze, locomotiva electrică 060 EA dispune de patru caracteristici (cîmp complet şi trei şuntări de flux). Pentru stabilirea ecuaţiei forţei de tracţiune se procedează ca şi în cazurile precedente, pentru fiecare curbă $F_0=f(V)$.

2.3.1. *Cîmpul complet*

În scopul stabilirii sistemului de ecuaţii se aleg punctele $a_3(70,\ 26)$; $b_3(90,\ 12{,}5)$; $c_3(110,\ 7.3)$, pentru care se obţine :

$$A_3 + 70\,B_3 + \frac{C_3}{70} = 26$$

$$A_3 + 90\,B_3 + \frac{C_3}{90} = 12{,}5$$

$$A_3 + 110\,B_3 + \frac{C_3}{110} = 7{,}3 \qquad (16)$$

Prin rezolvarea sistemului (16) se obţine: $A_3=-109{,}35$; $B_3=0{,}46625$; $C_3=7193{,}875$. Cu aceste valori forţa de tracţiune se poate calcula cu relaţia :

$$F_0 = -109{,}35 + 0{,}46625\,V + \frac{7193{,}875}{V} \qquad (17)$$

2.3.2. *Cîmpul redus cu 80%*

Punctele de pe curba $F_0=f(V)$ au coordonatele $a_4(80,\ 20{,}4)$; $b_4(100,\ 11{,}4)$; $c_4(120,\ 7{,}4)$.

Cu aceste valori se obţine sistemul de ecuaţii :

$$A_4 + 80\,B_4 + \frac{C_4}{80} = 20{,}4$$

$$A_4 + 100\,B_4 + \frac{C_4}{100} = 11{,}4$$

$$A_4 + 120\,B_4 + \frac{C_4}{12} = 7{,}4 \qquad (18)$$

Prin rezolvarea acestui sistem se obţin valorile :

$$A_4 = 78{,}6 : \; B_4 = 0{,}30 ; \; C_4 = 6000 .$$

Cu aceste valori forţa de tracţiune devine :

$$F_0 = -78{,}6 + 0{,}30\, V + \frac{6000}{V} \qquad (19)$$

2.3.3. *Cîmpul redus cu 65%*

Punctele au valorile coordonatelor : $a_5(80,\ 23{,}5)$; $b_5(100,\ 13{,}6)$; $c_5(120,\ 9{,}3)$

$$A_5 + 80\, B_5 + \frac{C_5}{80} = 23{,}5 ;$$

$$A_5 + 100\, B_5 + \frac{C_5}{100} = 13{,}6 ; \qquad (19)$$

$$A_5 + 120\, B_5 + \frac{C_5}{120} = 9{,}3 .$$

Prin rezolvare se obţine $A_5 = -88{,}1$; $B_5 = 0{,}345$; $C_5 = 6720$ pentru care :

$$F_0 = -88{,}1 + 0{,}345\, V + \frac{6720}{V} \qquad (20)$$

2.3.4. *Cîmpul redus cu 50%*

Se adoptă punctele $a_6(80,\ 27{,}3)$; $b_6(100,\ 16{,}2)$; $c_6(120,\ 11{,}2)$ pentru care se obţine :

$$A_6 + 80\, B_6 + \frac{C_6}{80} = 27{,}3 ;$$

$$A_6 + 100\, B_6 + \frac{C_6}{100} = 16{,}2 ; \qquad (21)$$

$$A_6 + 120\, B_6 + \frac{C_6}{120} = 11{,}2 .$$

Prin rezolvarea sistemului (21) se obţine : $A_6 = -93$; $B_6 = 0{,}36$; $C_6 = 7320$.

Cu aceste valori se obţine pentru forţa de tracţiune relaţia :

$$F_0 = -93 + 0{,}36\, V + \frac{7320}{V} \qquad (22)$$

3. Calculul vitezei optime din punct de vedere al capacității maxime de transport

Pentru determinarea vitezei de circulație optime a trenurilor de marfă se introduc valorile corespunzătoare ale forței de tracțiune în relația 9 și apoi se calculează valoarea maximă a produsului $G_v V$.

După cum se știe, extremele unei funcii se poate obține prin anularea primei derivate a acesteia.

Pentru cazul cînd forța de tracțiune este determinată de aderență, relația 9 se scrie sub forma :

$$G_v V = \frac{A_1 V - B_1 V^2 + C_1}{(1+\beta)\ (a + b V^2 + i_e)}, \tag{23}$$

care prin derivare, în funcție de viteză, devine :

$$\frac{d(G_v V)}{dV} = \frac{A_1 (a + i_e) - 2\ [B_1 (a + i_e) + C_1 b)\ V - b A_1 V^2}{(1+\beta)\ (a + b V^2 + i_e)^2} \tag{24}$$

Cînd :

$$\frac{d(G_v V)}{dV} = 0$$

se obține :

$$V_{opt} = \frac{-\left[B_1 (a + i_e) + C_1 b \pm \sqrt{[B_1 (a + i_e) + C_1 b]^2 + A_1^2 b (a + i_e)}\right]}{A_1 b} \tag{25}$$

Pentru celelalte cazuri relația 9 se scrie sub forma :

$$G_v V = \frac{-A V + B V^2 + C}{(1+\beta)\ (a + b V^2 + i_e)} \tag{26}$$

Prin derivarea relației (26), în funcție de viteză și prin egalare cu zero, se obține :

$$V_{opt} = \frac{-[B (a + i_e) - C b] \pm \sqrt{[B (a + i_e) - C b]^2 + A^2 b (a + i_e)}}{A b} \tag{27}$$

Relațiile (23) și (26) au un caracter mai general, ele putînd fi folosite la toate locomotivele ale căror relații pentru calculul forței de tracțiune au aceeiași structură cu relația (10).

Pentru locomotiva 060 EA, valorile coeficienților A, B, C și a b sînt trecute în tabela 1.

Tabela 1

		A	B	C	a	b
	Aderență	32,55	0,0725	78,0	2,00	0,0005
	Curent uniorar	— 3,477	0,0201	2092,356		
γ	100%	— 109,35	0,46625	7193,875		
	80%	— 78,6	0,30	6000,0		
	65%	— 88,1	0,345	6720,0		
	50%	— 93,0	0,36	7320,0		

Cu aceste valori, se obțin pentru calculul vitezei optime a trenurilor de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA relațiile :

— pentru cazul cînd forța de tracțiune este determinată de aderență :

$$V_{opt.} = \frac{-(0{,}184 + 0{,}0725\, i_e) \pm \sqrt{1{,}0933585 + 0{,}55643\, i_e + 0{,}005256\, i_e^2}}{0{,}016275} \quad (28)$$

— pentru cazul cînd se folosește forța de tracțiune corespunzătoare curentului uniorar :

$$V_{opt} = \frac{-(0{,}0201\, i_e - 1{,}005978) \pm \sqrt{1{,}024082 - 0{,}034396\, i_e + 0{,}000404\, i_e^2}}{0{,}0017375} \quad (29)$$

— pentru cazul cînd se folosește forța de tracțiune corespunzătoare cîmpului complet :

$$V_{opt} = \frac{-(0{,}46625\, i_e - 2{,}66344) \pm \sqrt{19{,}051236 + 3{,}495003\, i_e + 0{,}217369\, i_e^2}}{0{,}054675} \quad (30)$$

— pentru cazul cînd se folosește forța de tracțiune corespunzătoare cîmpului redus cu 80% :

$$V_{opt} = \frac{-(0{,}3\, i_e - 2{,}4) \pm \sqrt{11{,}93796 + 1{,}64898\, i_e + 0{,}09\, i_e^2}}{0{,}0393} \quad (31)$$

— pentru cazul cînd se folosește forța de tracțiune corespunzătoare cîmpului redus cu 65%

$$V_{opt} = \frac{-(0{,}345\, i_e - 2{,}67) \pm \sqrt{14{,}8905 + 2{,}0385\, i_e + 0{,}119025\, i_e^2}}{0{,}04405} \quad (32)$$

— pentru cazul cînd se folosește forța de tracțiune corespunzătoare cîmpului redus cu 50 % :

$$V_{opt} = \frac{-(0{,}36\, i_e - 2{,}94) \pm \sqrt{17{,}2926 + 2{,}2077\, i_e + 0{,}1296\, i_e^2}}{0{,}0465} \qquad (33)$$

Cu ajutorul relațiilor (28) ÷ (33) se pot calcula vitezele optime ale trenurilor remorcate cu locomotivele 060 EA, pentru toate regimurile de funcționare și pentru diferite valori ale rampei echivalente a distanței limitative.

Vitezele optime calculate cu relația (28), corespunzătoare rampelor echivalente de 4, 6, 8 și 10‰, sînt date în tabela 2.

Tabela 2

i ‰			
4	6	8	10
87,5	93,3	103,06	108,5

Vitezele optime ale trenurilor de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA se mai pot stabili și prin trasarea curbelor $G_v V(V)$, cu ajutorul relației (23). Pentru aceasta s-a calculat, mai întîi, posibilitățile de remorcare ale locomotivei 060 EA, pentru toate regimurile de funcționare și pentru rampele de 4, 6, 8 și 10‰. Tonajele ce pot fi remorcate cu diferite viteze de circulație sînt date în tabela 3.

Cu datele din tabela 2 s-au trasat curbele $G_v = f(V)$ din figurile 2—3, din care rezultă tonajele ce pot fi remorcate de locomotiva 060 EA la circulație cu diferite viteze pe diferite rampe.

Tabela 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V km/h		60	63	70	77,5	80	87,5	90	100	110	120
F_a (*t*)	ψ	29,5	28,8	—	—	—	—	—	—	—	—
	I_n	—	28,8	—	25,2	—	22,3	—	19,7	18,2	—
	α = 100	—	28,8	26,0	—	17,4	—	12,5	9,3	7,3	0,3
	80	—	—	—	22,3	20,4	—	15,0	11,4	—	7,5
	65	—	—	—	25,2	23,5	—	17,6	13,6	—	9,2
	50	—	—	—	—	27,3	—	20,6	16,2	—	11,2

Tabela 3

(continuare)

0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
G_v	ψ	4	3662	3345	3264	3013	2923	—	2596	—	—	—
		6	2890	2673	2626	2443	2380	—	2145	—	—	—
		8	2480	2219	2185	2049	2001	—	1823	—	—	—
		10	2047	1892	1866	1760	1722	—	1580	—	—	—
	I_*	4	—	3345	—	2680	—	2144	—	1670	1390	—
		6	—	2673	—	2170	—	1763	—	1395	1174	—
		8	—	2219	—	1818	—	1494	—	1193	1014	—
		10	—	1892	—	1560	—	1285	—	1038	888	—
	$\alpha =$ 100	4	—	3345	2960	—	1775	—	1123	725	468	—
		6	—	2673	2370	—	1436	—	919	596	400	—
		8	—	2219	1975	—	1200	—	772	562	335	—
		10	—	1892	1684	—	1028	—	660	427	285	—
	$\alpha =$ 80	4	—	—	—	2360	2100	—	1373	915	—	442
		6	—	—	—	1905	1703	—	1165	757	—	368
		8	—	—	—	1610	1425	—	950	640	—	310
		10	—	—	—	1305	1123	—	816	550	—	265
	$\alpha =$ 65	4	—	—	—	2680	2435	—	1630	1118	—	577
		6	—	—	—	2170	1980	—	1340	928	—	485
		8	—	—	—	1880	1660	—	1115	788	—	412
		10	—	—	—	1562	1425	—	978	680	—	383
	$\alpha =$ 50	4	—	—	—	—	2840	—	1930	1454	—	730
		6	—	—	—	—	2220	—	1590	1126	—	617
		8	—	—	—	—	1950	—	1390	960	—	532
		10	—	—	—	—	1670	—	1165	835	—	463

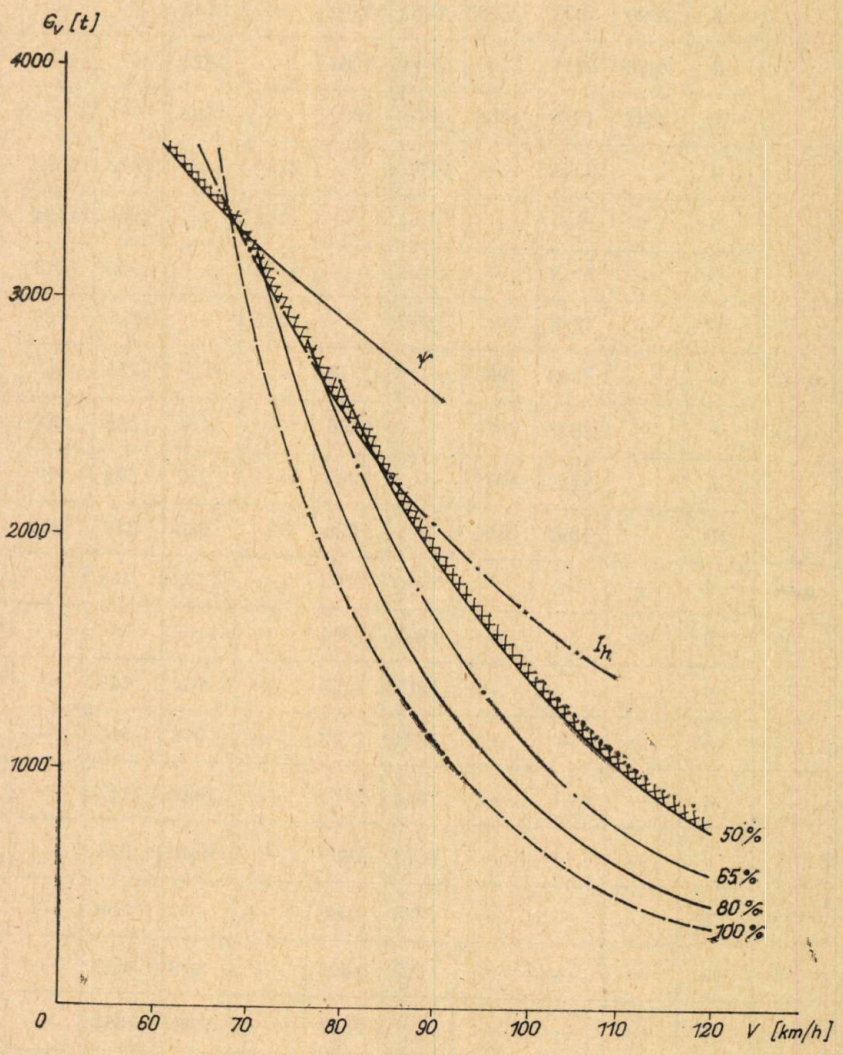

G_v [t]
4000
3000
2000
1000
0
60
70
80
90
100
110
120
V [km/h]
I_n
50%
65%
80%
100%

Fig. 2.

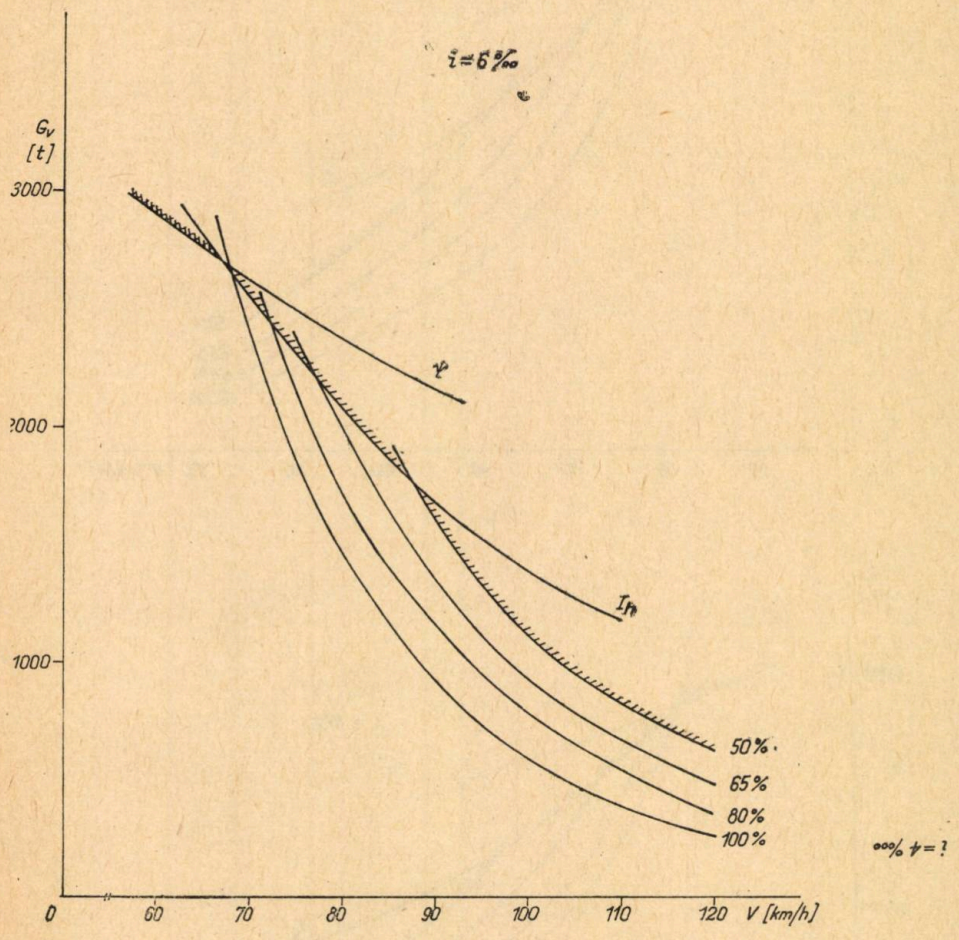

i = 6‰
G_v [t]
3000
2000
1000
0
60
70
80
90
100
110
120
V [km/h]
ψ
I_h
50%
65%
80%
100%
∞% ψ = ?

Fig. 3.

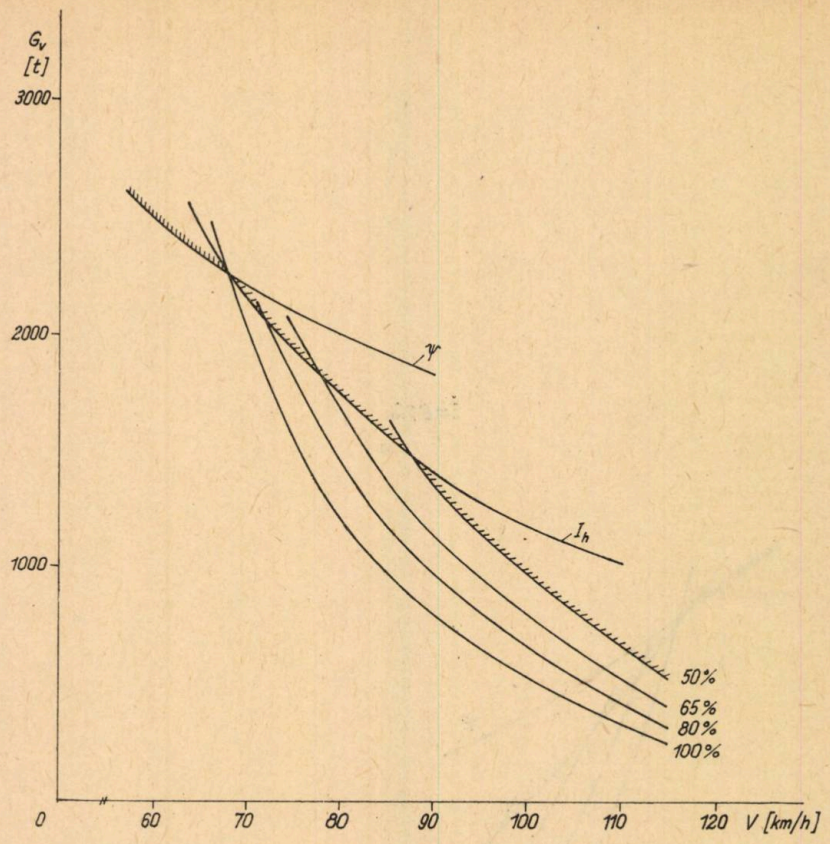

G_v
[t]
3000
2000
1000
0
60
70
80
90
100
110
120
V [km/h]
I_h
50%
65%
80%
100%

Fig. 4.

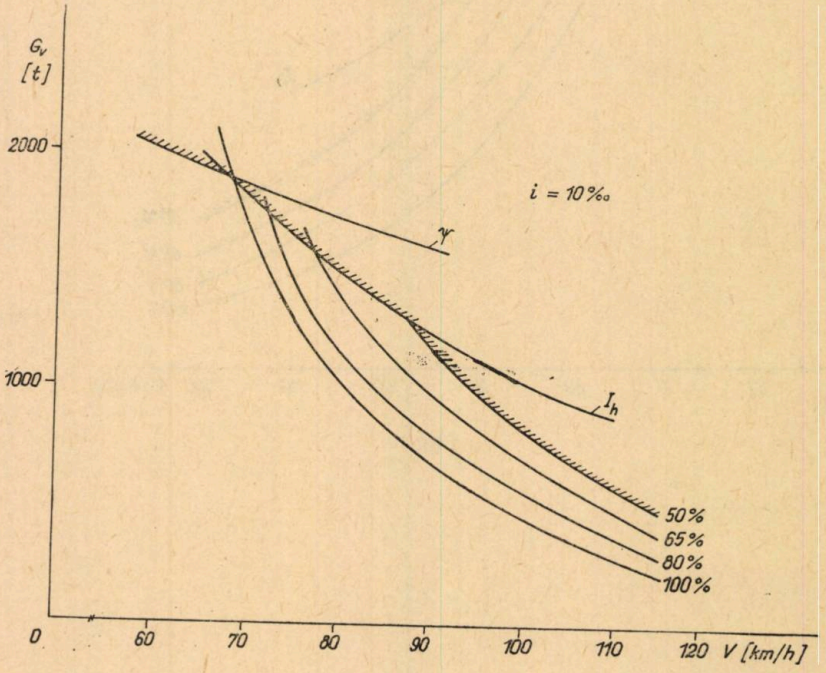

G_v
[t]
2000
1000
0
60
70
80
90
100
110
120
V [km/h]
i = 10‰
I_h
50%
65%
80%
100%

Fig. 5.

Tabela 4

		V km/h	60	68	70	77,5	80	87,5	90	100	110	120
$G_v V$	ψ	4	219720	227460	228480	230060	235400	—	233640	—	—	—
		6	174120	183000	183820	189500	190000	—	193000	—	—	—
		8	143400	150500	152950	159000	161200	—	164200	—	—	—
		10	121500	119000	130062	136400	138620	—	142100	—	—	—
	I_h	4	—	227460	—	207700	—	187600	—	167000	153000	—
		6	—	183000	—	168200	—	154200	—	135500	119200	—
		8	—	150500	—	140500	—	130800	—	119300	111500	—
		10	—	129000	—	121000	—	112300	—	103800	97900	—
	100	4	—	227400	30700	—	142000	—	102000	72500	51600	—
		6	—	183000	166000	—	115000	—	88600	59600	44000	—
		8	—	150500	138000	—	96000	—	69500	56300	36900	—
		10	—	128000	118000	—	82600	—	59400	42700	—	—
	80	4	—	—	—	1830003	168000	—	123900	91500	—	53000
		6	—	—	—	147500	136240	—	105000	75700	—	44200
		8	—	—	—	124300	114000	—	85500	64000	—	37200
		10	—	—	—	105900	89240	—	73500	55000	—	31800
	65	4	—	—	—	206000	194500	—	146500	111800	—	69200
		6	—	—	—	168200	158200	—	120500	92800	—	58200
		8	—	—	—	141100	132900	—	102000	78800	—	49500
		10	—	—	—	121200	114000	—	88000	68000	—	46000
	50	4	—	—	—	—	217000	—	173500	145400	—	87600
		6	—	—	—	—	176000	—	143000	112600	—	74000
		8	—	—	—	—	156000	—	181500	96000	—	64200
		10	—	—	—	—	134000	—	105000	83550	—	555000

În tabela 4 sînt trecute valorile produsului G V, iar în figurile 6—10 sînt trasate curbele G V = *f*(V).

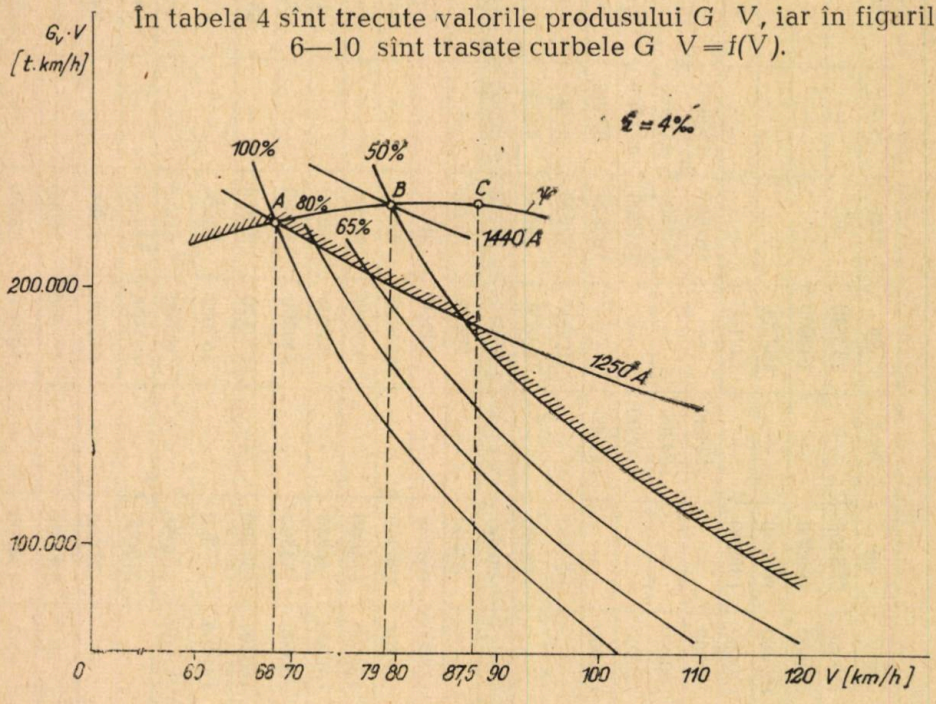


Fig. 6.

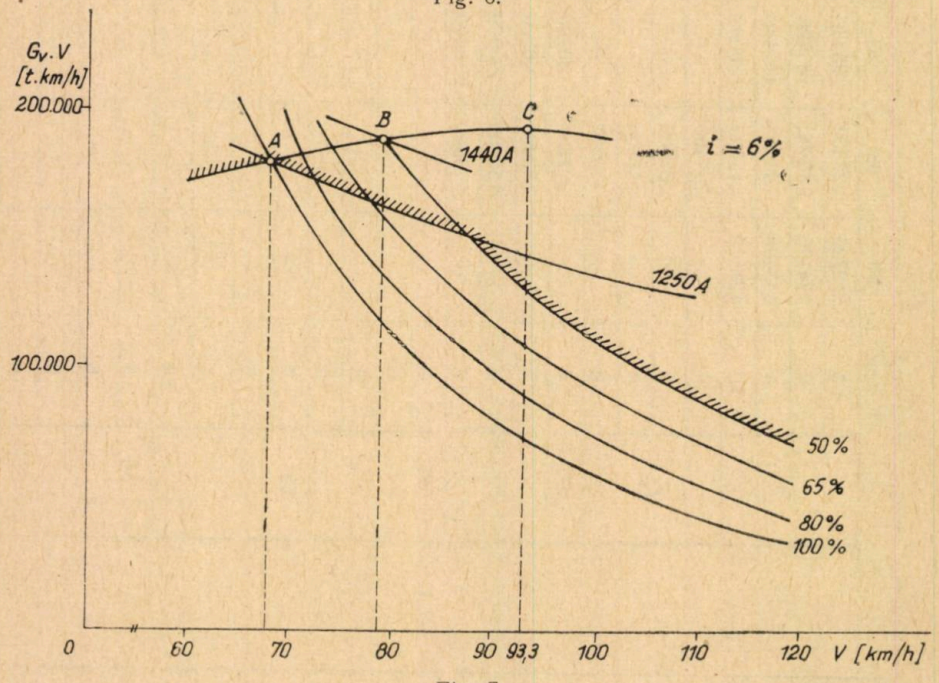


Fig. 7.

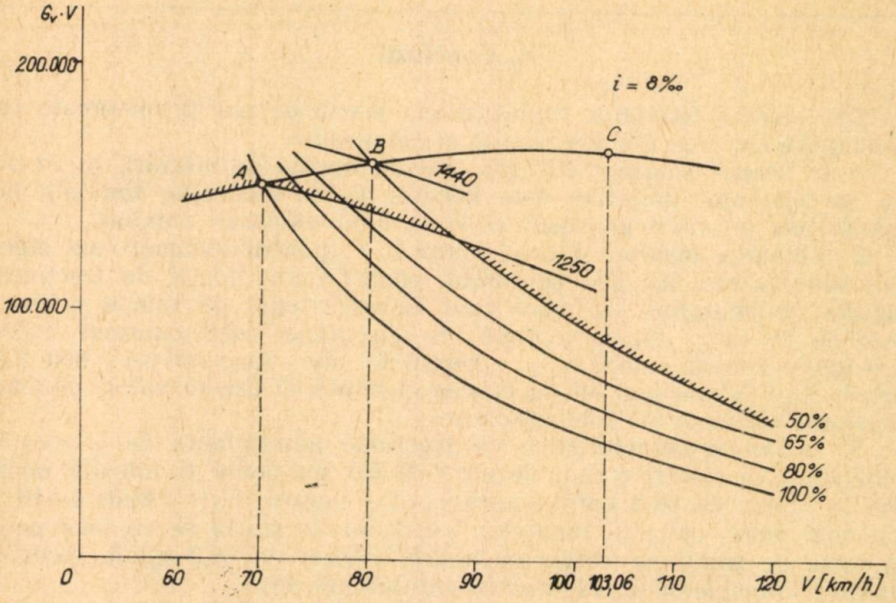

$G_v \cdot V$
200.000
100.000
i = 8‰
A
B
C
1440
1250
50%
65%
80%
100%
0
60
70
80
90
100
103,06
110
120
V [km/h]

Fig. 8.

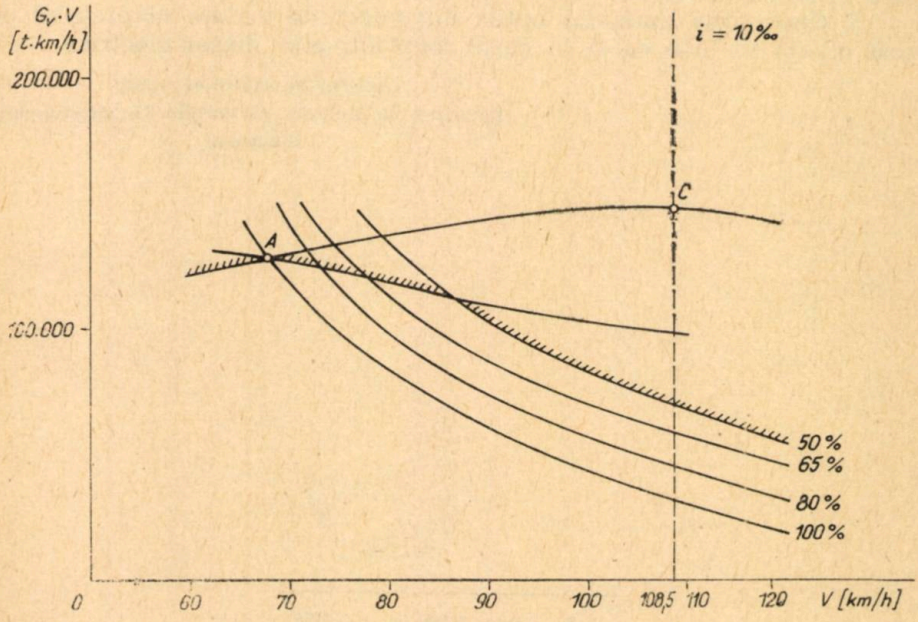

$G_v \cdot V$
[t·km/h]
200.000
100.000
i = 10‰
A
C
50%
65%
80%
100%
0
60
70
80
90
100
108,5
110
120
V [km/h]

Fig. 9.

4. Concluzii

Din analiza tonajelor trenurilor de marfă ce pot fi remorcate cu locomotive electrice 060 EA rezultă următoarele :

1. În scopul transportării unui volum maxim de mărfuri, în 24 de ore, pe distanțe limitative este necesar să se calculeze tonajele pe tren în așa fel încît produsul $G_v V$ să aibă valoarea maximă.

2. Valoarea maximă a produsului $G_v V$, pentru locomotivele electrice monofazate 060 EA, se obține pentru curba forței de tracțiune limitată de aderență. În cazul cînd trenul circulă pe rampe echivalente de 4—10‰, viteza optimă de circulație este cuprinsă între 8,5—109,5. Pentru celelalte caracteristici ale locomotivei 060 EA curbele $G_v V(V)$ nu mai au un maxim ci minim și aceste valori minime corespund vitezelor mari de circulație.

3. Deoarece caracteristica de tracțiune determinată de aderență, a locomotivei electrice monofazate 060 EA nu poate fi folosită decît pînă la viteza de 68,8 km/h viteza optimă pentru declivitățile 4—10‰ fiind mai mare, calculul tonajelor trenurilor de marfă se va face pentru forța de tracțiune corespunzătoare, vitezei de 68,8 km/h. Acestei situații îi corespunde și valoarea curentului uniorar.

4. Se pot lua valori mai mari, pînă la 77,5 km/h, pentru cazul cînd se suprasolicită locomotiva pentru un timp relativ scurt. Curentul corespunzător acestui regim este de 1440 A. La stabilirea tonajelor pentru această situație trebuie să se verifice, în mod obligatoriu, temperatura mașinilor electrice de tracțiune.

5. Calcularea tonajului optim din punct de vedere al prețului de cost minim se face ca și în cazul locomotivelor diesel electrice.

Catedra de material rulant
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

I. P. „Grafica Nouă" II — c. 8976

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1969 NOV 6

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 4 ANUL 1969
IULIE — AUGUST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXI — NUMĂRUL 4

IULIE — AUGUST
1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Conf. dr. ing. *Petru Baltă* ; Academician prof. *Martin Bercovici* ; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* ; Conf. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua* ; Conf. dr. *Ion Grădișteanu* ; Conf. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific) ; Prof. *Constantin Ionescu-Bujor*, Profesor emerit ; Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu* ; Prof. ing. *Ștefan Mantea* ; Prof. dr. ing. *Marius Preda* ; Prof. ing. *Mihai Renert* ; Conf. *Mircea Soare* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. docent *Radu Voinea* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

Redactor responsabil:
Rector
Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*
membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

C. Ionescu-Bujor
Les translations centrées du plan 21

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

Em. A. Bratu, Fr. Gothard
Die Rektifikation in vibrierten Füllkörperkolonnen 37

Agneta T. Cerbu
Aparat de laborator pentru producerea hidrogenului sulfurat şi altor gaze folosite în analiza semimicrochimică 41

Gr. Teodorescu
Metodă de determinare pentru N-fenil-morfolină 45

MECANICA

C. Guţă
Regimul optim de urcare al rachetelor multietajate 49

MECANISME

N. I. Manolescu, Gabriela Iarca
O metodă de rezolvare cinetostatică a mecanismelor prin schimbarea punctului (sau elementului) de reducere a forţelor 57

REZISTENŢA MATERIALELOR

A. Petre, Vasilica Cosac
Vibraţiile forţate verticale ale grinzilor pendulare 77

ORGANE DE MAŞINI

T. Mladinescu
Determinarea experimentală a coeficientului dinamic la roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi 91

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

N. Apostolescu, B. Grünwald, D. Taraza
Determinarea legii de ardere a unui motor cu ardere internă după diagrama indicată, prin intermediul calculatoarelor numerice . . . 105

Rodica Maniţiu
O construcţie pentru determinarea grafică a deplasării pistonului la mecanismul bielă-manivelă normal şi dezaxat 115

REŢELE ELECTRICE

D. Cristescu, M. Budaşcă
Cercetarea pe model a deformării undelor sub acţiunea efectului corona de impuls 121

AUTOVEHICULE

Gh. Frăţilă
Cu privire la încărcările suplimentare ale transmisiei la automobilele cu două osii motoare 133

Резюме

К. Ионеску-Бужор Д. К. 517 : 535

Центральные трансляции плана

Атором ранее было изучено, в связи с преобразованиями через линзы, плоское преобразование.

(Бюллетень Политехнического Института, Бухарест, том XXIII, выпуск, 2, 1961).

В настоящей заметке рассматривается более общее преобразование, а именно, центральное преобразование, опроделенное следующим образом:

Центральная плоская трансляция является точечным преобразованием, определенным точкой „0", вектром $\vec{u}$ плана, модуль которого ($|\vec{u}| = 1$), и фунцией $\varphi(x)$, которая определена и непрерывна на всем множестве $\varphi(x)$ реальных чисел, и которая удовлетворяет $x \in R$ (R условию) $\varphi(x + \pi) = -\varphi(x)$

Посредством этого преобразования, любая точка M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) плана, преобразуется в точку M_1 ($\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$) таким образом, что

$$\vec{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\vec{r}, \text{ где}$$

(α, угол образованн $\vec{u}$, $\vec{r}$).

Разбнрается также случай, когда $\varphi(x)$ определена и непрерывна в области $x \in R - D$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dei" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 668.735 : 547.533 : 54

Э. Брату, Ф. Готхарт

Очищение в колоннах с набивными вибрированными телами

(Новая возможность для достижения высоких степеней очищения).

Исследовалось влияние вибраций на эффект разделения колонн с набивными телами при различных амплитудах, частотах, скоростях паров, высотах колонны. При амплитудах 2—3 мм, и при частотах 50 гц степень разделения в 3—4 раза больше чем степень разделения невибрированной колонны. Такие большие, степени разделения достигаются кольцами Рашиг без уменьшения допустимой скорости прохода. Результаты позволяют оценить механизм перохода массы между жидкостью и парами, усиленный вибрированием в набивной колонне.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dei" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 542.2 : 546.221 : 544/545

А. Кербу

Лабораторный прибор для получения сероводорода и других газов, употребляемые в полумикрохимическом анализе

Описывается стеклянный прибор, назначенный для получения малых количеств газов нужных в практических работах в химических лабораториях. Дана схема прибора и принцип его работы. Показываются преимущества данного аппарата.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1959

Summary

D.C. 517 : 535

C. Ionescu-Bujor

Centred Translations of the Plan

In connection with the transformations by lentiles, a plan transformation : is given the convergent translation (Bul. Inst. Politehnic Bucureşti, Tom. XXIII, Fasc. 2. 1961). In this note we consider a more general transformation, the centred translation, so definited :

The centred translation of the plan is a transformation determined by a point O, a vector $|\bar{u}|$ ($u = 1$), a function φ (x).

This function is definited and continuous at all $x \in R$(R the set of real numbers) and $\varphi(x+\pi) = -\varphi(x)$. By this transformation, any point M ($\overline{OM} = \bar{r}$) of the plan is transformed into M_1 ($\overline{OM_1} = \bar{r}_1$) so that

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r},$$

(α the angle of $\bar{u}$, $\bar{r}$)

We consider also $\varphi(x)$ definited and continuous at all $x \in R - D$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 668.735 : 547.533 : 542

E. Bratu, Fr. Gothart

Rectification in Columns with Vibrated Filling Bodies (A new possibility of reaching high rectification degrees)

The authors have studied the influence of vibrations upon the separation effect of columns with filling bodies at various amplitudes frequencies, vapour speeds, column heights. For 2-3-mm amplitudes and frequiencies of 50 s^{-1}, the degree of separation is 3-4 times higher than that of the unvibrated column. These high separation degrees are attained with usual Rasching rings without reducing the admissible passing through speed. The results permit to make estimations on the mechanism of mass transfer between liquid and vapour in the filling column, intensified through vibration.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 542.2 : 546.221 : 544/545

A. Cerbu

Laboratory Instrument for Producing Hydrogen Sulphide and other Gases used in the Half microchemical Analysis.

The author describes an instrument made of glass used to produce small quantities of gas required in practical works in chemistry laboratories. He describes the instrument diagram and operation principle. He points out the advantages the instrument offers.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

Г. Теодореску

Метод определения *N* — фенил — морфолины

Представляется метод определения органического посредника *N* — фенил — морфолины, путем усложнения с солью Райнеке. Определение этим методом возможно, так как результирующий продукт путем усложнения практически нерастворим в воде и очень растворим в ацетоне. Определение производилось в водном растворе серной кислоты, чтобы осуществить катионизированную усложняемую структуру аминного азота.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 629.19 : 517 : 522

К. Гуцэ

Оптимальный режим подъема многоэтажных ракет

В работе принят закон изменения с высотой скорости выхода газов из двигателя для многоэтажных ракет. Отмечается простота полученных конечных формул и легкость, с которой они могут быть применены для вывода оптимального режима работы двигателей для достижения данной высоты в первом прнближении.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 621.8.02 : 621.231 : 531.1 : 920.178.1 : 621.01

Н. И. Манолеску, П. Иарка

Метод кинетостатического решения механизмов с помощью измеиения точки приведения сил (или звена приведения сил).

В настоящей работе дается простой способ расчета противодействий в парах у механизмов, класс которых можно привести с помощью изменения ведущего звена.

Эти противодействия представляют собой сумму двух противодействий, полученных через нагрузку механизма низшего класса, полученного из данной кинетостатической цепи с двумя полями сил.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

Gr. Teodorescu

Method of N-phenil-morpholin Determination

It presents the method of organic intermediar N-phenil-morpholin determination, by complexation with Reinecke salt. Determination by this method is possible, because the resulting product by complexation is practically insoluble in water and very soluble in acetone.

To realize the ? cation complex structure of aminic N, determination has been made in aqueous H_2SO_4 solution.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 629.19 : 517 : 522

C. Guţă

Optimum Ascent Regime of Multistage Rockets

The author adopts in the paper a law of variation function of the height of the engine gas outlet speed for multistage rockets. One can observe the simplicity of the final formula obtained and the ease with which these may be used to deduce the engine optimum operation regime, in order to attain a given altitude in a first approximation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 621.8.02 : 621.231 : 531.1 : 620.178.1 : 621.01.

N. I. Manolescu, Gabriela Iarca

One Method for the Kinetostatic Determination by Means of the Change of the Reducing Force-Point (other Reducing Moment-Link).

In the paper one utilises the method of the point-other link-change of the forces and moments (Couples) to reduce the class of the Mechanisms (Classification of I.I. Artobolevski), after that the reactive forces in the kinematic pairs are determinated.

This method which utilise the principle of the superposition of effects is more adantageous than the others, because it is the most rapide and exact.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 539.4 : 624.023.9 : 624.072.2

А. Петре, В. Косак

Вертикальные вынужденные колебания пендулярных балок

Рассматривается пендулярно опертой безмассовой призматической блкой, имеющей поперечную жидкость меньше вертикальной жесткости и нагруженной сосредоточенным весом P_o, приложенным к сереине балки.

В работе исследованы вертикальные колебания веса P_o вследствие приложения, также к середине балки, некоторой переменной со времени силы ($F = F_o \sin \omega t$), при условии потери устойчивости данной балки.

Изложенные также полученные соотношения, а основные данные представляются в виде таблиц и графиков.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 621.833 : 539.3 : 621.81

Т. Младинеску

Опытное определение динамического коэффициента у прямозубых цилиндрических зубчатых колес

Опытные определения, представленные в работе, имеют целью проверку полученных автором значений путем аналитического расчета для динамического коэффициента прямозубых цилиндрических зубчатых колес.

Представлено оборудование и применяемая аппаратура, испробованные зубчатые колеса, методика измерения, полученные результаты с их истолкованием и делаются выводы общего и применительного характера.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 621.431 : 662.61.518

Н. Апостолеску, Б. Грюнвальд, Д. Тараза

Определение закона горения двигателя внутреннего сгорания по указанной диаграмме посредством цифровых вычислителей

В работе представлен метод определения закона горения путем обработки указанной диаграммы, принимая во внимание ряд важных явлений, пренебрегаемых предшествующими методами; термические прерывности газовой смеси, диссоциация газов, испарение горючего и теплообмен со стенками.

Для решения полученного уравнения, уточняющего закон горения, предлагается метод Рунге-Кутта второго порядка, представляя органиграмму расчетной программы, составленной для цифрового вычислителя.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 539.4 : 624.023.9 : 61.072.2

A. Petre, V. Cosac

Forced Vertical Vibrations of Pendular Beams

A prismatic beam, without mass, pendularly supported at the ends, with transverse rigidity lower than vertical rigidity and loaded with a load P at half its span, is considered.

The authors study in the paper the vertical vibrations of load P due to the application, also in the middle of the beam, of a load F variable in time ($F = Fo \sin \omega t$)

The authors study the load vibrations in the case in which the beam looses its stability.

They determine at the same time the relation between the ratio of load P forced vibration amplitude and that corresponding to a load equal to the critical load and the ratio of the disturbing force pulsation and load P pulsation, before the loss of the beam stability.

The computation results are given in the form of graphs and tables.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 621.833 : 539.3 : 621.81

T. Mladinescu

Experimental Determination of the Dynamic Coefficient in Cylindrical Toothed Wheels with Straight Toothing

The experimental determinations presented in the paper are meant to verify the values obtained by the author through analytic computation for the dynamic coefficient of straight toothed cylindrical wheels.

The author presents the equipment and apparatus used, the toothed wheels tested, the measuring methods, the results obtained and their interpretation and draws conclusions of a general and applicative character.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 621.431 : 662.61.518

N. Apostolescu, B. Grünwald, D. Taraza

Determination of the Combustion Law of an Internal Combustion Engine by Means of Digital Computers Using the Indicated Diagram.

The authors present in the paper a method of determining the law of combustion by studying the indicated diagram, taking into consideration a series of important phenomena which are omitted by previous methods: the thermal discontinuities of the gas mixture, the dissociation of gas, fuel atomization and heat exchange with the walls.

In order to solve the equation obtained which specifies the law of combustion, the authors suggest the Runge-Kutta IInd order method, presenting the flow chart of the calculation program elaborated for a digital computer.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 621.431 : 621 : 242 : 621 827

Р. Маницiу

Построение для графического определения перемещения поршня в нормальном и смещенном кривошипно-шатунном механизме

Описывается графическое построение перемещения поршня в нормальном и смещенном кривошипно-шатунном механизме как для точного выражения перемещения так и для приближенного выражения, часто употребляемое в проектирование.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 621.3.015 621.315/.316 : 621.314.1/.2. : 621.313.12

Д. Кристеску, М. Будашкэ

Исследование на модели деформирования импульсных волн под действием эффекта корона

Для изучения деформирования импульсов в этой работе применяется метод физического моделирования. Для емкостей и для времени применяются четыре масштаба моделирования, а для сопротивлений — один.

Определяется величина деформирования волн, срезанных импульсом под действием эффекта корона. Опытные определения уровня деформирования произведены в зависимости от пройденного расстояния от наклона начальной волны и от момента среза. Длина моделированного распространения с соответствующими клетками в 50 метрах от линии колеблется между 1 и 5 км.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Д. К. 629.113 : 629.11.012 : 621-233

Г. Фрэцила

Относительно дополнительных нагружений трансмиссин в автомобилях с двумя ведушими осями

В статье изучаются дополнительные нагружения трансмиссии в автомобилях с двумя ведущими осями, а также влияние различных факторов на эти нагружения.

Анализируются также вредные эффекты дополнительных нагружений и указываются меры, которые должны быть приняты как при проектировании, так и во время эксплуатации.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 621.431 : 621-242 : 621.827

R. Manițiu

A Construction of Graphical Determination of the Piston Displacement of the Normal and Excentric Connecting-road Assembly

A graphical construction for the éxpresion of the piston displacement of a normal and excentric crank and connecting-rod assembly is described, for the exact expression as well as for the approximate one — usually utilised in designing.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 621.3.015 : 621.315/.316 : 621.314.1/.2 : 621.313.12

D. Cristescu, M. Budaşcă

Study on the Model of the Deformation of Impulse Waves Under the Action of the Corona Effect

The authors use in this paper, for the study of impulse deformation, the method of physical modelling. The system modelling scales used are for capacities and time 4, and for resistance 1.

The authors determine the magnitude of the deformation of the waves cut by the impulse under the action of the corona effect. The deformation level experimental determinations are made according to the distance travelled, the initial wave slope and the cutting moment. The length of propagation modelled with cells corresponding to 50 m line ranges between 1 and 5 km.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.C. 629.113 : 629.11.012 : 621-233

Gh. Frățilă

Concerning the Additional Loading of Transmission in Automobiles Provided with two Motor Axles

The author studies in the paper the additional transmission loadings in automobiles provided with two motor axles, as well as the influence of various factors on these loadings.

They also analyse the opposite effects of additional loadings and indicate the measures which should be taken when designing as well as when running.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Résumé

C.D. 517 : 535

C. Ionescu-Bujor

Les translations centrées du plan.

On a étudié, pour les transformations par lentilles, une transformation plane, la translation convergente (Bul. Inst. Politehnic Bucureşti, Tom. XXIII, Fasc. 2, 1961). Dans cette note, on considère une transformation plus générale, la translation centrée, définie de la manière suivante :

La translation centrée plane est une transformation ponctuelle déterminée par un point O, par un vecteur $\bar{u}$ du plan, dont le module est 1, et par une fonction $\varphi(x)$ qui est définie et continue sur l'ensemble R des nombres réels et qui satisfait la condition $\varphi(x+\pi) = -\varphi(x)$ pour $x \in R$. Par cette transformation, un point quelconque $M(\overline{OM} = \bar{r})$ du plan est transformé en M_1 $(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$ tel que

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r},$$

α étant l'angle formé $\bar{r}$ par $\bar{u}$. On considère aussi le cas $\varphi(x)$ définie et continue sur $R—D$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 668.735 : 547.533 : 542

E. Bratu, Fr. Gothart

Rectification en colonnes à corps de remplisage vibrés. (Une nouvelle possibilité pour atteindre des degrés élevés de rectification).

Les auteurs ont étudié l'influence des vibrations sur l'effet de séparation des colonnes avec des corps de remplissage à diverses amplitudes, fréquences, vitesse des vapeurs, hauteur de colonne. Pour des amplitudes de 2-3 mm et des fréquences de 50 s^{-1} le degré de séparation est 3-4 fois plus grand que celui de la colonne non vibrée. Ces degrés élevés de réparation sont atteints avec les anneaux Rasching habituels, sans diminution de la vitesse admissible de passage. Les résultats permettent de faire des appréciations sur le mécanisme de transfert de masse entre liquide et vapeurs en colonnes de remplissage, intensifié par vibration.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 542..2 : 546.221 : 544/545

A. Cerbu

Appareil de laboratoire pour la production de l'hydrogène sulfureux et d'autres gaz utilisés dans l'analyse semimicrochimique.

L'auteur décrit un appareil fabriqué en verre, utilisé pour produire de petites quantités de gaz, nécessaires pour les travaux pratiques dans les laboratoires de chimie. L'auteur indique le schéma de l'appareil et le principe de fonctionnement. Il montre les avantages que présente l'appareil.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Zusammenfassung

D.K. 517 : 535

C. Ionescu-Bujor

Die zentrierte Translation der Ebene.

In Verbindung mit den Transformationen durch Linsen, hat man eine Transformation der Ebene, die konvergente Translation, studiert (Bul. Inst. Politehnic Bucureşti. Tom. XXIII, Fasc. 2. 1961). In dieser Anmerkung betrachtet man eine allgemeinere Transformation, die zentrierte Translation, die so definiert wird :

Die zentrierte Translation der Ebene ist eine Transformation, die von einem Punkt O, einem Vektor $\bar{u}$ der Ebene ($|\bar{u}|=1$) und von einer Funktion $\varphi(x)$ determiniert wird. $\varphi(x)$ ist definiert und stetig für alle $x \in R$ (R die Menge der reellen Zahlen), auch $\varphi(x+\pi) = -\varphi(x)$. Mit dieser Transformation wird ein Punkt $M(\overline{OM}=\bar{r})$ der Ebene in $M_1(\overline{OM_1}=\bar{r}_1)$ transformiert, so dass

$$\bar{r}_1 = \left[1+\frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r},$$

(α, der Winkel $\bar{u}, \bar{r}$).

Man betrachtet auch $\varphi(x)$ definiert und stetig für alle $x \in R-D$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 668.735 : 547.533 : 542

E. Bratu, Fr. Gothard

Die Rektifikation in vibrierten Füllkörperkolonnen (Eine neue Möglichkeit zur Erreichung hoher Trennwirkungen).

Es wurde der Einfluss von Vibrationen über die Trennwirkung der Füllkörpersäulen bei verschiedenen Amplitüden, Frequenzen, Dampfgeschwindigkeiten, Kolonnenhöhen und Kolonnendurchmessern untersucht. Bei Amplitüden von 2-3 mm und Frequenzen von 50 Hz ist die Trennwirkung 3-4 mal grösser als die derselben nichtvibrierten Kolonne. Die hohen Trennwirkungen werden mit gewöhnlichen Raschigringen ohne Verminderung der zulässigen Durchsatzgeschwindigkeiten erreicht. Die Ergebnisse erlauben Aussagen über den Mechanismus des durch Vibrationen intensivierten Stoffaustausches zwischen Flüssigkeit und Dampf in Füllkörperkolonnen zu machen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

A. Cerbu

Laborgerät für die Erzeugung von Schwefelwasserstoff, sowie anderer Gase die für die halbmikrochemische Analyse benutzt werden

Es wird ein, aus Glas erzeugtes Gerät beschrieben, das zur Herstellung von kleinen Gasmengen benützt wird, die in den chemischen Laboratorien für praktische Arbeiten notwendig sind. Es wird die Zeichnung des Geräts und das Arbeitsprinzip gegeben. Es werden die von dem Gerät gebotenen Vorteile angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

Gr. Teodorescu

Méthode de détermination du N-phényl-morpholyne

On présente la méthode de détermination du l'intermédiaire organique N-phényl-morpholyne, par complexation du sel Reinecke. La détermination par cette méthode est posible, parce que le produit résulté par complexation est pratique insoluble dans l'eau et très soluble dans l'acétone. La détermination c'est efectuée en solution aqueuse du H_2SO_4 pour réaliser la structure de cation complex eble de aminique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 629.19 : 517 : 582

C. Guţă

Le régime optimum de montée des fusées multiétagées.

L'auteur adopte dans l'ouvrage une loi de variation en fonction de la hauteur de la vitesse de sortie des gaz d'un moteur, pour les fusées multiétagées. Il remarque la simplicité des formules finales obtenues et la facilité avec laquelle celles-ci peuvent être utilisées pour déduire le régime optimum de fonctionnement des moteurs pour atteindre une altitude donnée, dans une première approximation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 621.8.02 : 621.231 : 531.1 : 620.178.1 : 621.01

N. I. Manolescu, Gabriela Iarca

Une méthode cinétostatique pour résoudre les mécanismes à l'aide du changement de l'élément ou point de réduction des forces.

Dans le travail on applique la méthode de changement du point ou de l'élément de réduction pour la diminution de la classe du mécanisme d'après la classification d'Artobolevski pour la détermination des réactions dans les coples cinématiques.

Cette méthode utilisant le principe de la superposition des effets donne les résultats par une voie plus rapide que a autres méthodes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

Gr. Teodorescu

Methode zur Bestimmung des N-Phenylmorpholin.

Es wird eine Methode zur Bestimmung des organischen Vermittlers N-Phenylmolpholin durch Komplexion mit Reinecke-Salz angegeben. Die Bestimmung durch diese Methode ist möglich, da das durch Komplexion erhaltene Produkt praktisch unlösbar in Wasser und sehr gut lösbar in Azeton ist. Die Bestimmung wurde in einer wässerimgen Schwefelsäuremlösung durchgeführt um dadurch den kationisierten komplexiblen Aufbau vom Aminostickstoff zu erzielen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 629.19 : 517 : 522

C. Guţă

Der optimale Steigflugzustand bei mehrstufigen Raketen

In vorliegender Arbeit wird ein Gesetz zur Variation der Auspuffgeschwindigkeit der Gase aus dem Motor bei mehrstufigen Raketen angenommen. Es wird die Einfachheit der Endformeln hervorgehoben. sowie die Leichtigkeit, mit der diese, in erster Annäherung, lür die Folgerung des optimalen Betriebs der Motoren zwechs Erreichung einer gegebenen Höhe benützt werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 621.8.02 : 621.231 : 531.1 : 620.178.1 : 621.01

N. I. Manolescu, Gabriela Iarca

Eine Methode für die kinetostatische Bestimmung durch Wechseln des reduzierten Punktes (oder des reduzierten Gliedes) der Kräfte

In der Arbeit benutzt man die Methode des Wechselpunktes oder Wechselrgliedes der Kräfte um die Klasse des Mechnismus (nach der I. I. Artobolewski-Klassifikation) zu verringen und damit die Reaktionskräfte der kinematischen Paare zu bestimmen.

Diesses Methode, die das Prinzip des Superpositionseffekts benutzt. hat einen grossen Vorteil, da sie eine schnnelle und exakte Lösung gibt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 539.4 : 624.023.9 : 627.072.2

A. Petre, V. Cosac

Les vibrations forcées verticales des poutres pendulaires.

On considère une poutre prismatique, sans masse, appyée de manière pendulaire aux extrémités, dont la rigidité transversale est moindre que la rigidité verticale, et qui est chargée d'un poids P au milieu de son ouverture.

Les auteurs étudient dans l'ouvrage les vibrations verticales du poids P dues à l'application, toujours au milieu de la poutre, d'une charge F variable dans le temps ($F = F_0 \sin \omega t$).

On étudie les vibrations du poids dans le cas où la poutre perd sa stabilité.

On établit en même temps la relation entre le rapport de l'amplitude de la vibration forcée du poids P et de celle qui correspond à une charge égale à la charge critique et le rapport entre la pulsation de la force perturbatrice et la pulsation de poids P_0 avant la perte de stabilité de la poutre.

Les résultats du calcul sont donnés sous forme de graphiques et de tables.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 621.833 : 539.3 : 621.81

T. Mladinescu

Détermination expérimentale du coefficient dynamique des roues dentées cylindriques à denture droite

Les déterminations expérimentales présentées dans l'ouvrage ont pour but de vérifier les valeurs obtenues par l'auteur par le calcul analytique pour le coefficient dynamique des roues cylindriques à dents droites.

L'auteur présente l'outillage et les appareils utilisés, les roues dentées mises à l'essai, l'ensemble des méthodes de mesurage, les résultats obtenus par leur interprétation et il tire des conclusions à caractère général et applicatif.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 621.431 : 662.61.518

N. Apostolescu, B. Grünwald, D. Taraza

Détermination de la loi de combustion d'un moteur à combustion interne d'après le diagramme indiqué, par l'intermédiaire des calculateurs numériques.

Les auteurs présentent dans l'ouvrage une méthode de détermination de la loi de combustion par le traitement du diagramme indiqué, en prenant en considération une série de phénomènes importants, mais qui sont ignorés par les méthodes antérieures : les discontinuités thermiques du mélange de gaz, la dissociation des gaz, la vaporisation du combustible et l'échange de chaleur avec les parois.

Pour résoudre l'équation obtenue qui précise la loi de combustion, les auteurs proposent la méthode Runge-Kutta du II-e ordre, présentant l'organigramme du programme de calcul élaboré pour un calculateur numérique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 539.4 : 624.023.9 : 624.072.2

A. Petre, V. Cosac

Senkrechte erzwungene Schwingungen der Pendelbalken

Es wird ein, prismatischer Balken, ohne Masse, pendulär an den Enden gestützt, betrachtet, dessen Querstarrheit kleiner ist als die Vertikalstarrheit und in der Mitte seiner Offnung mit einem Gewicht P belastet wird.

In der Arbeit werden die senkrechten Schwingungen des Gewichtes P_0 studiert und zwar mittels einer, in der Zeit veränderlichen Belastung ($F = F_0 \sin wt$), die gleichfalls in der Mitte des Balkens angebracht wurde.

Die Schwingungen des Balkens werden nur im Falle, dass der Balken seine Stabilität verliert, studiert.

Bei dieser Gelegenheit wird das Verhältnis zwischen der Amplitude der erzwungenen Schwingung des Gewichts P und der entsprechenden. Amplitude einer Belastung, die der kritischen Belastung gleich ist, sowie das Verhältnis zwischen der Pulsation der Störkraft und der Pulsation des Gewichts P bevor der Balken seine Stabilität verliert, bestimmt.

Die Berechnungsergebnisse werden unter der Form von Diagrammen und Tabellen wiedergegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 621.833 : 539.3 : 621.81

T. Mladinescu

Experimentelle Bestimmung des dynamischen Faktors bei zylindrischen Zahnrädern mit Geradverzahnung.

Die experimmentellen Bestimmungen aus vorliegender Arbeit dienen zur Überprüfung der Werte, die von dem Verfasser durch analitische Berechnung für den dynamischen Faktor bei zylindrischen Rädern mit Geradverzahnung erhalten wurden.

Es werden die benützte Ausrüstung und Apparatur, die geprüften Zahnräder, die Messmethodik, sowie die Ergebnisse angegeben, die durch ihre Auslegung erhalten wurden und Schlussfolgerungen allgemeiner und anwendbarer Art gezogen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 621.431 : 662.61.518

N. Apostolescu, B. Grünwald, D. Taraza

Bestimmung des Brenngesetzes eines Verbrennungsmotors nach angegebenem Diagramm, über die Digitalrechner.

In vorliegender Arbeit wird eine Methode zur Bestimmung des Brenngesetzes durch Bearbeitung des angegebenen Diagramms angeführt, wobei einer Reihe wichtiger Erscheinungen Rechnung getragen wird, die von den vorhergehenden Methoden vernachlässigt wurden: Wärmediskontinuität des Gasgemisches, Gasdissoziation, Brennstoffverdampfung und Wärmeaustausch mit dem Wand.

Zur Löosung der erhaltenen Gleichung, die das Brenngesetz bestimmt, wird die Runge-Kutte-Methode II. Ordnung vorgeschlagen und das für einen Digital-Rechner zusammengestellte Berechnungs-Programm-Organigramm angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 621.431 : 621-242 : 621.827

R. Maniţiu

Une construction pour la détermination graphique du déplacement du piston dans le mécanisme bielle-manivelle normal et désaxé

L auteur établit une construction graphique pour l'expression du déplacement du piston dans un mécanisme bielle-manivelle normal et désaxe, pour l'expression exacte du déplacement aussi bien que pour l'approximative — souvent utilisé dans les projets.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 621.3.015 : 621.315/.316 : 621.314.1/2 : 621.313.12

D. Cristescu, M. Budaşcă

Recherche sur modèle de la déformation des ondes d'impulsion sous l'action de l'effet de couronne

Pour l'étude de la déformation des impulsions, les auteurs utilisent dans cet ouvrage la méthode du modelage physique. Les échelles de modelage de l'installation utilisée sont pour des capacités et temps 4 et pour des résistances 1.

Les auteurs déterminent la grandeur de la déformation des ondes coupées par l'impulsion sous l'action de l'effet de couronne. Les déterminations expérimentales du niveau de la déformation sont faites en fonction de la distance parcourue, de la pente de l'onde initiale et du moment de coupe. La longueur de propagation modelée avec des cellules correspondant à 50 m de ligne est comprise entre 1 et 5 km.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

C.D. 629.113 : 629.11.012 : 621-233

Gh. Frăţilă

Sur les charges supplémentaires de la transmission dans les automobiles à deux essieux moteurs.

L'auteur étudie dans l'article des charges suplémentaires de la transmission dans les automobiles à deux essieux moteurs, ainsi que l'influence des divers facteurs sur ces charges.

Il analyse aussi les effets nuisibles des charges supplémentaires et indique les mesures à prendre tant au moment du projet que pendant l'exploitation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 621.431 : 621-242 : 621.827

R. Maniţiu

Eine Konstruktion zur graphischen Bestimmung der Kolbenverschiebung bei dem normalen und geschränkten Kurbelgetriebe.

Es wird eine Methode zur graphischen Bestimmung der Kolbenverschiebung eines normalen und geschränkten Kurbelgetriebes beschrieben, die sich auf die exakte, Formel stützt, sowie auf die annähernde die meist im Entwerfen benützt ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

D.K. 621.3.015 : 621.315/.316 : 621.314.1/.2 : 621.313.12

D. Cristescu, M. Budaşcă

Untersuchung der Verfomung der Impulswellen unter Wirkung des Koronaeffekts mittels eines Modells.

Für das Studium der Impulsverformung wird in vorliegender Arbeit die Methode der physikalischen Modellierung benützt. Die Modellierungsskalen der benützten Anlage sind für Kapazität und Zeit 4, und für die Widerstände 1.

Es wird die Verformungsgrösse der von dem Impuls, unter der Wirkung des Koronaeffekts durchschnittenen Wellen, bestimmt. Die Versuchsbestimmungen des Verformungsniveaus werden in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke, der Steigung der Anfangswelle und dem Durchschneidemoment ausgeführt. Die modellierte Fortpflanzungslänge mit entsprechenden Zellen je 50 m Leitung ist zwischen 1 und 5 km.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

Gh. Frăţilă D.K. 629.113 : 629.11.012 : 621-233

Betreffend die zusätzlichen Übertragungsladungen bei Motoren mit zwei Triebachsen.

In vorliegendem Artikel werden die zusätzlichen Übertragungsladungen bei Motoren mit zwei Triebachsen, sowie die Einflüsse der verschiedenartigen Faktoren auf diese Versuche studiert.

Es werden gleichzeitig die schädlichen Effekte der zusätzlichen Ladungen analysiert und die Massnahmen angegeben, die sowohl während der Planung, als auch im Betrieb getroffen werden müssen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 4/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

MATEMATICĂ

C.Z. : 517 : 535

LES TRANSLATIONS CENTRÉES DU PLAN

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

1°. **Définition.** L'étude des transformations par lentilles nous a conduit à définir {1} une transformation plane, la translation convergente, de la manière suivante :

„La translation convergente plane est une transformation ponctuelle, déterminée par un point 0 et par un vecteur $\bar{v}$ du plan. Elle transforme un point quelconque M du plan en M_1 ,avec les conditions : O, M, M_1 en ligne droite et

$$\overline{MM_1} = v \cos(\pi + \alpha)\frac{\overline{OM}}{OM}, \tag{1}$$

où $\alpha = \sphericalangle(\bar{v}, \overline{OM})$.

La relation (1) a été exprimée, dans {2}, ainsi

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v}\ \text{grad}\ r)\ \text{grad}\ r \tag{1'}$$

où $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{r}_1 = \overline{OM_1}$.

Ce qui est caractéristique pour une translation convergente, c'est qu'elle se comporte sur une droite, qui contient le point 0, comme une translation, qui dans certains cas, transforme les points de cette droite d'une manière convergente vers O. Cette propriété explique le nom adopté pour ces transformations.

Dans cette note, nous considérons une transformation plus générale, *la translation centrée.*

„La translation centrée plane est une transformation ponctuelle, déterminée par un point O, par un vecteur $\bar{u}$ du plan, dont le module est 1, et par une fonction $\varphi(x)$ qui est définie et continue sur l'ensemble R *des nombres réels et qui satisfait la condition*

$$\varphi(x + \pi) = -\varphi(x)$$

pour $x \in R$.

Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest, 1—3 novembre 1968.

Par cette transformation, un point quelconque $M(\overline{OM}=\bar{r})$ *du plan est transformé en* $M_1(\overline{OM_1}=\bar{r}_1)$ *qui satisfait à la condition*

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r}, \tag{2}$$

α étant l'angle formé par le vecteur $\bar{r}$ *avec* $\bar{u}$ *à savoir* $\alpha = (\sphericalangle\, \bar{u}, \bar{r})$.

($A \llcorner 8°$ nous donnerons une extension de cette définition pour le cas des fonctions $\varphi(x)$ qui sont définies et continues sur $R—D$).

O, $\bar{u}$ et $\varphi(x)$ sont respectivement *le centre, le vecteur* et *la fonction de la translation centrée.* La droite x'Ox, qui contient le vecteur $\bar{u}$, est *l'axe de la transformation* et son sens positif, de 0 vers x, est le sens de ce vecteur.

Il résulte que les points, *O*, *M*, M_1 sont en ligne droite et, par conséquent, les droites du plan, qui contiennent le point 0, sont des droites doubles de la transformation.

Note. La translation convergente considérée dans la note {1} est une translation centrée dont le centre est O, le vecteur est

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{v}$$

et la fonction $\varphi(x) = —v \cos x$.

2°. **La translation centrée plane τ, définie à $\llcorner 1°$, se comporte sur un axe z'Oz ayant le vecteur $\bar{u}_1$, dont l'angle avec $\bar{u}$ est α, comme une translation t_α déterminée par le vecteur $\varphi(\alpha)\,\bar{u}_1$.**

Considérons comme sens positif de l'axe *z'Oz* le sens de O vers *z* et soit $M(\overline{OM}=\bar{r})$ un point de la demi-droite *Oz*. Ce point est transformé en $M_1(\overline{OM_1}=\bar{r}_1)$ par τ. On a

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \varphi(\alpha)\,\bar{u}_1,$$

donc

$$\overline{MM_1} = \varphi(\alpha)\,\bar{u}_1, \tag{3}$$

Soit $N(\overline{ON}=\bar{\rho})$ un point de la demi-droite *Oz'*, transformé en $N_1(\overline{ON_1}=\bar{\rho}_1)$ par τ. On a

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho} + \varphi(\alpha+\pi)\frac{\bar{\rho}}{\rho}.$$

Mais $\varphi(\alpha+\pi) = -\varphi(\alpha)$ et $\dfrac{\bar{\rho}}{\rho} = -\bar{u}_1$, donc

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho} + \varphi(\alpha)\,\bar{u}_1 \quad \text{ou}$$

$$\overline{NN_1} = \varphi(\alpha)\,\bar{u}_1. \tag{3'}$$

Il résulte de (3) et (3') que tout point de l'axe z'Oz est transformé par τ en son correspondant obtenu par la translation t_α, dont le vecteur este $\varphi(\alpha)\bar{u}_1$, appliquée aux points de cet axe.

Le point O, considéré sur l'axe z'Oz, ayant $\bar{r}=0$, est transformé par τ en 0_1, point situé sur cet axe. On a

$$\overline{OO_1} = \varphi(\alpha)\,\bar{u}_1.$$

Donc, par τ, le point O a un correspondant sur chaque axe qui le contient. Ces correspondants appartiennent à une courbe (γ) qui dans le système de coordonnées polaires dont le pôle est O et l'axe polaire x'Ox, a l'équation

$$\rho = \varphi(\alpha), \tag{4}$$

pour les valeurs de α qui donnent $\varphi(\alpha)>0$ et

$$\rho = -\varphi(\alpha)$$

donc

$$\rho = \varphi(\alpha+\pi) \tag{4'}$$

pour les valeurs de α qui donnent $\varphi(\alpha)<0$.

(γ) *est la courbe caractéristique de la translation centrée* τ.

3°. **Les points doubles.** Si α_k est une racine réelle de l'équation $\varphi(x)=0$, les points de la demi-droite Oy, dont l'équation dans le système de coordonnées polaires adopté à $\overset{L}{\gamma}$ 2° est $\alpha=\alpha_k$, sont des points doubles de la transformation τ. Dans ce cas $\alpha_k+\pi$ est aussi racine de l'équation $\varphi(x)=0$. Donc la demi-droite Oy' ayant l'équation $\alpha=\alpha_k+\pi$ contient aussi des points doubles de τ. Ainsi y'Oy est une droite de points doubles de τ.

4°.**Translations centrées, avec le même centre, équivalentes. Soit τ la translation centrée déterminée par le centre 0, le vecteur $\bar{u}$ et par la fonction $\varphi(x)$. Si $\bar{v}$ est un vecteur unitaire, dont l'angle avec $\bar{u}$ est θ, $[\measuredangle(\bar{u},\bar{v})=\theta]$, la translation centrée τ' déterminée par le centre 0, le vecteur $\bar{v}$ et la fonction $\varphi(x+\theta)$, est équivalente à τ.**

En effet, on considère un point quelconque $M(\overline{OM}=\bar{r})$ et on note

$$\alpha = \measuredangle(\bar{u},\bar{r}),\quad \beta = \measuredangle(\bar{v},\bar{r}).$$

Le point M est transformé par τ en $M_1(\overline{OM}_1=\bar{r}_1)$. On a

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r}. \tag{5}$$

Le point M est transformé par τ' en $M_2(\overline{OM}_2=\bar{r}_2)$. On a

$$\bar{r}_2 = \left[1 + \frac{\varphi(\beta+\theta)}{r}\right]\bar{r}. \tag{5'}$$

Mais $\beta+\theta=\alpha$, donc (5') donne

$$\bar{r}_2 = \left[1 + \frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r},$$

d'où la conclusion $M_1 \equiv M_2$.

5°. **Le groupe des translations centrées qui ont le même centre.**

a) Soit $[\tau(O)]$ l'ensemble des translations centrées avec le même centre O. La translation centrée dont le centre est O, déterminée par le vecteur $\bar{u}$ et par la fonction $\varphi(x)\equiv 0$ est une transformation identique.

b) *Le produit $\tau_2\tau_1$ de deux transformations centrées τ_1, τ_2 déterminées par le même centre O, par les vecteurs $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ dont l'angle est $\sphericalangle(\bar{u}_1, \bar{u}_2)=\theta$ et par les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ est équivalent à une translation centrée $\tau \in [\tau(O)]$ déterminée par le vecteur $\bar{u}_1$ et par la fonction*

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x-\theta).$$

On sait que τ_2 est équivalente à $\tau_2' \in [\tau(0)]$ déterminée par le vecteur $\bar{u}_1$ et par la fonction $\varphi_2(x-\theta)$.

Soit $M(\overline{OM}=\bar{r})$ un point quelconque du plan, transformé en $M_1(\overline{OM}_1=\bar{r}_1)$ par τ_1. Si $\sphericalangle(\bar{u}_1, \bar{r})=\alpha$, alors

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{\varphi_1(\alpha)}{r}\right]\bar{r}. \qquad (6)$$

La point M_1 est transformé en $M_2(\overline{OM}_2=\bar{r}_2)$ par τ_2'. Si $\sphericalangle(\bar{u}_1, \bar{r}_1)=\beta$, alors

$$\bar{r}_2 = \left[1 + \frac{\varphi_2(\beta-\theta)}{r_1}\right]\bar{r}_1,$$

donc

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + \varphi_1(\alpha)\frac{\bar{r}}{r} + \varphi_2(\beta-\theta)\frac{\bar{r}_1}{r_1}. \qquad (7)$$

Si $\beta = \alpha$, on a $\varphi_2(\beta-\theta) = \varphi_2(\alpha-\theta)$ et $\dfrac{\bar{r}_1}{r_1} = \dfrac{\bar{r}}{r}$;

si $\beta = \alpha + \pi$, on a $\varphi_2(\pi+\alpha-\theta) = -\varphi_2(\alpha-\theta)$ et $\dfrac{\bar{r}_1}{r_1} = -\dfrac{\bar{r}}{r}$.

Donc, on a toujours

$$\varphi_2(\beta-\theta)\frac{\bar{r}_1}{r_1} = \varphi_2(\alpha-\theta)\frac{\bar{r}}{r}$$

et on peut écrire

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + [\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha - \theta)] \frac{\bar{r}}{r},$$

rélation qui prouve que M est transformé en M_2 par τ.

Note. 1) Comme la transformation τ est équivalente à une translation centrée τ' dont le centre est O, le vecteur $\bar{u}_2$ et la fonction

$$\varphi(x + \theta) = \varphi_1(x + \theta) + \varphi_2(x),$$

le produit $\tau_2 \tau_1$ est aussi équivalent à τ'.

2) Soit $\bar{s} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Le vecteur $\frac{\bar{s}}{s}$ forme avec $\bar{u}_1$ l'angle $\frac{\theta}{2}$ et la translation centre τ'', déterminée par le centre O, le vecteur $\frac{\bar{s}}{s}$ et par la fonction

$$\varphi_1\left(x + \frac{\theta}{2}\right) + \varphi_2\left(x - \frac{\theta}{2}\right)$$

est équivalente à τ, donc à $\tau_2 \tau_1$.

c) *La transformation inverse de la translation centrée déterminée par le centre O, le vecteur* $\bar{u}$ *et la fonction* $\varphi(x)$, *est la translation centrée* τ^* *déterminée par O,* $\bar{u}$ *et par la fonction* $-\varphi(x)$.

Le produit $\tau^* \tau$ est équivalent à une translation centrée dont le centre est O, le vecteur $\bar{u}$ et la fonction $\varphi(x) - \varphi(x) \equiv 0$, donc à la transformation identique.

Note. L'inverse τ^{-1} de τ est aussi équivalente à une translation centrée dont le centre est O, le vecteur $-\bar{u}$ et la fonction $\varphi(x)$, car l'angle des vecteurs $\bar{u}, -\bar{u}$ est π et $-\varphi(x+\pi) = \varphi(x)$.

d) On conlut que *l'ensemble* $[\tau(O)]$ *est un groupe. Ce groupe est commutatif.*

Nous avons montré à (b) que le produit $\tau_2 \tau_1$ est équivalent à τ déterminée par O, $\bar{u}_1$ et par la fonction $\varphi_1(x) + \varphi_2(x - \theta)$. En appliquant cette propriété au produit $\tau_1 \tau_2$ et comme $\sphericalangle (\bar{u}_2, \bar{u}_1) = -\theta$, il résulte que $\tau_1 \tau_2$ est équivalent à une translation centrée dont le centre est O, le vecteur $\bar{u}_2$ et la fonction $\varphi_2(x) + \varphi_1(x + \theta)$, donc à τ' définie à (b, Note 1). Mais τ' est équivalente à τ. Alors on a

$$\tau_2 \tau_1 = \tau_1 \tau_2.$$

6°. Le groupe des translations centrées qui ont le même centre et le même axe.

a) Soit $[\tau(O, u]$ l'ensemble des translations centrées déterminées par le même centre O et par le même vecteur $\bar{u}$. Si $\tau_1 \in [\tau(O, \bar{u})]$ et $\tau_2 \in [\tau(O, \bar{u})]$ sont déterminées respectivement par les fonctions

$\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, le produit $\tau_2\ \tau_1$ est équivalent à une translation centrée, $\tau \in [\tau(O, \bar{u})]$ déterminée par la fonction $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$. Considérant aussi les autres propriétés de $\overset{L}{\urcorner}$ 5°, il résulte que $[\tau(O, \bar{u})]$ est un groupe commutatif.

b) Soit $[\tau[O, \bar{u}, \varphi(x)]]$ l'ensemble des translations centrées qui ont le même centre et le même axe, déterminées par le centre O, le vecteur $\bar{u}$ et par les fonctions de l'ensemble $[\lambda\, \varphi(x)]$, où $\varphi(x)$ est une fonction donnée qui satisfait les conditions indiquées à $\overset{L}{\urcorner}$ 1° et λ est un paramétre réel. Nous concluons de a) que cet ensemble est un sous-groupe du groupe $[\tau(O, \bar{u})]$.

c) Soit $[f(x)]$ l'ensemble des fonctions définies par

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

où a, b sont des nombres réels. L'ensemble des translations centrées qui ont le même centre O, le même vecteur $\bar{u}$, déterminées par les fonctions de l'ensemble $[f(x)]$ est un sous-groupe du groupe $[\tau(O, \bar{u})]$.

d) Soit $[P(x)]$ l'ensemble des polynômes trigonométriques dont la forme est

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[a_{2k+1} \cos (2k+1)x + b_{2k+1} \sin (2k+1)x \right],$$

où a_{2k+1}. b_{2k+1} sont des nombres réels.

L'ensemble des translations centrées déterminées par le même centre O, par le même vecteur $\bar{u}$ et par les fonctions de $[P(x)]$, est un sous-groupe du groupe. $[\tau(O, \bar{u})]$.

7°. Sur les courbes transformées par τ.

a) Considérons la translation centrée τ, déterminée par le centre O, le vecteur $\bar{u}$ et par la fonction $\varphi(x)$. Soit $x'Ox$ l'axe de la transformation τ; cet axe a $\bar{u}$ comme vecteur et le sens positif de O vers x. Dans un système de coordonnées polaires dont le pôle est O et l'axe polaire Ox, on note (ρ, α) les coordonnées d'un point quelconque $M(\overline{OM} = \bar{r})$ et (ρ_1, α_1) les coordonnées de $M_1(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$, le correspondant de M par τ. Comme

$$\bar{r}_1 = [r + \varphi(\alpha)] \frac{\bar{r}}{r},$$

entre les coordonnées de ces points on a :

$$\left.\begin{array}{l} \text{dans le cas } \rho+\varphi(\alpha) \geqslant 0, \text{ les relations } \alpha_1 = \alpha \text{ et } \rho_1 = \rho + \varphi(\alpha); \\ \text{dans le cas } \rho + \varphi(\alpha) < 0, \text{ les relations } \alpha_1 = \pi + \alpha \text{ et } \rho_1 = -\rho - \varphi(\alpha). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Au point O il correspond par τ la courbe caractéristique de la transformation τ.

b) *La transformation de la courbe* $\rho = f(\alpha)$ *par* τ. Soit donnée la courbe

$$(C)\ \rho = f(\alpha). \tag{8}$$

La partie de la courbe *(C)* pour laquelle on a $f(\alpha)+\varphi(\alpha) \geqslant 0$, est transformée par τ en

$$(\Gamma_1)\ \rho = f(\alpha) + \varphi(\alpha). \tag{9}$$

La partie de *(C)* pour laquelle on a $f(\alpha) + \varphi(\alpha) < 0$ est transformée par τ en

$$(\Gamma_2)\ \rho = \varphi(\alpha) - f(\alpha - \pi) \tag{9'}$$

car — dans ce cas — on a

$$\rho_1 = -\rho - \varphi(\alpha) = -f(\alpha) - \varphi(\alpha) = -f(\alpha_1 - \pi) - \varphi(\alpha_1 - \pi) = \\ = -f(\alpha_1 - \pi) + \varphi(\alpha_1).$$

Si la courbe *(C)* contient le point O, celui-ci est transformé par τ en (γ), la courbe caractéristique de τ.

Par conséquent, la courbe *(C)* est transformée par τ en

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

si elle ne contient pas le point O et en

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \gamma$$

si elle contient O.

c) Si pour chaque valeur de x on a $f(x)+\varphi(x)>0$, alors τ transforme la courbe

$$(C)\ \rho = f(\alpha),$$

qui ne contient pas le point O, en

$$(\Gamma)\ \rho = f(\alpha) + \varphi(\alpha).$$

Cas particulier. Si $\varphi(x)$ est une fonction définie, continue et bornée sur l'ensemble *R*, ayant la borne supérieure $\mu>0$, la borne inférieure $-\mu$ et

$$\varphi(x + \pi) = -\varphi(x),$$

la translation centrée τ, déterminée par O, $\bar{u}$ et $\varphi(x)$ transforme le cercle.

$$(C)\ \rho = a,\ a \text{ constante} > \mu$$

en

$$(\Gamma)\ \rho = a + \varphi(\alpha), \tag{10}$$

qui est une concoïde, car $a+\varphi(x)>0$ pour tout x.

Il résulte que τ^{-1} transforme cette concoïde (Γ) en (C).

d) Soit T la translation convergente plane, déterminée par le point O et le vecteur $\bar{v}$. T est une translation centrée déterminée par O, $\bar{u}=\frac{\bar{v}}{v}$ et par $\varphi(x)=-v\cos x$. Cette fonction est définie, continue et bornée sur l'ensemble R, ayant comme borne supérieure le nombre positif v et comme borne inférieure $-v$. D'après ce qui a été montré en avant, si $a>v$, le cercle

$$(C)\quad \varrho = a$$

est transformé par T en

$$(\Gamma)\quad \varrho = a - v\cos\alpha.$$

La transformation inverse T^{-1} transforme (Γ) en (C). Comme T^{-1} est déterminée par O, $\bar{u}$ et par la fonction $v\cos x$, comme

$$a + v\cos x > 0$$

pour tout x, T^{-1} transforme le cercle (C) en

$$(\Gamma')\quad \varrho = a + v\cos x.$$

C'est un *limaçon de Pascal.*

e) *Soit données les fonctions $F(x)$ et $f(x)$ définies et continues sur R satisfaisant les conditions*

$$F(x+\pi) = -F(x),\quad f(x+\pi) = -f(x).$$

Si P est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ et $f(x)$ sont positifs, il existe une transformation centrée qui transforme la courbe.

$$(C)\quad \varrho = f(\alpha)$$

en

$$(\Gamma)\quad \varrho = F(\alpha),\ \text{où}\ \alpha \in P.$$

On considère la transformation centrée T déterminée par le pôle O du système de coordonnées polaires, par le verseur $\bar{u}$ de l'axe polaires et par la fonction

$$\varphi(x) = F(x) - f(x).$$

L'équation de la transformation T est

$$\bar{r}_1 = \left[1 + \frac{F(\alpha) - f(\alpha)}{r}\right]\bar{r}.$$

Cette transformation transforme la courbe (C) en (Γ) parceque

$$[F(\alpha) - f(\alpha)] + f(\alpha) > 0$$

donc on applique le résultat donné à c). La transformation T^{-1} transforme (Γ) en (C).

Exemple. Il existe une translation centrée qui transforme le cercle

$$(C_1)\ \rho = a\cos\alpha$$

en

$$(C_2)\ \rho = b\cos\alpha,\quad (a>0,\ b>0),$$

en exceptant le point O.

Pour ces deux cercles on a $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. On prend donc $F(x)=b\cos x$, $f(x)=a\cos x$, $P=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. La translation centrée, qui transforme (C_1) en (C_2), est déterminée par : le pôle du système de coordonnées, le vecteur de l'axe polaires et la fonction

$$\varphi(x) = (b-a)\cos x.$$

L'équation de la transformation est

$$\bar{r}_1 = \left[1+\frac{(b-a)\cos\alpha}{r}\right]\bar{r}.$$

8°. **Les translations centrées planes discontinues.**

Considérons une fonction $\varphi(x)$ définie et continue sur l'ensemble R *des nombres réels, sauf les nombres d'un ensemble non vide* $D\subset R$, *tel que si* $a\in D$, *on a aussi* $a+k\pi\in D$, k *entier. Donc* $\varphi(x)$ *est définie et continue sur* $R-D$. *Aussi* $\varphi(x)$ *satisfait la condition*

$$\varphi(x+\pi) = -\varphi(x),$$

pour tout $x\in R-D$.

La translation centrée plane discontinue est une transformation ponctuelle τ *déterminée par un point O, un vecteur* $\bar{u}$ *dont le module est 1 situés dans un plan P, et par la fonction* $\varphi(x)$.

Un point $M(\overline{OM}=\bar{r})$ *du plan P, tel que* $\alpha\in R-D$, *où* $\alpha=\sphericalangle(\bar{u},\bar{r})$, *est transformé par* τ *en* $M_1(\overline{OM_1}=\bar{r}_1)$ *avec la condition*

$$\bar{r}_1 = \left[1+\frac{\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r}.$$

Les points $M\in P$, qui ont $\alpha\in D$, ne sont pas transformés par τ. Donc la translation centrée discontinue τ transforme en elles mêmes les droites du plan P, qui passent par O, quand elles forment avec $\bar{u}$ l'angle $\alpha\in R-D$. Sur chacune de ces droites τ se comporte comme une translation t_α dont le vecteur est $\varphi(\alpha)\bar{u}_1$ ($\bar{u}_1$ le verseur de la droite).

Exemple. La translation centrée discontinue, déterminée par un point O, un vecteur $\bar{u}$ et par la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\cos x}, \ \lambda \text{ constante}, \tag{11}$$

est surtout intéressante, car elle intervient dans certaines transformations optiques, aussi elle sert à engendrer quelques courbes classiques.

Cette translation centrée ne transforme pas les points de la perpendiculaire à $\bar{u}$, menée par O.

9°. Le groupe $[\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ des translations centrées discontinues

Considérons l'ensemble des translations centrées discontinues déterminées par le même centre O, le même vecteur $\bar{u}$ et par l'ensemble des fonctions $[\lambda\varphi(x)]$ où λ est un paramétre réel et $\varphi(x)$ une fonction donnée, définie et continue sur $R-D$, ayant

$$\varphi(x + \pi) = -\varphi(x).$$

On note $[\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ cet ensemble de transformations. Il contient la transformation identique, obtenue pour $\lambda = 0$.

Soit $\tau_1 \in [\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ *déterminée par la fonction* $\lambda_1 \varphi(x)$ et $\tau_2 \in [\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ *déterminée par la fonction* $\lambda_2 \varphi(x)$. *Le produit* $\tau_2 \tau_1$ *est équivalent à* $\tau \in [\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ *déterminée par la fonction* $(\lambda_1 + \lambda_2)\varphi(x)$.

Un point quelconque $M \in R-D$ $(\overline{OM} = \bar{r})$ est transformé par τ_1 en $M_1(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$. On a

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda_1 \varphi(\alpha) \frac{\bar{r}}{r}. \tag{12}$$

Le point M_1 est transformé par τ_2 en $M_2(\overline{OM_2} = \bar{r}_2)$. On a

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \lambda_2 \varphi(\beta) \frac{\bar{r}_1}{r_1} \tag{12}$$

ou

$$\bar{r}_2 = \bar{r} + \lambda_1 \varphi(\alpha) \frac{\bar{r}}{r} + \lambda_2 \varphi(\beta) \frac{\bar{r}_1}{r_1}. \tag{13}$$

Si

$$\beta = \alpha, \text{ on a } \varphi(\beta) = \varphi(\alpha) \text{ et } \frac{\bar{r}_1}{r_1} = \frac{\bar{r}}{r};$$

si

$$\beta = \alpha + \pi, \text{ on a } \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \pi) = -\varphi(\alpha) \text{ et } \frac{\bar{r}_1}{r} = -\frac{\bar{r}}{r}.$$

Dans les deux cas,

$$\varphi(\beta)\frac{\bar{r}_1}{r_1} = \varphi(\alpha)\frac{\bar{r}}{r},$$

donc la relation (13) donne

$$\bar{r}_2 = \left[1 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\,\varphi(\alpha)}{r}\right]\bar{r}, \tag{14}$$

qui montre qui M est transformé en M_2 par τ. Il résulte aussi de (14) que le produit $\tau_2\,\tau_1$ est commutatif.

La transformation inverse de la translation centrée discontinue $\tau \in [\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ déterminée par $\lambda\,\varphi(x)$, est déterminée par la fonction $-\lambda\,\varphi(x)$. En conclusion, l'ensemble $[\tau(O, \bar{u}, \varphi(x))]$ est un groupe commutatif.

10°. **Le groupe** $\left[\tau\left(O, \bar{u}, \frac{1}{\cos x}\right)\right]$

a) Considérons le cas $\varphi(x) = \cos x$, donc l'ensemble des translations centrées discontinues $\left[\tau\left(O, \bar{u}, \frac{1}{\cos x}\right)\right]$ déterminées par le même centre O, le même vecteur $\bar{u}$, et par les fonctions de l'ensemble $\left[\frac{\lambda}{\cos x}\right]$ où λ est un paramètre réel. Cet ensemble est ($\overset{L}{\urcorner}$ 9°) un groupe commutatif. Les transformations de cet ensemble transforment un point quelconque M du plan ($\overline{OM} = \bar{r}$), non situé sur la perpendiculaire menée de O sur $\bar{u}$, en M_1($\overline{OM_1} = \bar{r}_1$). On a

$$\bar{r}_1 = \left(1 + \frac{\lambda}{r\cos\alpha}\right)\bar{r}. \tag{15}$$

b) *Les transformations du groupe* $\left[\tau\left(O, \bar{u}, \frac{1}{\cos x}\right)\right]$ *transforment les droites du plan, perpendiculaires à* $\bar{u}$ *(sauf la perpendiculaire menée par* O*) en droites qui sont aussi perpendiculaires à* $\bar{u}$.

Considérons la transformation $\tau \in \left[\tau\left(O, \bar{u}, \frac{1}{\cos x}\right)\right]$ déterminée par la fonction $\frac{\lambda}{\cos x}$. Elle transforme M en M_1, on a la relation (15).

Soit dans le système de coordonnées polaires défini à $\overset{L}{\urcorner}$ 7°

$$\varrho = \frac{a}{\cos\alpha} \tag{16}$$

l'équation d'une droite d perpendiculaire à $\bar{u}$.

On suppose $\lambda>0$ et on considère sur l'axe $x'Ox$ les points $F(\lambda, 0)$, $F'(-\lambda, 0)$.

Si $a>o$, d coupe le demi-axe positif Ox et on a $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dans ce cas

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{\lambda}{\cos\alpha}>0,$$

donc d est transformée par τ en

$$\varrho=\frac{a+\lambda}{\cos\alpha}. \tag{17}$$

C'est une droite perpendiculaire à $\bar{u}$, qui coupe la demi-droite Fx.
Si $-\lambda<a<0$, d coupe le segment OF', donc le demi-axe négatif et $\lambda\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Dans ce cas

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{\lambda}{\cos\alpha}<0,$$

donc d est transformée par τ en

$$\varrho=\frac{a+\lambda}{\cos(\alpha+\pi)}, \tag{17'}$$

qui est une droite d_1 perpendiculaire à Ox, d_1 coupe Ox entre O et F.
Si $a<-\lambda$, d coupe le demi-axe négatif $F'x'$ et $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Dans ce cas

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{\lambda}{\cos\alpha}<0$$

et d est transformée par τ en

$$\varrho=\frac{a+\lambda}{\cos\alpha}. \tag{17''}$$

C'est une droite d_1 perpendiculaire à $x'Ox$, dont l'intersection avec cet axe appartient à la demi-droite Ox'.

Pour $\lambda<0$ on obtient des resultats semblables.

c) La translation centrée τ transforme le cercle dont le centre est O et le rayon est a, en

$$\varrho=a+\frac{\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \varrho=-a+\frac{\lambda}{\cos(\alpha+\pi)},$$

qui sont des concoïdes.

d) La transformation τ, où $\lambda>0$ transforme le cercle

$$\varrho = 2\lambda \cos\alpha$$

en

$$\varrho = \lambda \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha},$$

qui est une strophoïde.

11° **Invariants**

a) *Soit* $[\tau(o, \bar{u})]$ *le groupe des translations centrées qui ont le même centre O et le même vecteur* $\bar{u}$. *Ces translations centrées sont déterminées par l'ensemble* $[\varphi(x)]$ *des fonctions définies et continues sur R, qui satisfont la condition* $\varphi(x+\pi) = -\varphi(x)$. *Considérons la transformation* $\tau \in [\tau(o, u)]$ *déterminée par* $\varphi(x) \in [\varphi(x)]$ *et deux points quelconques M, M' du plan, transformés par* τ *en* M_1, M_1'.
Si $\alpha = \sphericalangle(\bar{u}, \overline{OM})$, $\alpha' = \sphericalangle(\bar{u}, \overline{OM'})$, *alors l'expression*

$$|OM \cdot \varphi(\alpha') - OM' \cdot \varphi(\alpha)| \qquad (18$$

est un invariant de la transformation.

Soit $\alpha_1 = \sphericalangle(\bar{u}, \overline{OM_1})$, $\alpha_1' = (\bar{u}, \overline{OM_1'})$. Dans le système de coordonnées polaires définie à § 7°, on a

$$M(\varrho, \alpha),\ M_1(\varrho_1, \alpha_1),\ M'(\varrho', \alpha'),\ M_1'(\varrho_1'\ \alpha_1').$$

Si

$$\varrho + \varphi(\alpha) > 0,\quad \varrho' + \varphi(\alpha') > 0, \text{ alors}$$
$$\varrho_1 = \varrho + \varphi(\alpha),\ \varrho_1' = \varrho' + \varphi(\alpha') \text{ et } \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_1' = \alpha',$$

donc

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') - \varrho\,\varphi(\alpha') = \varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha'),$$
$$\varrho_1' \varphi(\alpha) - \varrho'\,\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha'),$$

d'où il résulte

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') - \varrho_1' \varphi(\alpha) = \varrho\,\varphi(\alpha') - \varrho'\,\varphi(\alpha)$$

et comme

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1),\quad \varphi(\alpha') = \varphi(\alpha_1'),$$

on obtient

$$\varrho_1 \varphi(\alpha_1') - \varrho_1' \varphi(\alpha_1) = \varrho\,\varphi(\alpha') - \varrho'\,\varphi(\alpha). \qquad (19$$

Si

$$\varrho + \varphi(\alpha) > 0,\quad \varrho' + \varphi(\alpha') < 0, \text{ alors}$$
$$\varrho_1 = \varrho + \varphi(\alpha),\quad \varrho_1' = -\varrho' - \varphi(\alpha') \text{ et } \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_1' = \alpha' + \pi,$$

donc

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') - \varrho \varphi(\alpha') = \varphi(\alpha) \varphi(\alpha'),$$
$$\varrho_1' \varphi(\alpha) + \varrho' \varphi(\alpha) = -\varphi(\alpha) \varphi(\alpha'),$$

d'où il résulte

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') - \varrho \varphi(\alpha') = -\varrho_1' \varphi(\alpha) - \varrho' \varphi(\alpha').$$

Mais

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1), \quad \varphi(\alpha') = \varphi(\alpha_1' - \pi) = -\varphi(\alpha_1'),$$

et cette relation devient

$$\varrho_1 \varphi(\alpha_1') - \varrho_1' \varphi(\alpha_1) = \varrho' \varphi(\alpha) - \varrho \varphi(\alpha'). \tag{19'}$$

Le même résultat pour le cas

$$\varrho + \varphi(\alpha) < 0, \quad \varrho' + \varphi(\alpha') > 0.$$

Si

$$\varrho + \varphi(\alpha) < 0, \quad \varrho' + \varphi(\alpha') < 0,$$

alors

$$\varrho_1 = -\varrho - \varphi(\alpha), \quad \varrho_1' = -\varrho' - \varphi(\alpha') \text{ et } \alpha_1 = \alpha + \pi, \quad \alpha_1' = \alpha' + \pi.$$

donc

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') + \varrho \varphi(\alpha') = -\varphi(\alpha) \varphi(\alpha'),$$
$$\varrho_1' \varphi(\alpha) + \varrho' \varphi(\alpha) = -\varphi(\alpha) \varphi(\alpha'),$$

d'où il résulte

$$\varrho_1 \varphi(\alpha') + \varrho \varphi(\alpha') = \varrho_1' \varphi(\alpha) + \varrho' \varphi(\alpha),$$

donc

$$\varrho_1 \varphi(\alpha_1') - \varrho_1' \varphi(\alpha_1) = \varrho \varphi(\alpha') - \varrho' \varphi(\alpha). \tag{19''}$$

Ainsi, d'après (19), (19'), (19'') on conclut

$$| OM_1 \cdot \varphi(\alpha_1') - OM_1' \varphi(\alpha_1) | = | OM \cdot \varphi(\alpha') - OM' \cdot \varphi(\alpha) |,$$

donc l'invariance de l'expression

$$| OM \cdot \varphi(\alpha') - OM' \cdot \varphi(\alpha) |.$$

b) On montre d'une manière analogue que l'expression (18) est aussi un invariant du groupe $[\tau(o, \bar{u}, \varphi(x))]$ des translations centrées discontinues, si $\alpha \in R - D$, $\alpha' \in R - D$.

c) Si OMM' est l'aire du triangle formé par les points O, M, M', alors l'expression

$$OMM' \cdot \left| \frac{\varphi(\alpha)}{OM} - \frac{\varphi(\alpha')}{OM'} \right|$$

est un invariant des groupes $[\tau(o, \bar{u})]$, $[\tau(o, \bar{u}, \varphi(x))]$.

La chaire de mathématique
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Ionescu-Bujor, C.* — Asupra unor transformări optice. Bul. Inst. Politehnic. Bucureşti, Tom. XXIII, Fasc. 2, 1961.

2. *Ionescu-Bujor, C.* — Sur les transformations optiques de l'espace. Bul. Inst. Politehnic. Bucureşti, Tom. XXVII, Fasc. 2 ,1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 668.735 : 547.533 : 542

DIE REKTIFIKATION IN VIBRIERTEN FÜLLKÖRPERKOLONNEN
(Eine neue Möglichkeit zur Erreichung hoher Trennwirkungen)

Em. A. BRATU, F. GOTHARD

Die Intensivisierung des Stoffaustausches zwischen Flüssigkeit und Dampf kann ausser durch die bekannten Mitteln, die in Rektifikations prozessen anwendbar sind, wie die Benützung von Drehbänden oder Drehtrommel, das Pulsieren oder Vibrieren der Dampfphase [1, 2, 3], mit einer viel grösseren Wirkung, durch Vibrieren der Füllkörper in der gesammten Kolonne erreicht werden [4, 5, 6].

In den nachstehenden Abbildungen sind einige Ergebnisse der Versuche die in dieser Richtung durghgeführt worden, in Form von Diagrammen wiedergegeben. Es handelt sich um die Trennwirkung einer Rektifizierkolonne von 32 mm Durchmesser, mit einer Füllung von Glas-Raschigringen in einer Höhe von 27 cm, die für Mischungen von Normalheptan und Toluol bei Normaldruck bestimmt wurde. In der ersten Abbildung ist die Trennwirkung dieser Füllkörperkolonne in Abhängigkeit von der spezifischen Dampfdurchflussgeschwindigkeit und der Amplitude der axialen Vibrationen bei einer Vibrationsfrequenz von 50 Hz und bei totalem Rückfluss wiedergegeben.

Die Vibration verursacht eine merkwürdige Erhöhung der Trennwirkung, die bei Frequenzen von 50 Hz und Amplituden von 3 mm den 4- bis 5-fachten Wert der Trennwirkung der ruhenden Kolonne erreicht. Die Trennwirkung der vibrierten Kolonne nimmt mit dem Anstieg der Verdampfungsgeschwindigkeit gleichmässig ab, ohne die für die gewöhnlichen Füllkörperkolonnen charakteristische Mindestwerte aufzuweisen.

Aus der zweiten Abbildung ist ersichtlich dass die Trennwirkung der selben Kolonne, bei einer spezifischen Verdampfungsgeschwindigkeit von 1,1 Kg/m².s mit verschiedenen Frequenzen vibriert, höchstwerte bei Amplituden erreicht, die mit wachsender Frequenz nach kleineren Amplituden verschoben werden. Andere Versuchsergebnisse zeigen dass diese Höchstwerte bei gleicher Frequenz oder Schwingungshöhe mit wachsender Verdampfungsgeschwindigkeit nach grösseren Amplituden, bezugsweise kleineren Frequenzen verschoben werden.

Wie es aus der ersten Abbildung ersichtlich war, erreicht die Trennwirkung der vibrierten Füllkörperkolonne die höchsten Werte bei den kleinsten Verdampfungsgeschwindigkeiten. Bezogen auf die Trennwirkung der ruhenden Kolonne, erreicht der Anstieg der Trennwirkung unter dem Einfluss der Vibrationen die höchsten Werte bei ungefähr der Hälfte der höchstzulüssigen Dampfgeschwindigkeiten, wie das aus der dritten Abbildung hervorgeht.

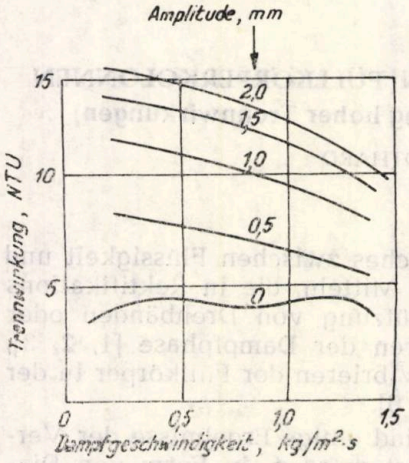


Abb. 1. Einfluss der Verdampfungsgeschwindigkeit auf die Trennwirkung der vibrierten und der ruhenden Füllkörperkolonne (Höhe 27 cm, Durchmesser 32 mm, Ringdurchmesser 4 mm).

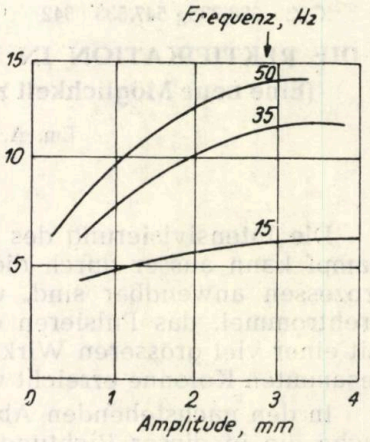


Abb. 2. Einfluss der Amplitude auf die Trennwirkung der vibrierten Kolonne bei verschiedenen Frequenzen und der spezifischen Verdampfungsgeschwindigkeit von 1,1 Kg/m².s (Höhe 27 cm, Durchmesser 32 mm, Ringdurchmesser 4 mm).

Die gleiche Trennwirkung kann mann mit grösseren Frequenzen und kleineren Amplituden erreichen oder umgekehrt, mit höheren Amplituden und kleineren Frequenzen, wie das aus der vierten Abbildung ersichtlich ist.

Bei totalem Rückfluss und für kleine Verdampfungsgeschwindigkeiten kann die Trenwirkung der vibrierten Rektifizierkolonnen, als Zahl der Durchsatzeinheiten ausgedückt, im Allgemeinen mit einer Gleichung volgender Form wiedergegeben werden :

$$NTU = NTU_0(1 + c \cdot I')$$

wo NTU_0 die Trennwirkung der ruhenden Füllkörperkolonne bedeutet. I' ist dabei die sogenannte „Vibrationswirkung", $I' = f^m \cdot a^n$ (f = Frequenz, in Hz, a = Amplitude, mm), wo für die 4 mm Raschigringe $m = 1$ und $n = 0{,}65$ ist und c eine Konstante bedeutet, dessen Wert von den Eigenschaften des zu trennenden Gemisches abhängig ist.

Es ist merkwürdig, dass der Druckabfall und die Floodinggeschwindigkeit durch die Vibrationen nicht beeinflusst werden, und dass s omit den vibrierten Füllkörperkolonnen hohe Trennwirkungen gleichzeitig mit grossen Durchsatzgeschvindigkeiten erreicht werden können, im Gegenteil mit den üblichen hochwirksamen Trennsäulen. Eine andere merkwürdige Eigenschaft der vibrierten Rektifikationskolonnen besteht darin, dass im Gegenteil zu den gewöhnlichen Füllkörperko-

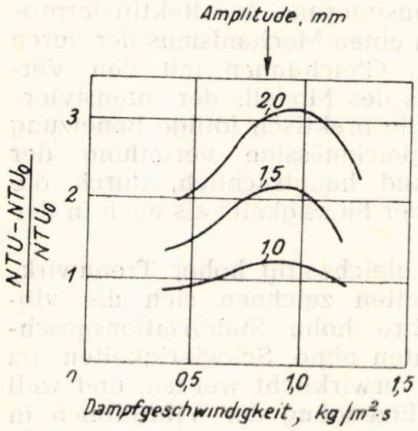


Abb. 3. Einfluss der Verdampfungsgeschwindigkeit auf die spezifische Erhöhung der Trennwirkung, bezogen auf die der ruhenden Kolonne (Höhe 27 cm, Durchmesser 32 mm, Ringdurchmesser 4 mm)

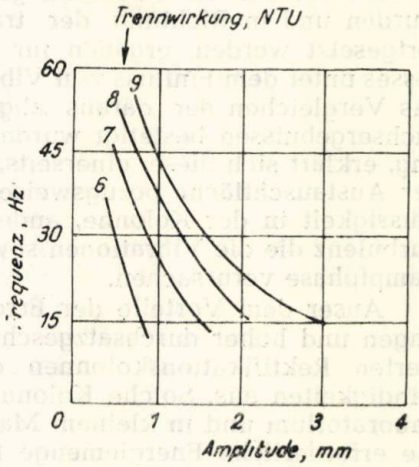


Abb. 4. Abhängigkeit der Frequenz von der Amplitude für die Erreichung von gleichen Trennwirkungen (Kolonnenhöhe 27 cm, Durchmesser 32 mm, Ringdurchmesser 4 mm).

lonnen, die Trennwirkung nicht von dem Kolonnendurchmesser abhängig ist und mit der Höhe der Kolonne gleichmässig ansteigt (HTU unabhängig von der Kolonnenhöhe ist), wenn die Intensität der Vibrationen $I=a.f$ einen gewissen mindestwert überschreitet. Die Eigen schaften der vibrierten Rektifikationskolonnen die am Beispiel einer mit Raschigringe gefüllten Kolonne geschildert wurden, sind allgemiene Eigenschaften der axial vibrierten Füllkörpersäulen. Die daraus volgende Vorteile der Anwendung von vibrierten Füllkörperkolonnen sollen an einem praktischen Beispiel noch erläutert werden.

Ein Gemisch aus 80% Normalheptan und 20% Toluol wird in einer Rektifiziersäule dessen Trennwirkung 35 theoretischen Böden entspricht, in zwei Teile getrennt, 83% des Gemisches distilliert a's 95% Normalheptan und 17% werden als schwere Fraktion erhalten, mit einer Konzentration von 93,5% Toluol, wenn din Anlage mit einem Rückflussverhältniss von 27 arbeitet. Für die Verarbeitung von 1000 Kg des angegebenen Gemisches muss die Anlage din stündlich 10 Kg distilliert, 100 Stunden lang laufen.

Durch die Benützung der selben Anlage, mit dem Unterschied dass die Rektifizierkolonne mit einer Amplitude von 2 mm und einer Frequenz von 50 Hz vibriert wird, und so einer Trennwirkung von 53 theoretischen Böden entspricht, erreicht mann die selben Konzentrazionen im Distillat und Sumpf mit einem Rückflussverhältniss gleich 8, so dass stündlich 32 Kg distilliert werden und die Verarbeitung von 1000 Kg Ausgangsgemisch ungefähr 31 Stunden lang dauert.

Die ausführlichen Forschungen die in diesem Gebiete vorgenommen wurden und in Richtung der transversal vibrierten Rektifiziersäulen fortgesetzt werden, ergaben für die Intensivierung des Rektifizierprozesses unter dem Einfluss von Vibrationen einen Mechanismus der durch das Vergleichen der daraus abgeleiteten Gleichungen mit den Versuchsergebnissen bestetigt wurde. Gemäss des Modells der Intensivierung, erklärt sich diese, einerseits, durch die praktisch föllige Benetzung der Austauschfläche bezugsweise die gleichmässige verteilung der Flüssigkeit in der Kolonne, anderseits, und hauptsächlich, durch die Turbulenz die die Vibrationen sowohl in der Flüssigkeits als auch in der Dampfphase verursachen.

Auser dem Vorteile der Erreichung gleichzeitig hoher Trennwirkungen und hoher durchsatzgeschwindigkeiten zeichnen sich die vibrierten Rektifikationskolonnen durch ihre hohe Stabilisationsgeschwindigkeiten aus. Solche Kolonnen konnten ohne Schwierigkeiten im Laboratorium und in kleinem Massstabe verwirklicht werden, und weil die erforderliche Energiemenge für die Erzeugung der Vibrationen in Bedingungen der mechanischen Resonanz klein in bezug zu der nötigen Verdampfungsenergie sind, kann mann die Methode als praktisch anwendbar betrachten.

Lehrstuhl für Verfahrenstechnik
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Nester R. G.*, U.S.A. 2712520 — 5.VII.1955.
2. *Olney R. B.*, U.S.A. 3050447 — 21.VIII.1962.
3. *McKittrick D. D., Cornish R. E.* U.S.A. 2265762 — VII. 9. 1941.
4. *Bratu Em. A., Gothard Fr.*, Rom. 48049 — 29.XI.1965.
5. *Bratu Em. A., Gothard Fr.*, Rev. Chimie (Bucureşti) 18.11.1967.
6. *Gothard Fr.*, — Die Trennwirkgung von vibrierten Füllkörperkolonnen, Dissertation, Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej, Bucureşti, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

NOTĂ

C.Z.: 542..2 : 546.221 : 544/545

APARAT DE LABORATOR PENTRU PRODUCEREA HIDROGENULUI SULFURAT ȘI ALTOR GAZE FOLOSITE ÎN ANALIZA SEMIMICROCHIMICĂ

AGNETA T.-CERBU

În laboratoarele de chimie se utilizează o serie de substanțe gazoase ca hidrogenul sulfurat, bioxidul de carbon, bioxidul de sulf, hidrogenul, clorul etc., dintre care unele se obțin chiar în momentul utilizării. Astfel este cazul bioxidului de carbon, a hidrogenului și mai ales a hidrogenului sulfurat utilizat în analizele chimice calitative și cantitative la separarea și la dozarea unui mare număr de cationi prin precipitarea lor ca sulfuri.

Hidrogenul sulfurat se obține din sulfură de fier și acid clorhidric conform reacției :

$$FeS + HCl \rightleftharpoons FeCl_2 + H_2S$$

la temperatura camerei. Reacția se efectuează în aparate Kipp cu care sînt dotate laboratoarele chimice.

În ultimii ani s-a introdus în majoritatea laboratoarelor (mai ales în cele din învățămîntul superior) metoda de analiză semimicrochimică.

În analiza semimicrochimică se utilizează cantități de probe de aproximativ 10 ori mai mici ca în cazul analizelor macrochimice ; în mod corespunzător volumele de soluție și cantitățile de reactiv scad și ele proporțional. Separările cu hidrogen sulfurat necesită în acest caz volume și debite de gaz mult mai mici.

În acest scop se propune un aparat construit din sticlă (fig. 1) de dimensiuni reduse, care pe lîngă faptul că asigură un debit de gaz ușor reglabil, are o serie de avantaje în ceea ce privește manipularea, transportul, consumul de reactivi etc., față de aparatele Kipp.

Aparatul din figura 1 este construit din două părți distincte : rezervorul de acid și sulfură de fier (1) care este în același timp și spațiul de reacție, și care este prevăzut cu o placă perforată (2), confecționată din sticlă, porțelan sau material plastic pe care se depozitează sulfura

de fier. Partea superioară, detaşabilă (3) conţine pîlnia de acid (4), tubul descendent (5), deflegmatorul (6), vasul de spălare (7), sudat la corpul aparatului şi robinetul de ieşire a gazului (8) care permite un reglaj fin al debitului de gaz ; de ştuţul robinetului se ataşează un tub

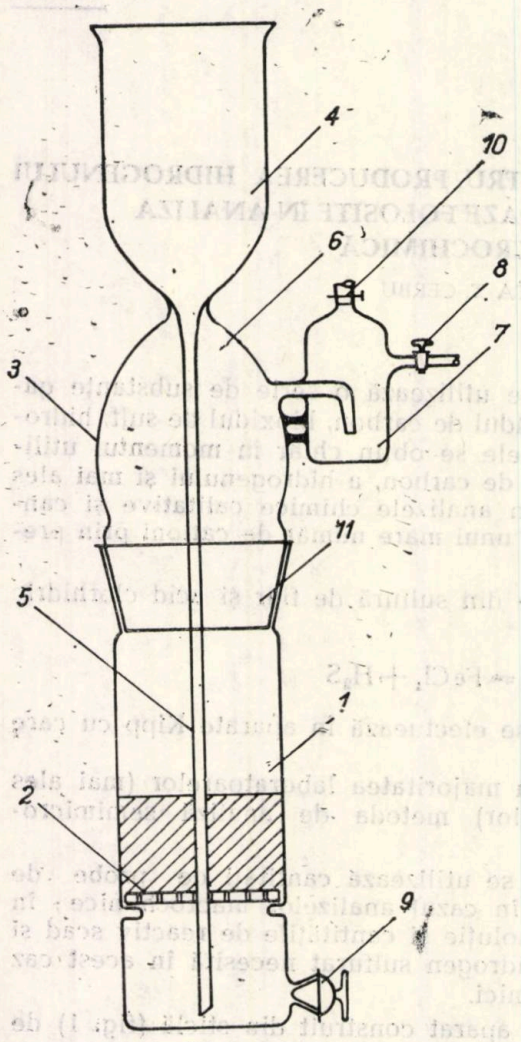


Fig. 1. Aparat de laborator pentru producerea unor cantităţi mici de gaz.

1. Corpul aparatului
2. Placă perforată
3. Partea superioară a aparatului
4. Pîlnia de acid
5. Tub descendent
6. Deflegmator
7. Vas de spălare
8. Robinet de gaz
9. Orificiu pentru evacuarea acidului consumat
10. Stuţ
11. Racord rodat

de cauciuc prevăzut în partea inferioară cu un tubuşor de sticlă efilat. Aparatului i se poate adapta la nevoie un manostat care să asigure o presiune constantă în aparat.

Partea inferioară a aparatului mai este prevăzută cu un orificiu pentru evacuarea acidului consumat (9) închis cu un dop etanş (de pre-

ferință cu dop rodat) iar vasul de spălare are un ștuț (10) pentru introducerea lichidului de spălare a gazului sau pentru evacuarea apei la spălarea aparatului. În timpul funcționării aparatului, orificiul este închis cu un tub de cauciuc prevăzut cu o clemă.

Partea superioară a aparatului se îmbină cu cea inferioară printr-un dop rodat cu închidere etanșă (11).

Placa perforată (2) are un orificiu central al cărui diametru este numai cu puțin mai mare ca diametrul exterior al tubului descendent (5).

Încărcarea aparatului cu substanță solidă (sulfură feroasă, marmoră, strujitură de fier etc.) se face prin detașarea părții superioare (3) fără a scoate tubul descendent (5) din orificiul central al plăcii perforate. După încărcarea materialului a cărei înălțime nu trebuie să depășească 2/3 din înălțimea rezervorului, se îmbină cele două părți ale aparatului astfel încît închiderea să fie etanșă și se introduce acidul prin pîlnia (4) ținînd tot acest timp robinetul (8) deschis. În vasul de spălare se introduce în prealabil apă (aproximativ 2/3 din volumul vasului (7), prin ștuțul (11). Cînd acidul a atins nivelul sulfurii feroase și reacția a fost amorsată, se lasă un timp (1—2 minute) pentru a se evacua aerul din aparat, după care se închide robinetul (8) și aparatul este pregătit pentru funcționare.

Aparatul descris este de dimensiuni reduse (diametrul de 40—50 mm, înălțimea totală 250 mm), este ușor de manipulat și întreținut, și ocupă loc puțin. Cu ajutorul lui se poate obține un flux de gaz constant și ușor reglabil. Prin felul cum este construit aparatul nu necesită vase de spălare și purificare ale gazului, deflegmatorul (6) și vasul de spălare (7) asigurînd o purificare satisfăcătoare. Aparatul are un consum mic de reactivi. El poate fi confecționat din tub de sticlă, de preferință cu grosimea peretelui mai mare (2—3 mm).

Aparatul poate fi folosit și în scopuri didactice, la demonstrații practice de la cursurile de chimie și fizică, în laboratoarele școlare, fiind ușor de transportat, și de manipulat putînd fi confecționat în oricare atelier de sticlărie.

Laboratorul de chimie anorganică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

NOTĂ

C. Z.: 547.867.4 : 543/545 : 546 : 667.622 : 547.553.3

METODĂ DE DETERMINARE PENTRU N-FENIL-MORFOLINĂ (FM)

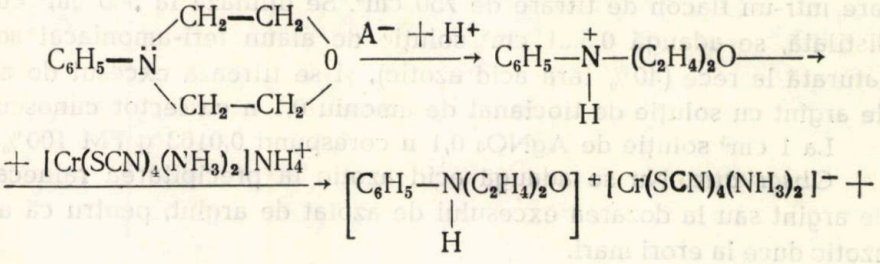
GRIGORE TEODORESCU

N-Fenil-morfolină (FM) este un intermediar folosit, între altele, în funcția de componentă de cuplare, în vederea obținerii unor tipuri de pigmenți și coloranți valoroși, în special pentru fibre poliacrilo-nitrilice. Pentru ca procesul de cuplare cu diverse componente de diazotare să decurgă în condiții optime, este necesar ca să se cunoască exact conținutul în FM 100% existent în FM tehnic. De asemeni este necesară cunoașterea conținutului în FM 100% pentru a se preciza cifrele de randament și puritatea produsului finit în fabricația FM.

Dat fiind că metodele cunoscute de determinare a aminelor terțiare sînt dificile de aplicat în acest caz, s-a aplicat metoda de determinare prin complexare cu rainecatul de amoniu $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4$ (tetratiocianato-diamino cromat (III) de amoniu), reactiv folosit de noi și la determinarea altor substanțe [1...9]. Metoda a fost posibilă, în special pentru faptul că, produsul rezultat din complexarea rainecatului de amoniu (prescurtat = RA) cu FM, este practic insolubil în apă și foarte solubil în acetonă.

Principiul metodei

Precipitarea complexului (de culoare roș-violet) dintre RA și FM are loc, conform reacției:



$$+ NH_4^+ + A^-.$$

Echilibrul dintre amină, ca bază liberă și ionul de *oniu* se deplasează permanent spre dreapta datorită insolubilității complexului de RA+FM în condițiile analizei.

Precipitatea se face în soluție apoasă de 1...2% acid sulfuric. Complexul se filtrează, se spală cu apă, se dizolvă în acetonă și din soluție se precipită rainecatul de argint cu exces de azotat de argint conform reacției :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]^- + Ag^+ \longrightarrow Ag[Cr(SCN)_4(NH_3)_2].$$

După filtrarea acestuia, se titrează excesul de azotat de argint, cu soluție de tiocianat de amoniu 0,1 n, în prezența alaunului feri-amoniacal.

Modul de lucru

Se cîntăresc 2 g FM tehnic, se dizolvă în 150 cm³ acid sulfuric de 1,2...1,5% concentrație și se aduce la balon cotat de 250 cm³ cu acid sulfuric de aceiași concentrație. Se iau din această soluție probe de 5... 12 cm³ cu o semimicrobiuretă.

La fiecare probă luată pentru determinare, se adaugă 25 cm³ acid sulfuric de 1,2...1,5% concentrație și se precipită cu 10...15 cm³ soluție apoasă 3% de RA, proaspăt preparată, adăugată treptat, sub continua agitare, pînă cînd soluția de deasupra precipitatului de complex este intens colorată. Se filtrează pe creuzet G_4, se antrenează cantitativ precipitatul rămas pe pahar cu soluție de RA 0,1% se spală pe filtru de 3...4 ori cu cîte 3...5 cm³ soluție RA de 0,1% și final de 2 ori cu cîte 5 cm³ apă distilată.

Se dizolvă complexul direct pe creuzetul filtrant cu 25...30 cm³ acetonă, se spală creuzetul final cu 10...20 cm³ apă distilată și se prinde totul într-un pahar de 250 cm³. Se adaugă 30 cm³ azotat de argint 0,1 n, iar precipitatul de rainecat de argint format se filtrează pe filtru cantitativ cu ajutorul pîlniei Hirsch, se spală și se prinde filtratul și apele de spălare într-un flacon de titrare de 750 cm³. Se diluiază la 500 cm³ cu apă distilată, se adaugă 0,5...1 cm³ soluție de alaun feri-amoniacal soluție saturată la rece (40% fără acid azotic), și se titrează excesul de azotat de argint cu soluție de tiocianat de amoniu 0,1 n cu factor cunoscut.

La 1 cm³ soluție de $AgNO_3$ 0,1 n corespund 0,0163 g FM 100%.

Observație. Nu se adaugă acid azotic la precipitarea rainecatului de argint sau la dozarea excesului de azotat de argint, pentru că acidul azotic duce la erori mari.

Rezultatele sînt concretizate în tabela următoare.

Tabelul 1

Dozarea N-fenil-morfolinei cu rainecat de amoniu

Nr. crt.	Soluție de analizat	FM tehnic în probă	$AgNO_3$ la precipitare F0,1n = =1,0000	NH_4SCN F0,1n = =1,0239	$AgNO_3$ reacționat F0,1n = =1,0000	FM 100% în probă	FM 100% în FM tehnic determinat cu RA	FM 100% în FM tehnic determinat prin kjeldahl.
	cc	g	cc	cc	cc	g	%	%
1	5	0,0400	30	27,58	2,42	0,0395	98,60	98...99
2	6	0,0480	30	27,10	2,90	0,0473	98,54	„
3	7	0,0560	30	26,60	3,40	0,0554	98,96	„
4	7	0,0560	30	26,60	3,40	0,0554	98,96	„
5	8	0,0640	30	24,15	3,85	0,0515	98,05	„
6	9	0,0720	30	25,65	4,35	0,0709	98,48	„
7	10	0,0800	30	25,15	4,85	0,0790	98,81	„
8	10	0,0800	30	25,15	4,85	0,0790	98,81	„
9	11	0,0880	30	24,67	5,33	0,0869	98,75	„
10	12	0,0960	30	24,20	5,80	0,0946	98,48	„

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu P., Teodorescu Gr.* — Rev. de chimie, nr. 1, pg. 41 (1957).
2. *Teodorescu G., Dinescu A.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXVI, nr. 1, pg. 49 (1964).
3. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXIX, nr. 1, pg. 43 (1967).
4. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXIX, nr. 4, pg. 43 (1967).
5. *Teodorescu Gr.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXIX, nr. 5, pg. 83 (1967).
6. *Teodorescu Gr.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXIX, nr. 6, pg. 55 (1967).
7. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXX, nr. 1, pg. 17 (1968).
8. *Teodorescu Gr., Lupu A. M.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXX, nr. 5, pg. (1968).
9. *Teodorescu Gr.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXXI, 1969 sub tipar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

MECANICĂ

C.Z. : 629.19 : 517 : 522

REGIMUL OPTIM DE URCARE AL RACHETELOR MULTIETAJATE *

C. GUȚĂ

Vom considera, în lucrarea de față, cazul de optimizare a zborului rachetelor cu două sau mai multe trepte. Treptele superioare ale rachetei intră deobicei în funcțiune la mare înălțime (20—30 km) unde atmosfera este rarefiată și deci, putem neglija în ecuațiile de mișcare, efectul forțelor aerodinamice (portanța și rezistența la înaintare).

Ecuațiile de mișcare ale treptei „i" a rachetei pe o traiectorie oarecare, cuprinsă în planul vertical, sînt [1], [3].

$$m_i V_i = F_i \cos \alpha - R_i - m_i g \sin \varphi_i \tag{1}$$

$$m_i V_i \varphi_i = P_i - m_i g \cos \varphi_i + F_i \sin \alpha \tag{2}$$

În ecuațiile (1) și (2) m_i este masa totală a rachetei avînd „i" trepte $m_i = m_{si} + m_{pi} + m_{ci} + m_{ci}$ unde m_{si} este masa construcției, structurii de rezistență, m_{pi} masa sistemului de propulsie, m_{ui} — masa încărcăturii utile și a aparatajului, iar m_{ci} este masa combustibilului aflat la bord.

Deoarece m_{si} = const, m_{pi} = const. și m_{ui} = const. rezultă că : m_i = const. + m_{ci} sau :

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{dm_{ci}}{dt} \tag{3}$$

Această variație similară și continuă în timp a masei totale cu cea a debitului masic de combustibil consumat este reală numai pe durata de funcționare a motoarelor treptei respective. La ieșirea din funcționarea a treptei de un ordin oarecare, se produce și un salt în variația masei, determinat de desprinderea masei structurii de rezistență și a motoarelor treptei respective.

Manuscris predat la redacție la 16 ianuarie 1969.

Potrivit considerentelor de mai sus, asupra densității păturilor înalte ale atmosferei, se poate lua :

$$R_i = \frac{\varrho}{2} S V_i^2 C_x = 0;\ \varrho \ll 0;\ C_x \ll 0$$
$$P_i = \frac{\varrho}{2} S V_i^2 C_z = 0;\ C_z \ll 0 \tag{4}$$

Știind că și unghiul de incidență al rachetei este de cîteva grade putem neglija ultimul termen din membrul drept al ecuației (2).

În felul acesta termenul $m_i g \cos \varphi_0$ din ecuația (2) poate fi compensat de către motoraşe de comandă auxiliare și ecuația (2) se transformă într-o identitate.

Cu alte cuvinte urcarea rachetei se face pe o traiectorie rectilinie cuprinsă în planul vertical (unghiul de poziție, $\varphi_i = \varphi_0 = \text{const.}$).

Ecuația (1) se poate transforma, dacă ținem seama că viteza verticală pentru treapta i este :

$$v_i = \frac{dz}{dt} = V_i \sin \varphi_0 \tag{5}$$

iar pentru forța de tracțiune în cazul destinderii complete a gazelor în ajutaj, avem relația :

$$F_i = \dot{m}_{ci} w_i = -\frac{dm_{ci}}{dt} \frac{dz}{dz} W_i = -\frac{dm_{ci}}{dz} w_i V_i \sin \varphi_0$$

Deci, luînd în considerare și (3), obținem :

$$F_i = -\frac{dm_i}{dz} w_i V_i \sin \varphi_0 \tag{6}$$

În relația precedentă, $\dot{m}_{ci}$ este debitul masic de gaze ce trece prin ajutaj în unitatea de timp, w_i fiind viteza acestora în secțiunea de ieșire din ajutaj.

Cu acestea ecuația (1), știind că unghiul de incidență este mic și putem lua $\cos \alpha \simeq 1$, devine :

$$\Phi_{1i} = m_i \frac{dV_i}{dz} V_i \sin \varphi + w_i \frac{dm_i}{dz} V_i \sin \varphi_0 + m_i g \sin \varphi_0 = 0 \tag{7}$$

Avînd de rezolvat o problemă de minim în cazul deplasării rachetei pe o traiectorie rectilinie, problema variațională se reduce la găsirea minimului necondiționat al integralei :

$$I_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{1}{v_i} + \lambda_{1i} \Phi_{1i} \right) dz = \int_{z_{i-1}}^{z_i} E_i \, dz \tag{8}$$

$$E_i - \frac{1}{V_i \sin \varphi_0} + \lambda_{1i} \left(m_i \frac{dV_i}{dz} V_i + W_i \frac{dm_i}{dz} V_i + m_i g(z) \right) \sin \varphi_0 \tag{9}$$

unde λ_{1i} este multiplicatorul lui Lagrange, care va trebui determinat.

Ecuațiile lui Euler-Lagrange, aplicabile în problema variațională amintită (vezi [4] și [5], se scriu :

$$\frac{\partial E_i}{\partial V_i} - \frac{d}{dz}\frac{\partial E_i}{\partial\left(\frac{dV_i}{dz}\right)} = 0$$
$$\frac{\partial E_i}{\partial m_i} - \frac{d}{dz}\frac{\partial E_i}{\partial\left(\frac{dm_i}{dz}\right)} = 0 \tag{10}$$

Relațiile (10) și (7) aplicate asupra funcției auxiliare (9) ne determină mărimile V_i, m_i și λ_{1i} care definesc regimul de zbor al rachetei pe porțiunea respectivă a traiectoriei.

Pentru termenii din prima ecuație (10) obținem :

$$\frac{\partial E_i}{\partial V_i} = -\frac{1}{V_i^2 \sin\varphi_0} + \lambda_{1i} m_i \frac{dV_i}{dz}\sin\varphi_0 + \lambda_{1i} w_i \frac{dm_i}{dz}\sin\varphi_0$$

$$\frac{d}{dz}\cdot\frac{\partial E_i}{\partial\left(\frac{dV_i}{dx}\right)} = \frac{d}{dz}(\lambda_{1i} m_i V_i \sin\varphi_0)$$

ceea ce ne conduce la relația :

$$-\frac{1}{V_i^2\sin\varphi_0} + \lambda_{1i} m_i \frac{dV_i}{dz}\sin\varphi_0 + \lambda_{1i} w_i \frac{dm_i}{dz}\sin\varphi_0 - \frac{d\lambda_{1i}}{dz} m_i V_i \sin\varphi_0$$
$$- \lambda_{1i}\frac{dm_i}{dz} V_i \sin\varphi_0 - \lambda_{1i} m_i \frac{dV_i}{dz}\sin\varphi_0 = 0$$

Reducînd termenii subliniați, deducem :

$$\frac{1}{V_i^2\sin\varphi_0} + \lambda_{1i}(w_i - V_i)\frac{dm_i}{dz}\sin\varphi_0 - \frac{d\lambda_{1i}}{dz} m_i V_i \sin\varphi_0 = 0 \tag{11}$$

În mod analog obținem din a doua ecuație (10), relația :

$$\lambda_{1i}(w_i - V_i)\frac{dV_i}{dz} - \lambda_{1i} g(z) + w_i V_i \frac{d\lambda_{1i}}{dz} + \lambda_{1i} V_i \frac{dw_i}{dz} = 0 \tag{12}$$

Din relația (7) se scoate :

$$\frac{dm_i}{dz} = -\frac{m_i}{w_i V_i} g(z) - \frac{m_i}{w_i}\frac{dV_i}{dz} \tag{13}$$

iar din relația (12), obținem :

$$\frac{d\lambda_{1i}}{dz} = \lambda_{1i}\left(\frac{1}{w_i} - \frac{1}{V_i}\right)\frac{dV_i}{dz} - \frac{\lambda_{1i}}{w_i}\cdot\frac{dw_i}{dz} + \frac{\lambda_{1i}}{w_i V_i} g(z) \tag{14}$$

După înlocuirea relațiilor (13) și (14) în (11) se obține :

$$V_i^3 - \frac{w_i}{\frac{dw_i}{dz}} g(z) V_i - \frac{w_i}{\frac{dw_i}{dz} \lambda_{1i} m_i \sin^2 \varphi_0} = 0 \tag{15}$$

Comparînd termenii doi și trei din ecuația (15), pentru o gamă largă de valori, tipuri de rachete și misiuni pe care acestea le îndeplinesc, se constată că :

$$V_i \cdot g(z) \gg \frac{1}{\lambda_{1i} m_i \sin^2 \varphi_0} \tag{16}$$

ceea ce justifică folosirea în continuare numai a primilor doi termeni.

Pentru viteza de scurgere a gazelor din ajutajul treptei „*i*", avînd în vedere că la urcare, datorită scăderii presiunii mediului ambiant, viteza crește (a se vedea [2] pag. 125—132) se poate lua variația parabolică a acesteia cu înălțimea.

Astfel :

$$w_i^2 = w_{i-1}^2 + 2pz \tag{17}$$

unde w_{i-1} este viteza de scurgere din ajutajul treptei precedente iar p este parametrul parabolei. În funcție de valoarea acestuia viteza unei trepte date poate să se schimbe mai mult sau mai puțin accentuat de cea a treptei precedente. Se înțelege că în acest caz valoarea lui p, va determina regimul de funcționare al motorului (motoarelor) rachetă.

Din relația (15), avînd în vedere (14) se deduce :

1) $V_t \simeq 0$, ceea ce se poate întîlni în cazul rachetelor **balistice sau** meteorologice (la apogeu) ;

2) $$V_i = \sqrt{\frac{w_i}{\frac{dw_i}{dz}} g(z)} \tag{18}$$

Dacă zborul în urcare, se face fără modificarea substanțială a latitudinii geografice, atunci conform [3] se poate lua pentru accelerația gravitației :

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2} = g_0 \left(1 - 2\frac{z}{R_0} + 3\frac{z^2}{R_0^2} - 4\frac{z^3}{R_0^3} + \cdots\right) \tag{19}$$

$R_0 = 6370$ km, fiind raza medie a Pământului.

Dacă urcarea se face astfel încît să rezulte și o schimbare însemnată a latiudinii, atunci se poate lua aproximativ :

$$g = g_0 - 3 \cdot 10^{-3} z - 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cos 2\varphi \tag{20}$$

unde, $g_0 = 9{,}816$ m/s² este accelerația gravitației la sol, la latitudini medii, Z se ia în kilometri, iar φ reprezintă latitudinea geografică, măsurată de la ecuator.

Cu acestea, relația (17) în (18), se obține înlocuind viteza de deplasare a treptei „i" a rachetei,

$$V_i = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{p}} \cdot \frac{(w_{i-1}^2 + 2pz)^{1/2}}{(R_0 + z)} = f(z) \tag{21}$$

În ecuația (13) se poate nota :

$$\frac{g(z)}{w_i V_i} + \frac{1}{w_i} \frac{dV_i}{dz} = K(z) \tag{22}$$

care, după înlocuirea funcțiilor $g(z)$, $w_i(z)$ și $V_i(z)$ date de (17), (18) și (19) devine :

$$K(z) = \frac{\sqrt{pg_0 \cdot R_0}}{(R_0 + z)(w_{i-1}^2 + 2pz)} + \sqrt{\frac{g_0}{p}} R_0 \left[\frac{p}{(w_{i-1}^2 + 2pz)} - \frac{1}{(R_0 + z)} \right] \tag{23}$$

Asemănător se procedează și cu relația (14), notînd :

$$\frac{1}{w_i} \frac{dw^1}{dz} + \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dz} - K(z) = L(z),$$

sau :

$$L(z) = \frac{p}{(w_{i-1}^2 + 2pz)} + \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dz} - K(z) \tag{24}$$

În aceste condiții, relațiile (13) și (14) devin :

$$\begin{aligned} \frac{dm_i}{dz} + K(z) m_i &= 0 \\ \frac{d\lambda_{1i}}{dz} + L(z) \lambda_{1i} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

ale căror soluții, după cum se știe din analiza matematică, sînt de forma :

$$\begin{aligned} m_i &= m_{i-1} \exp\left(-\int K(z)\, dz\right) \\ \lambda_{1i} &= \lambda_{(i-1)} \exp\left(-\int L(z)\, dz\right) \end{aligned} \tag{26}$$

m_{i-1}, $\lambda_{1(i-1)}$ reprezintă masa, respectiv multiplicatorul lui Lagrange, cunoscut, al treptei precedente.

Integrînd relația (23) se obține :

$$\int K(z)\, dz = \frac{\sqrt{pg_0}}{2pR_0 - 1} R_0 \ln \frac{w_{i-1}^2 + 2pz}{R_0 + z} +$$

$$+ R_0 \sqrt{\frac{g_0}{p}} \ln \frac{(w_{i-1}^2 + 2pz)^{\frac{1}{2p}}}{R_0 + z}$$

În final această integrală se scrie :

$$\int K(z)\,dz = ln\,\frac{(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^A}{(R_0 + z)^B} \tag{27}$$

unde

$$A = \sqrt{\frac{g_0}{p}} \cdot \frac{R_0}{2\,p} \cdot \frac{2\,p\,(p + R_0) - 1}{2\,pR_0 - 1} \tag{28}$$

iar,

$$B = \sqrt{\frac{g_0}{p}} \cdot R_0\,\frac{p\,(1 + 2\,R_0) - 1}{2\,pR_0 - 1}$$

Variația masei rachetei (26) în funcție de altitudine, pentru treapta „*i*", va fi :

$$m_i = m_{i-1} \cdot \frac{(R_0 + z)^B}{(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^A} \tag{29}$$

În același fel se deduce și pentru funcția (24)

$$\int L(z)\,dz = ln\,(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^{1/2} + ln\left[R_0\sqrt{\frac{g_0}{p}}\,\frac{(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^{1/2}}{R_0 + z}\right] - \\ - \int K(z)\,dz \tag{30}$$

sau mai concentrat :

$$\int L(z)\,dz = ln\,\frac{(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^D}{(R_0 + z)^G} \tag{31}$$

unde

$$D = \frac{1}{2} + \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{g_0}{p}}\left[1 + \frac{2\,p\,(p + R_0) - 1}{2\,p\,(2\,p\,R_0 - 1)}\right] \tag{32}$$

iar

$$G = R_0\sqrt{\frac{g_0}{p}} - B$$

Variația multiplicatorului lui Lagrange, corespunzător treptei „i", cu altitudinea va fi :

$$\lambda_{1i} = \lambda_{1(i-1)} \cdot \frac{(R_0 + z)^G}{(w_{i-1}^2 + 2\,pz)^D} \tag{33}$$

Din formula (29) se poate deduce cu ușurință faptul că funcția de z din membrul drept este descrescătoare și tinde spre zero pentru z tinzînd spre infinit. Aceasta corespunde realității, întrucît prin func-

ţionarea motoarelor se consumă combustibil, ceea ce implică o variaţie continuă a masei, iar prin ieşirea din funcţiune a treptelor după cum s-a remarcat se produce un salt, aspect care nu este pus în evidenţă în relaţia (29).

Regimul de funcţionare al motorului se oglindeşte în relaţiile obţinute (21) sau (29) prin valoarea parametrului parabolei (p), aceasta putînd avea valori diferite de la treaptă la treaptă, sau poate fi menţinut constant.

Rezultatele obţinute pot fi îmbunătăţite dacă funcţiile (29) şi (33) se înlocuiesc în (15), din care se deduce viteza de deplasare a treptei „*i*" în a doua aproximaţie.

Aceste calcule sînt destul de complicate prin diversitatea factorilor care intervin, fiind justificată efectuarea lor numai cu ajutorul maşinilor electronice de calcul.

În încheiere, se remarcă alegerea variaţiei vitezei de ieşire a gazelor din ajutaj (17) care, ca formă, este foarte apropiată de ceea ce se obţine în realitate fapt ce a condus la găsirea unor soluţii (29), (33) uşor de manevrat în calcule şi avînd o structură destul de simplă.

Catedra de aeronave şi aparate de bord
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Guţă, G.* — Consideraţii asupra regimului optim de urcare al rachetelor, Buletinul Institutului Politehnic Buc. Nr. 3 1969.

2. *Guţă, C., Marinescu, Al.* — Calculul şi construcţia rachetelor, Editura Didactică şi Pedagogică, 1967.

3. *Niţă, M. M., Andreescu, D. St.* — Zborul rachetei, Editura militară, 1964.

4. *Leitmann, G.* — Optimization Techniques, Academic Press, New-York—London, 1962.

5. *Ponomarev, V. M.* — Teoria upravlenia dvijeniem cosmiceschih apparatov, Editura Nauka, Moscova, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

MECANISME

C.Z. : 621.8.02 : 621.231 : 531.1 : 620.178.1 : 621.01

O METODĂ DE REZOLVARE CINETOSTATICĂ A MECANISMELOR PRIN SCHIMBAREA PUNCTULUI (SAU ELEMENTULUI) DE REDUCERE A FORȚELOR

N. I. MANOLESCU, GABRIELA IARCA

1. Introducere

În proiectarea mecanismelor și a mașinilor o problemă esențială care apare, după sinteza și analiza lor cinematică, este determinarea forțelor care acționează asupra elementelor componente ale cuplelor cinematice din mecanism și a forței sau forțelor de echilibrare (în cazul mecanismelor cu mai multe grade de mobilitate) ce trebuie aplicate la elementul sau elementele conducătoare.

Cunoașterea acestor forțe este necesară pentru a putea efectua în continuare calculele de rezistență în vederea dimensionării elementelor (barelor) care formează mecanismul, pentru determinarea uzurii suprafețelor în mișcare relativă a elementelor cuplelor, pentru stabilirea tipului lagărelor și a ungerii lor etc. Determinarea forței de echilibrare conduce la alegerea motorului de antrenare (în cazul mecanismelor de lucru) și în același timp stă la baza calculului dinamic de echilibrare a mecanismului dat.

Rezolvarea acestei probleme se face în teoria mecanismelor pe baza calculului cinetostatic, calcul ce are avantajul că creează posibilitatea determinării solicitărilor elementelor mecanismului în tot timpul ciclului energetic și cu ajutorul lor, trasînd hodograful forțelor, să se determine solicitările maxime pe baza cărora se face calculul de rezistență. Problema fundamentală este, în această direcție, găsirea celei mai rapide și — pe cît posibil — mai simple metode pentru determinarea acestor forțe. Dacă pentru mecanismele de clase inferioare (clasele II și III după clasificarea Artobolevski) calculul cinetostatic este relativ simplu, în cazul mecanismelor de clasă $\varnothing_Z > \text{III}$, acesta devine laborios. Analiza cinematică a acestor din urmă mecanisme a constituit obiectul a numeroase studii [3], [4] și actualmente există metode de simplificare a acestor rezolvări [4]. Metoda schimbării elementului conducător este una dintre ele. Extinderea acesteia din urmă la calculul cineto-

static al mecanismelor de clasă $\varnothing_Z > III$ duce la o simplificare corespunzătoare a rezolvării problemei, lucru ce se propune a se rezolva în lucrarea de față. Se vor prezenta mai întîi cele ce urmează.

2. Metodele existente de rezolvare cinetostatică a mecanismelor și principiul metodei propuse de autori

2.1. *Metoda directă*, care nu este în fond decît o problemă de mecanică teoretică, constă în separarea fiecărui element din mecanism și efectuarea studiului echilibrului acestuia sub acțiunea forțelor exterioare și a forțelor de legătură din cuplele cinematice pe baza principiului lui D'Alembert.

2.2. *Metoda grupelor Assur*, se deosebește de prima metodă prin faptul că în locul echilibrului unui singur element introduce studiul echilibrului unei grupe de elemente (grupa Assur sau, cum este mai frecvent numită în literatura germană, grupă elementară „elementar Gruppe"). Pornind de la grupa asupra căreia acționează forța exterioară cunoscută, se calculează toate reacțiunile din cuplele cinematice, inclusiv forța de echilibrare și, în final, problema cinetostatică este complet rezolvată. Bazată pe același principiu D'Alembert ca și metoda precedentă, rezolvarea cinetostatică a grupelor Assur reduce problema rezolvării echilibrului dinamic al mecanismului la o problemă clasică de echilibru cinetostatic.

2.3. *Metoda pîrghiei Jukovski* — este o metodă mai rapidă de calcul a forței de echilibrare (sau momentului de echilibrare) fără a se determina însă simultan reacțiunile din cuplele cinematice.

Rezultă că, în acest caz, metoda pîrghiei Jukovski rămîne numai ca o metodă de verificare a calculului efectuat cu ajutorul metodelor anterioare, sau de calcul numai al forței de echilibrare.

2.4. *Combinarea metodei pîrghiei Jukovski cu cea a grupelor Assur.*

Această metodă propusă de autori, determină mai întîi forța de echilibrare la elementul conducător sau condus — după caz — cu ajutorul pîrghiei Jukovski, după care se trece la determinarea reacțiunilor în cuplele cinematice prin metoda descompunerii mecanismului în grupe Assur.

Aplicarea acestei metode are nevoie de anumite precizări care se expun în cele ce urmează.

3. Calculul cinetostatic în cazul general

3.1. *Influența elementului conducător asupra clasei și ordinului mecanismului motor.*

La mecanisme de clasă mai mare decît clasa III, rezolvarea cinetostatică prezintă aceleași dificultăți ca și în cazul cinematic. Dar, în cazul cinematic, metoda schimbării elementului conducător are, după cum se

știe, avantaje în ceea ce privește micșorarea volumului de lucru. Schimbînd elementul conducător al unui lanț cinematic închis, se poate reduce clasa mecanismului, ceea ce antrenează evident simplificarea calculelor. Astfel, mecanismul din fig. 3, avînd trei elemente legate la bază, poate fi de trei clase diferite în funcție de elementul conducător ales :

— dacă 1 este element conducător, atunci mecanismul este de clasa IV ordinul 3 (grupa Assur 2, 3, 4, 5, 6, 7) și metoda de cercetare cinematică este cea a pozițiilor false [3] ;

— în cazul cînd 4 este element conducător, se obține tot un mecanism de clasa IV ordinul 3 (tetrada 3, 5, 6, 7 și diada 1, 2) ;

— în sfîrșit, dacă elementul conducător este 6, se poate reduce clasa mecanismului cu o unitate și acesta devine de clasa III/3 format din triada 3, 4, 5, 7 și diada 1, 2.

Se va demonstra în continuare că metoda cinematică de rezolvare prin schimbarea elementului conducător se poate extinde și la calculul cinetostatic.

3.2. *Metoda suprapunerii efectelor și a schimbării elementului de reducere.*

În lucrarea [4], A. Orănescu prezintă o metodă de determinare a forței de echilibrare a unui mecanism și a reacțiunilor din cuplele cinematice, folosind schimbarea elementului conducător și principiul suprapunerii efectelor. Forța de echilibrare în articulația elementului conducător a fost determinată în modul următor : se consideră un mecanism avînd elementul conducător real λ ; se alege ca element conducător fictiv μ (pe cel care reduce la minimum posibil clasa mecanismului) și determină prin metoda descompunerii în grupe Assur reacțiunile din cuplele cinematice exterioare ale acestora și forța de echilibrare $F^{*}_{e\mu}$ la noul element conducător. Aplicînd asupra mecanismului un al doilea cîmp de forțe format dintr-o forță fictivă ce acționează asupra manivelei reale λ (avînd un modul oarecare ales și notată cu $F^{**}_{e\lambda}$) și o altă forță $F^{**}_{e\mu}$ necunoscută pe direcția forței de echilibrare anterior determinate $F^{*}_{e\mu}$, se calculează din nou reacțiunile în cuple și forța $F^{**}_{e\mu}$.

Punînd în final condiția ca :

$$\overline{F}^{**}_{e\mu} = -\overline{F}^{*}_{e\mu}$$

rezultă scara la care s-a lucrat și, implicit, valoarea reală a forței de echilibrare la elementul conducător. Reacțiunile reale rezultă din însumarea reacțiunilor determinate cu ajutorul celor două cîmpuri de forțe, la scara k_F determinată anterior. Notațiile de mai sus aparțin autorului articolului.

3.3. *Metoda pîrghiei Jukovski*

Problema de mai sus se poate rezolva mai simplu folosind metoda pîrghiei Jukovski. Aceasta constă în determinarea forței reduse (a tuturor forțelor care acționează asupra mecanismului) în punctul grupei Assur de cea mai mică clasă structurală (așa cum s-a arătat în general la § 2.4.).

4. Principiul metodei schimbării punctului (sau elementului) de reducere

Metoda schimbării elementului conducător în calculul cinematic al unui mecanism se traduce în calculul cinetostatic prin metoda schimbării punctului sau elementului de reducere. Sistemul de forțe cunoscute, inclusiv forța de echilibrare, fiind în echilibru cinetostatic, suma lucrurilor mecanice date cu deplasările virtuale compatibile cu legăturile punctelor de aplicație ale acestora trebuie să fie nulă. Considerînd un mecanism cu n elemente mobile asupra căruia acționează un sistem complex de forțe exterioare (greutățile elementelor G_j, forțele exterioare aplicate mecanismului F_j, forțele de inerție F_{ij} și momentele forțelor de inerție M_{ij}), el va fi în echilibru sub acțiunea acestor forțe și a forței de echilibrare. Pentru simplificare se va considera că asupra fiecărui element acționează rezultanta acestor forțe $(\bar{G}_j + \bar{F}_j + \bar{F}_{ij} = \bar{\mathfrak{F}}_j$ și momentele forțelor de inerție M_{ij}

Principiul lucrului mecanic virtual aplicat acestui sistem în echilibru dinamic se va putea scrie :

$$\sum_1^n \mathfrak{F}_j \delta s_j \cos(\bar{\mathfrak{F}}_j, \bar{\delta s}_j) + \sum_1^n M_{i_j} \delta\varphi_j + F_{e_1} \delta s_1 \cos(\bar{F}_e, \bar{\delta s}_1) = 0 \qquad (1)$$

în care :

— δs_j este direcția deplasării forței $\bar{\mathfrak{F}}_j$;

— $\delta\varphi_j$ este rotația elementară a elementului j ;

— F_{e1} este forța de echilibrare aplicată elementului conducător real al mecanismului (numerotat cu 1) ;

— δs_1 este deplasarea elementară a punctului de aplicație a lui F_{e1}.

Împărțind cu dt și trecînd la limită se obține relația

$$\sum_1^n \mathfrak{F}_j v_j \cos(\bar{\mathfrak{F}}_j, \bar{v}_j) + \sum_1^n M_{ij} \omega_j + F_{e1} v_1 \cos(\bar{F}_{e1}, \bar{v}_1) = 0 \qquad (2)$$

sau scrisă vectorial

$$\sum_1^n \bar{\mathfrak{F}}_j \cdot \bar{v}_j + \sum_1^n \bar{M}_{ij} \cdot \bar{\omega}_j + \bar{F}_{e1} \cdot v_1 = 0 \qquad (3)$$

Metoda cinetostatică propusă reproduce fidel pe cea cinematică după cum urmează :

a) Se alege noul element conducător astfel ca să rezulte un mecanism de clasa cea mai mică posibilă, așa cum s-a arătat în § 3. Fie k acest nou element conducător, iar forța de echilibrare aplicată lui se va nota cu $\bar{F}_{ek}$. Ecuația (3) devine în acest caz :

$$\sum_{1}^{n} \bar{\mathfrak{F}}_j \cdot \bar{v}_j + \sum_{1}^{n} \bar{M}_{ij} \cdot \bar{\omega}_j + \bar{F}_{ek} \cdot \bar{v}_k = 0 \tag{4}$$

unde s-a notat cu v_k viteza punctului de aplicație a lui F_{ek}.

b) Se aplică acum mecanismului un al doilea cîmp de forțe format numai dintr-o forță de echilibrare la elementul conducător real F_{e1} și o forță care acționează asupra elementului k (notată F_{ek}) de aceeași direcție și modul ca forța F_{ek} dar de sens contrar, adică

$$\bar{F}^{*}_{ek} = -\bar{F}_{ek} \tag{5}$$

Scriind ecuația de echilibru sub forma Jukovski

$$\bar{F}_{e1} \cdot \bar{v}_1 + \bar{F}^{*}_{ek} \cdot \bar{v}_k = 0 \tag{6}$$

și înlocuind $\bar{F}^{*}_{ek}$ din relația (5), se obține

$$\bar{F}_{e1} \cdot \bar{v}_1 + (-\bar{F}_{ek}) \cdot \bar{v}_k - 0 \tag{6'}$$

Folosind principiul suprapunerii efectelor se adună relațiile (4) și (6'). Se obține tocmai relația (3), deci forța F_{e1} obținută cu ajutorul ecuației (6') este forța de echilibrare reală la elementul conducător dat (elementul 1) al mecanismului. Practic, metoda constă deci în a calcula cu ajutorul metodei pîrghiei Jukovski, forța de echilibrare redusă $\bar{F}_{ek}$ la un element oarecare (k) convenabil ales, al lanțului cinematic și apoi, aplicînd aceluiași element o forță egală și de sens contrar cu ea, se calculează forța de echilibrare redusă la elementul conducător $(\bar{F}_{e1})$ cînd asupra mecanismului nu acționează decît forțele $(-\bar{F}_{ek})$ și $\bar{F}_{e1}$. Avantajul metodei constă în calculul rapid și simplu al unor momente ale forțelor față de polul P_v al vitezelor, într-un poligon rotit cu 90°. Pentru determinarea reacțiunilor se procedează acum invers : se determină cu ajutorul metodei cunoscute reacțiunile în cuplele mecanismului în cele două situații :

a) cînd elementul conducător este k, iar asupra mecanismului acționează cîmpul de forțe dat și forța de echilibrare $\bar{F}_{e_k}$ calculată anterior ;

$$\sum_{1}^{n} \bar{F}_n + \bar{F}_{ek} = 0 \tag{7}$$

b) menținînd ca element conducător pe k, dar cîmpul de forțe se reduce la $(-\bar{F}_{ek})$ și $\bar{F}_{e1}$ (de asemenea cunoscute) :

$$(-\bar{F}_{ek}) + \bar{F}_{e1} = 0 \tag{8}$$

Reacțiunile totale din cuple rezultă din însumarea reacțiunilor determinate în cazurile (a) și (b) pe baza principiului suprapunerii efectelor pentru cele două cîmpuri de forțe. Acest lucru este posibil, deoarece adunînd cîmpurile (7) și (8) rezultă :

$$\sum_{1}^{n} \bar{F}_n + \bar{F}_{e1} = 0 \tag{9}$$

deci tocmai cîmpul real de forțe ce acționează asupra mecanismului. Pentru o demonstrație mai riguroasă se pot scrie următoarele relații de echilibru cinetostatic al mecanismului, între forțele exterioare $\sum_{1}^{n} \bar{F}_n$, reacțiunile în cuple $\sum_{1}^{p} \bar{R}_\alpha$ și forța de echilibrare :

— în cazul (a), ecuația are forma :

$$\sum_{1}^{n} \bar{F}_n \pm \sum_{1}^{p} \bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{F}_{ek} = 0 \tag{10}$$

unde $\sum \bar{R}_\alpha^{(a)}$ s-au notat reacțiunile în cuple corespunzătoare sistemului de forțe considerat în cazul (a) ;

— în cazul (b), ecuația de echilibru va fi :

$$\bar{F}_{e1} \pm \sum_{1}^{p} \bar{R}_\alpha^{(b)} + (-\bar{F}_{ek}) = 0 \tag{11}$$

— ecuația de echilibru a sistemului de forțe exterioare, a reacțiunilor reale $\sum_{1}^{p} \bar{R}_\alpha$ și a forței de echilibrare la elementul conducător real F_{e1} este :

$$\sum_{1}^{n} \bar{F}_n \pm \sum_{1}^{p} \bar{R}_\alpha + \bar{F}_{e1} = 0 \tag{12}$$

Alegem un punct oarecare în plan Z (fig. 1) și scriem ecuația de momente statice pentru cele trei cazuri anterioare :

$$\sum_{1}^{n} \bar{r}_n \times \bar{F}_n \pm \sum_{1}^{p} \bar{r}_R \times \bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{r}_{ek} \times \bar{F}_{ek} = 0 \tag{13}$$

$$\bar{r}_A \times \bar{F}_{e1} \pm \sum_{1}^{p} \bar{r}_R \times \bar{R}_\alpha^{(b)} + \bar{r}_{ek} \times (-\bar{F}_{ek}) = 0 \tag{14}$$

$$\sum_{1}^{n} \bar{r}_n \times \bar{F}_n \pm \sum_{1}^{p} \bar{r}_k \times \bar{R}_\alpha + \bar{r}_A \times \bar{F}_{e1} = 0 \tag{15}$$

Adunînd relaţiile (10) şi (11) şi înlocuind în (12) rezultă :

$$\sum_1^n \bar{F}_n \pm \sum_1^p [\bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)}] + \bar{F}_{e1} = 0$$

$$\sum_1^n \bar{F}_n = -\bar{F}_{e1} \mp \sum_1^p [\bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)}]$$

$$\pm \sum_1^p \bar{R}_\alpha \mp \sum_1^p [\bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)}] = 0 \qquad (16)$$

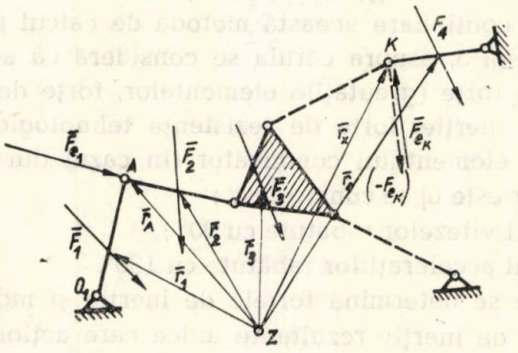


Fig. 1

Relaţia (16) nu este concludentă şi vom folosi relaţiile (13), (14) şi (15). Adunăm relaţiile (13) şi (14) şi obţinem :

$$\sum_1^n \bar{r}_n \times \bar{F}_n = \mp \sum_1^p \bar{r}_R \times [\bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)}] - \bar{r}_A \times \bar{F}_{e1} \qquad (17)$$

Înlocuind relaţia (17) în (15) rezultă :

$$\sum_1^p \bar{r}_R \times [\bar{R}_\alpha - (\bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)})] = 0$$

ceea ce înseamnă că :

$$\bar{R}_\alpha = \bar{R}_\alpha^{(a)} + \bar{R}_\alpha^{(b)} \qquad (10)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Verificarea metodei de calcul propusă mai sus s-a făcut considerînd mecanismul de clasa III/3 din fig. 2. la care s-a calculat forţa de echilibrare mai întîi prin metoda descompunerii lui în grupe Assur şi apoi prin metoda schimbării punctului de reducere. Asupra mecanismului acţionează un ansamblu de forţe cunoscute ($\bar{F}_1$,...$\bar{F}_5$) iar forţa de echilibrare determinată prin metoda grupelor Assur are valoarea

$F_e = 13{,}3$ N şi este aplicată elementului 1. S-a ales apoi ca nou element conducător bara 4 căreia i s-a imprimat o viteză unghiulară arbitrară construindu-se noul poligon de viteze rotit cu 90°. Cu sistemul de forţe iniţial s-a determinat în prima fază forţa de echilibrare $\bar{F}_{e4}$ la elementul 4, apoi, considerînd că asupra mecanismului acţionează numai forţa $-\bar{F}_{e4}$ (egală şi de sens contrar cu $\bar{F}_{e4}$) s-a determinat, cu ajutorul aceluiaşi poligon de viteze, forţa de echilibrare la elementul 1. A rezultat $F_{e1} = 13{,}9$ N. Eroarea în determinarea forţei de echilibrare prin cele două metode este de 4,4%, iar la reacţiuni variază între 5% şi 11%. Se va aplica în continuare această metodă de calcul la mecanismul de clasa IV/3 din fig. 3, asupra căruia se consideră că acţionează un sistem complex de forţe (greutăţile elementelor, forţe de inerţie, momentele forţelor de inerţie, forţe de rezistenţă tehnologică). Folosind metoda schimbării elementului conducător (în cazul din figură, noul element conducător este 6) se construiesc :

— poligonul vitezelor rabătute cu 90° ;

— poligonul acceleraţiilor rabătute cu 180°.

şi în continuare se determină forţele de inerţie şi momentele de inerţie, apoi forţele de inerţie rezultante unice care acţionează asupra elementelor mecanismului (evident, atît vitezele cît şi acceleraţiile se determină prin metoda schimbării elementului conducător [3]). Pentru simplificare se consideră în exemplul dat că asupra fiecărui element acţionează o singură forţă rezultantă a cărei valoare şi direcţie sînt cunoscute. Cu metoda pîrghiei Jukovski se determină forţa de echilibrare $\bar{F}_{e6}$ la noul element conducător căruia i s-a imprimat o viteză arbitrară ω'_6. Se obţine $\bar{F}_{e6} = 85{,}7$ N. Aplicînd din nou pîrghia Jukovski mecanismului acţionat numai de forţele $\bar{F}_{e6} = -\bar{F}_{e6}$ şi forţa de echilibrare reală la elementul conducător 1 a rezultat valoarea $F_{e1} = 80{,}1$ N. Calcularea reacţiunilor din articulaţii s-a făcut considerînd că asupra mecanismului acţionează aceleaşi cîmpuri de forţe, în modul următor :

(a) — s-a considerat ca element conducător 6 şi primul cîmp de forţe format din forţele exterioare date şi forţa de echilibrare $F_{e6} = 85{,}7$ N (la acest element conducător) calculată cu metoda pîrghiei Jukovski ; aceasta corespunzînd cazului (a), toate reacţiunile determinate la diada 1—2 şi triada 3—4—5—7 prin metodele calculului cinetostatic pe grupe Assur au primit indicele „a" $(\bar{R}_{kj}^{(a)})$.

(b) — menţinînd acelaşi element conducător 6, dar considerînd acum al doilea cîmp de forţe format numai din $-\bar{F}_{e6}$ şi $F_{e1} = 80{,}1$ N (aplicată la manivela reală 1) ale căror valori au fost determinate tot cu pîrghia Jukovski, se calculează a doua serie de reacţiuni în cuple co-

respunzătoare cazului (b), tot cu ajutorul metodelor clasice, la diada 1—2 și triada 3—4—5—7. Reacțiunile totale (reale) din articulații se calculează prin însumarea reacțiunilor determinate la (a) și (b), ceea ce nu înseamnă altceva decît aplicarea principiului suprapunerii efectelor. Reacțiunea din articulația F a elementului 6 la bază s-a calculat direct, făcînd echilibrul forțelor care acționează asupra lui, deoarece s-au calculat anterior mărimile reale ale reacțiunilor din cuplele G și E.

Însumarea reacțiunilor

$$\overline{R}_{ij}^{(a)} + \overline{R}_{ij}^{(b)} = \overline{R}_{ij}$$

pentru articulațiile I, E, G, H, D s-a făcut direct pe poligonul de forțe de la echilibrul triadei 3—4—5—7 pentru cazul (b).

5. Concluzii

Metoda aceasta simplă de calcul a forței de echilibrare se poate aplica la cele mai complexe mecanisme, criteriul fundamental de simplificare a calculului fiind cunoașterea structurii mecanismului. Alegînd ca nou element conducător pe acela cu ajutorul căruia se obține cea mai mică clasă posibilă a mecanismului, se determină cu metoda pîrghiei Jukovski forța de echilibrare aplicată lui și apoi forța de echilibrare la elementul conducător real.

Calcularea reacțiunilor se face tot prin suprapunerea a două cîmpuri de forțe dar cu avantajul că se lucrează pe un mecanism de clasă inferioară celui dat, de unde rezultă celelalte avantaje legate de simplificarea și precizia calculului.

Verificarea corectitudinii calculului cinetostatic se poate face cu metoda închiderii poligoanelor forțelor ce acționează asupra unui element oarecare.

Metoda propusă poate avea aplicații întinse și în rezolvarea ecuației de mișcare a mașinii sub forma Lagrange, putîndu-se determina rapid valoarea momentului motor și a momentului rezistent în orice poziție a elementului conducător.

Urmărirea fidelă a calculului dinamic după cea mai simplă metodă cinetostatică va conduce, evident la cel mai scurt drum de rezolvare dinamică a mecanismului.

Catedra de mecanisme
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

ANEXA DE CALCUL

Figura 2

2 *a*. Valorile forţelor

$$F_1 = 10\,N$$
$$F_2 = 15\,N$$
$$F_3 = 20\,N$$
$$F_4 = 18\,N$$
$$F_5 = 25\,N$$

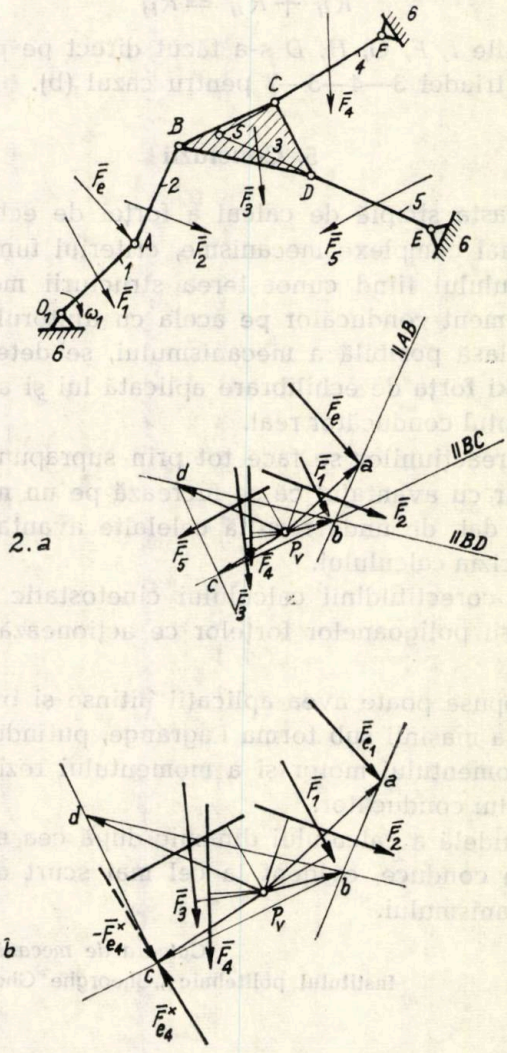


Fig. 2.1

Forța de echilibrare

$$F_e = \frac{1}{(P_v\, a)} [-F_1(h_1) - F_2(h_2) + F_3(h_3) + F_4(h_4) + F_5(h_5)] = 13{,}3\ N$$

2 *b*. Cazul (b)

Forțele de echilibrare

$$F^*_{e_4} = \frac{1}{(P_v\, c)} [-F_1(h_1) - F_2(h_2) + F_3(h_3) + F_4(h_4) + F_5(h_5)] = 17{,}8\ N$$

$$F_{e_1} = \frac{(-F_{e_4})\ (P_v\, c)}{(P_v\, a)} = 13{,}9\ N$$

eroare $\varepsilon = 4{,}4\ \%$

2 *c*. Calculul reacțiunilor cu metoda descompunerii în grupe Assur (triada 2, 3, 4, 5)

$\sum M_C^{(4)} = 0$; $R_{64}^t = 7{,}9\ N$

$\sum M_D^{(5)} = 0$; $R_{65}^t = 10{,}1\ N$

$\sum M_B^{(2)} = 0$; $R_{12}^t = 9{,}65\ N$

$\sum M_S = 0$; $R_{12}^n = -61{,}5\ N$

$$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{64}^n} + \underline{\overline{R}_{64}^t} + \underline{\overline{F}_4} + \underline{\underline{\overline{R}_{12}^n}} + \underline{\underline{\overline{R}_{12}^t}} + \underline{\overline{F}_2} + \underline{\overline{F}_3} + \underline{\overline{F}_5} + \underline{\underline{\overline{R}_{65}^t}} + \underline{\overline{R}_{65}^n} = 0$$

Valorile reacțiunilor totale

$R_F = R_{64} = 120\ N$

$R_A = R_{12} = 62\ N$

$R_D = R_{35} = 84{,}5\ N$

$R_E = R_{65} = 69\ N$

$R_B = R_{32} = 60\ N$

$R_C = R_{34} = 111\ N$

2 *d*. Calculul reacțiunilor la elementul conducător.

$$\sum \overline{F} = \underline{\underline{\overline{F}_e}} + \underline{\underline{\overline{R}_{21}}} + \underline{\overline{F}_1} + \overline{R}_{61} = 0$$

$R_{01} = R_{61} = 58{,}5\ N$

2 *e*. Calculul reacțiunilor cu metoda schimbării punctului de reducere.

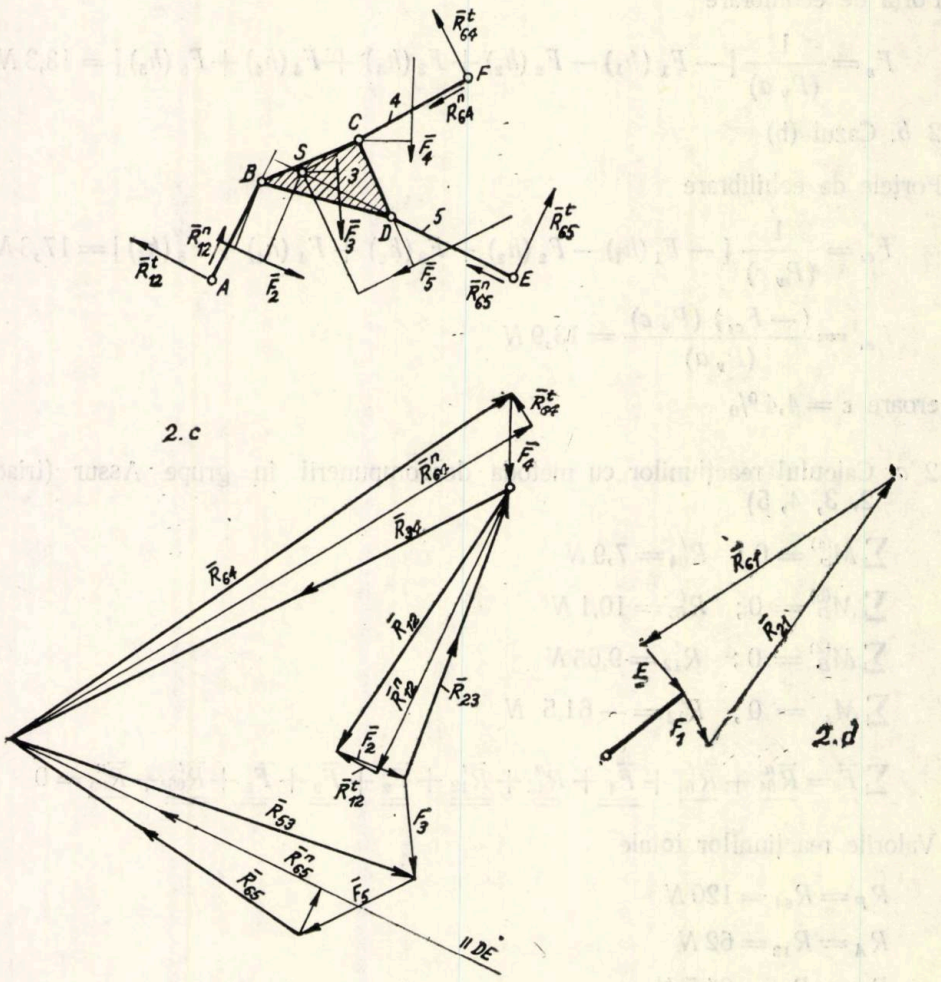


Fig. 2.3

2 *e* 1. cazul (*a*)

diada 1—2: $\sum M_A^{(1)} = 0\,; \quad R_{61}^{t\,(a)} = 5\ N$

$\sum M_A^{(2)} = 0\,; \quad R_{32}^{t\,(a)} = 5\ N$

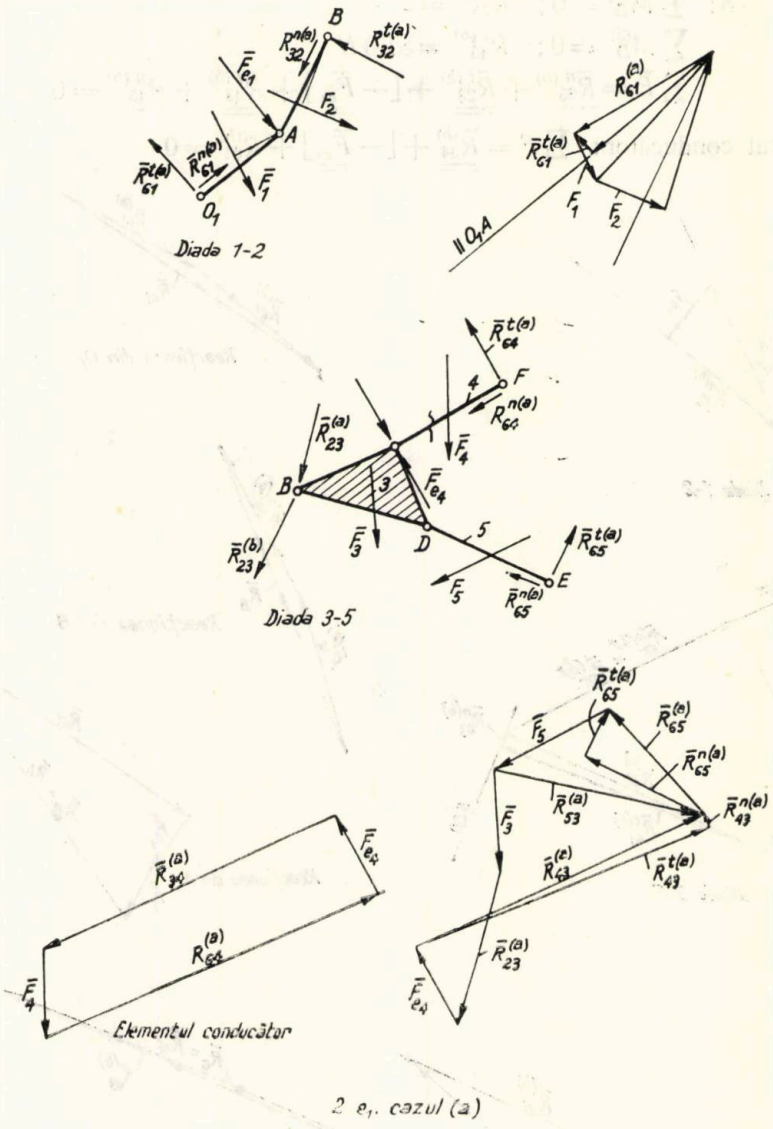
$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{61}^{n\,(a)}} + \underline{\underline{\overline{R}_{61}^{t\,(a)}}} + \underline{\overline{F}_1} + \underline{\overline{F}_2} + \underline{\underline{\overline{R}_{32}^{t\,(a)}}} + \underline{\overline{R}_{32}^{n\,(a)}} = 0$

$\sum M_D^{(5)} = 0\,; \quad R_{65}^{t\,(a)} = 10{,}1\ N$

$\sum M_D^{(3)} = 0\,; \quad R_{43}^{t\,(a)} = 63\ N$

diada 3—5: $\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{65}^{n\,(a)}} + \underline{\underline{\overline{R}_{65}^{t\,(a)}}} + \underline{\overline{F}_5} + \underline{\overline{F}_3} + \underline{\underline{\overline{R}_{23}^{(a)}}} + \underline{\overline{F}_{e_4}} + \underline{\underline{\overline{R}_{43}^{t\,(a)}}} + \underline{\overline{R}_{43}^{n\,(a)}} = 0$

elementul conducător : $\sum \overline{F} = \underline{\underline{\overline{F}_{e_4}}} + \underline{\underline{\overline{R}_{34}^{(a)}}} + \underline{\overline{F}_4} + \overline{R}_{64}^{(a)} = 0$



2 e_1. cazul (a)

Fig. 2.4

2 *e* 2 cazul (*b*)

diada 1 — 2 : $\sum M_A^{(1)} = 0$; $\overline{R}_{61}^{t\,(b)} = 0$

$\sum M_A^{(2)} = 0$; $\overline{R}_{32}^{t\,(b)} = 0$

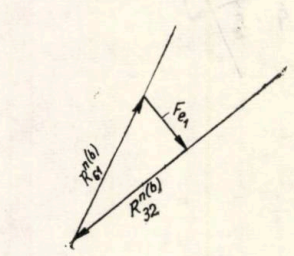
$$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{61}^{n\,(b)}} + \underline{\overline{F}_{e_1}} + \underline{\overline{R}_{32}^{n\,(b)}} = 0$$

diada 3 — 5: $\sum M_D^{(5)} = 0; \quad \overline{R}_{65}^{t(b)} = 0$

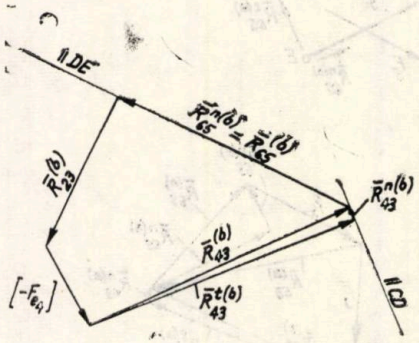
$\sum M_D^{(3)} = 0; \quad R_{43}^{t(b)} = 51{,}3\ N$

$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{65}^{n(b)}} + \underline{\overline{R}_{23}^{t(b)}} + [-\underline{\overline{F}_{e_4}}] + \underline{\overline{R}_{43}^{t(b)}} + \underline{\overline{R}_{43}^{n(b)}} = 0$

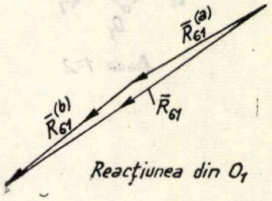
elementul conducător: $\sum \overline{F} = \underline{\underline{\overline{R}_{34}^{(b)}}} + [-\underline{\underline{\overline{F}_{e_4}}}] + \overline{R}_{64}^{(b)} = 0$



Diada 1-2

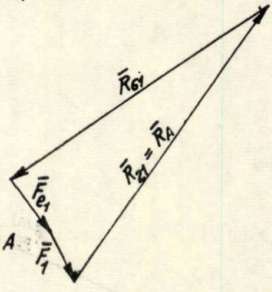


Diada 3-5

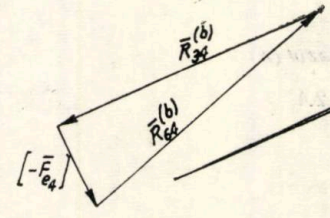


Reacțiunea din O_1

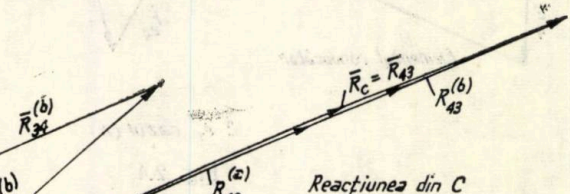
Reacțiunea din B



Reacțiunea din A



Elementul conducător



Reacțiunea din C

2. e_2 cazul (b)

2. e_3 Reacțiunile totale

Fig. 2.5

2 *e* 3 reacțiunile totale

reacțiunea din O_1: $\bar{R}_{61} = \bar{R}_{61}^{(a)} + \bar{R}_{61}^{(b)}$; $R_{61} = 61{,}5\ N$

$$\text{eroare } \varepsilon = \frac{\Delta R \times 100}{R_{med}} = 5\,\%$$

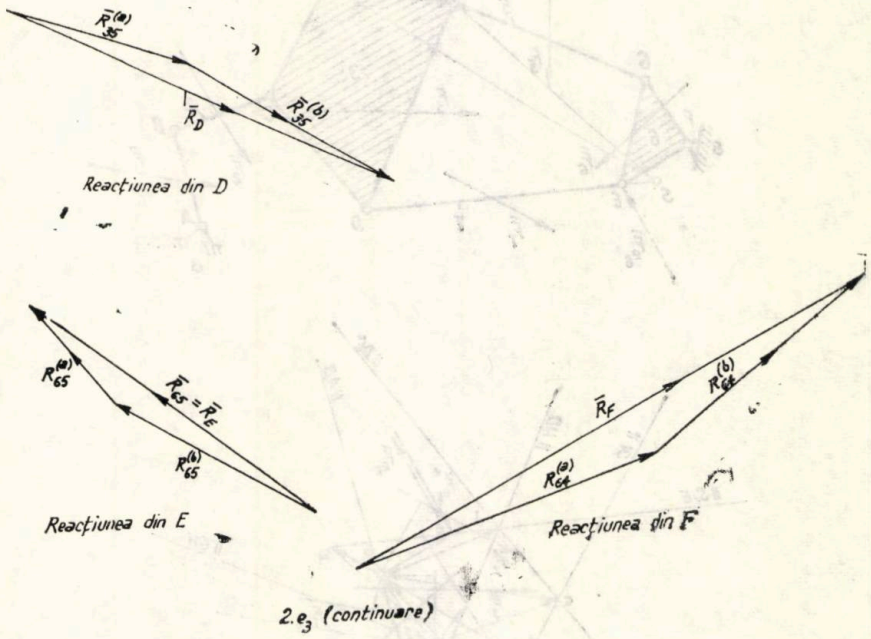


Fig. 2.6

reacțiunea din B: $\bar{R}_B = \bar{R}_{32} = \bar{R}_{32}^{(a)} + \bar{R}_{32}^{(b)}$; $R_B = 64{,}5\ N$
eroare $\varepsilon = 7{,}2\,\%$

reacțiunea din A: $\bar{R}_A + \underline{\bar{R}_{61}} + \underline{\bar{F}_{e1}} + \underline{\bar{F}_1} = 0$; $R_A = 66{,}5\ N$
eroare $\varepsilon = 7{,}05\,\%$

reacțiunea din C: $\bar{R}_C = \bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^{(a)} + \bar{R}_{43}^{(b)}$; $R_c = 120\ N$
eroare $\varepsilon = 7{,}8\,\%$

reacțiunea din D: $\bar{R}_D = \bar{R}_{35} = \bar{R}_{35}^{(a)} + \bar{R}_{35}^{(b)}$; $R_D = 92\ N$
eroare $\varepsilon = 8{,}5\,\%$

reacțiunea din E: $\bar{R}_E = \bar{R}_{65} = \bar{R}_{65}^{(a)} + \bar{R}_{65}^{(b)}$; $R_E = 77\ N$
eroare $\varepsilon = 11\,\%$

reacțiunea din F: $\bar{R}_F = \bar{R}_{64} = \bar{R}_{64}^{(a)} + \bar{R}_{64}^{(b)}$; $R_F = 128\ N$
eroare $\varepsilon = 6{,}45\,\%$

Figura 3. Calculul reacțiunilor cu metoda schimbării punctului de reducere.

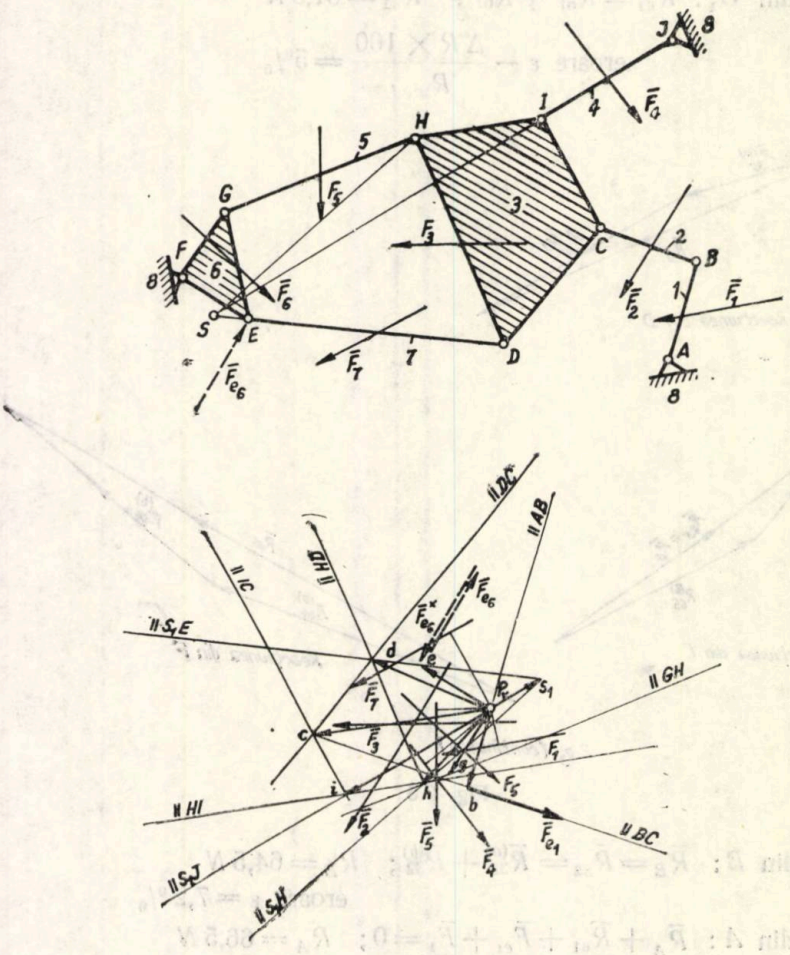


Fig. 3.1

$$\sum M_{P_v} = 0\,; \quad F_{e1} = 80{,}1\,N\,; \quad F_{e6} = 85{,}7\,N$$

3.1. cazul (a)

diada 1 — 2 :

$$\sum M_B^{(1)} = 0\,; \quad R_{81}^{t\,(a)} = 4{,}5\,N$$

$$\sum M_B^{(2)} = 0\,; \quad R_{32}^{t\,(a)} = 7{,}35\,N$$

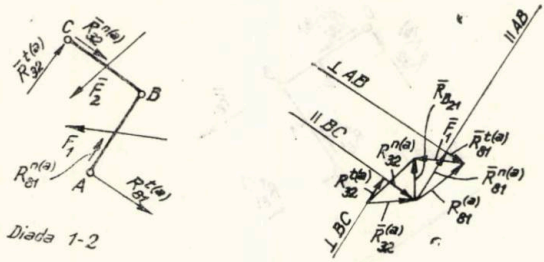
$$\sum \bar{F} = \underline{\bar{R}}_{81}^{n\,(a)} + \underline{\underline{\bar{R}}}_{81}^{t\,(a)} + \underline{\underline{\bar{F}}}_1 + \underline{\underline{\bar{F}}}_2 + \underline{\underline{\bar{R}}}_{32}^{t\,(a)} + \underline{\bar{R}}_{32}^{n\,(a)} = 0$$

$$R_{32}^{(a)} = 10\,N$$

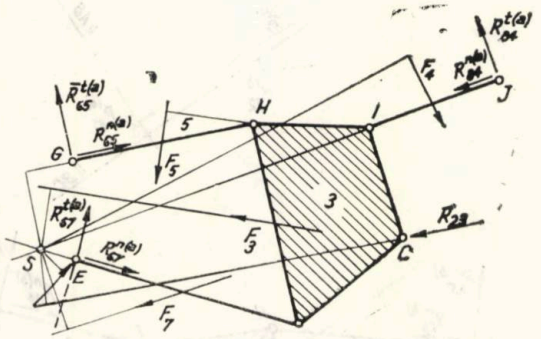
$$R_{81}^{(a)} = 13\,N$$

triada 3 — 4 — 5 — 7 :

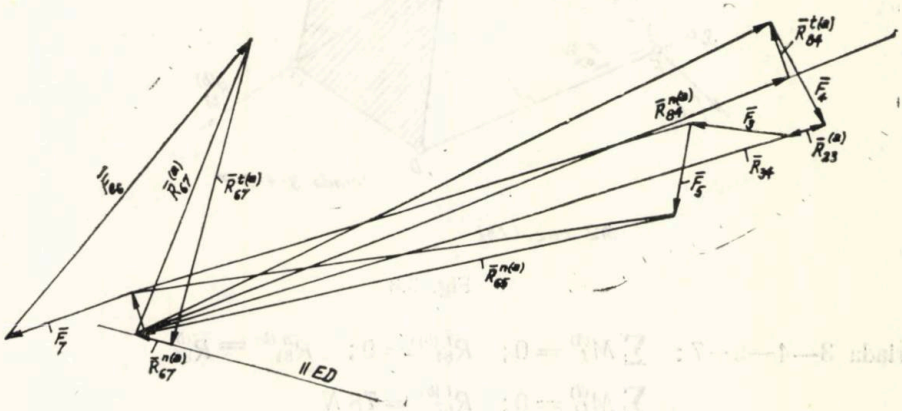
$$\sum M_I^{(4)} = 0\,; \quad R_{84}^{t\,(a)} = 12{,}5\ N$$
$$\sum M_D^{(7)} = 0\,; \quad R_{67}^{t\,(a)} = -69{,}5\ N$$
$$\sum M_H^{(5)} = 0\,; \quad R_{65}^{t\,(a)} = 9{,}5\ N$$
$$\sum M_S = 0\,; \quad R_{65}^{n\,(a)} = -118\ N$$
$$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}}_{84}^{n\,(a)} + \underline{\overline{R}}_{84}^{t\,(a)} + \underline{\overline{F}}_4 + \underline{\overline{R}}_{23} + \underline{\overline{F}}_3 + \underline{\overline{F}}_5 + \underline{\overline{R}}_{65}^{n\,(a)}$$
$$+ \underline{\overline{R}}_{65}^{t\,(a)} + \underline{\overline{F}}_7 + \underline{\overline{F}}_{e_6} + \underline{\overline{R}}_{67}^{t\,(a)} + \underline{\overline{R}}_{67}^{n\,(a)} = 0$$



Diada 1-2



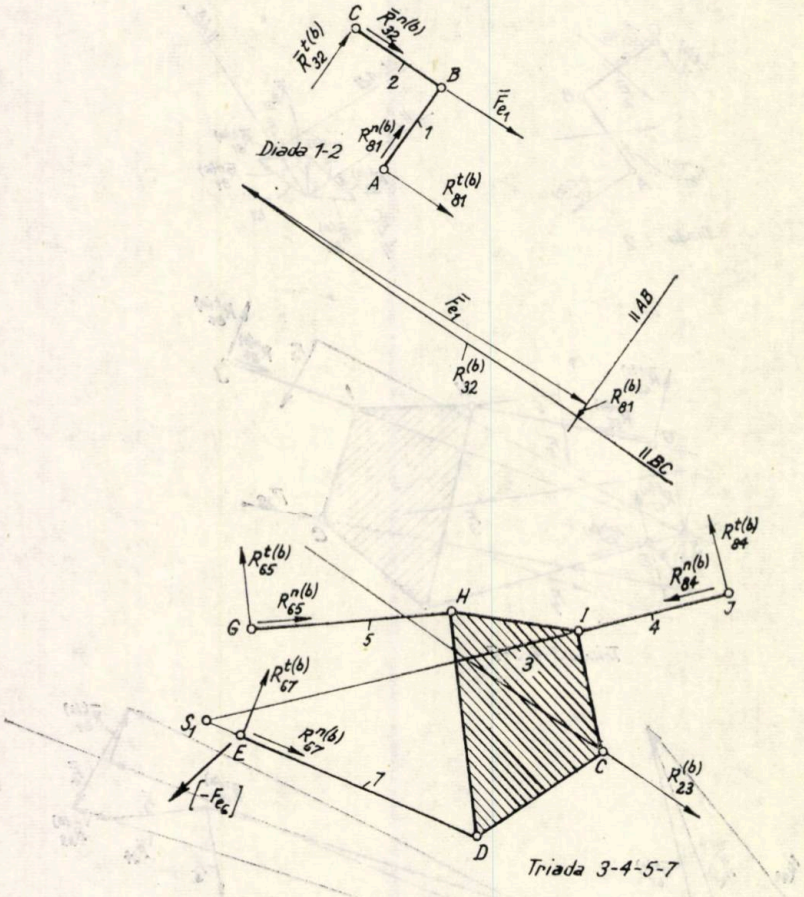
Triada 3-4-5-7



3.1 cazul (a) Fig. 3.2

3.2. cazul (b)

diada 1 – 2:
$$\sum M_B^{(1)} = 0; \quad R_{61}^{t\,(b)} = 0$$
$$\sum M_B^{(2)} = 0; \quad R_{32}^{t\,(b)} = 0$$
$$\sum \bar{F} = \underline{\bar{R}_{32}^{n\,(b)}} + \underline{\underline{\bar{F}_{e_1}}} + \underline{\bar{R}_{81}^{n\,(b)}} = 0$$
$$R_{32}^{(b)} = 81\ N$$



3.2 cazul (b)

Fig. 3.3

triada 3—4—5—7:
$$\sum M_I^{(4)} = 0; \quad R_{84}^{t\,(b)} = 0; \quad \bar{R}_{81}^{n\,(b)} = \bar{R}_{84}^{(b)}$$
$$\sum M_D^{(7)} = 0; \quad R_{67}^{t\,(b)} = 78\ N$$

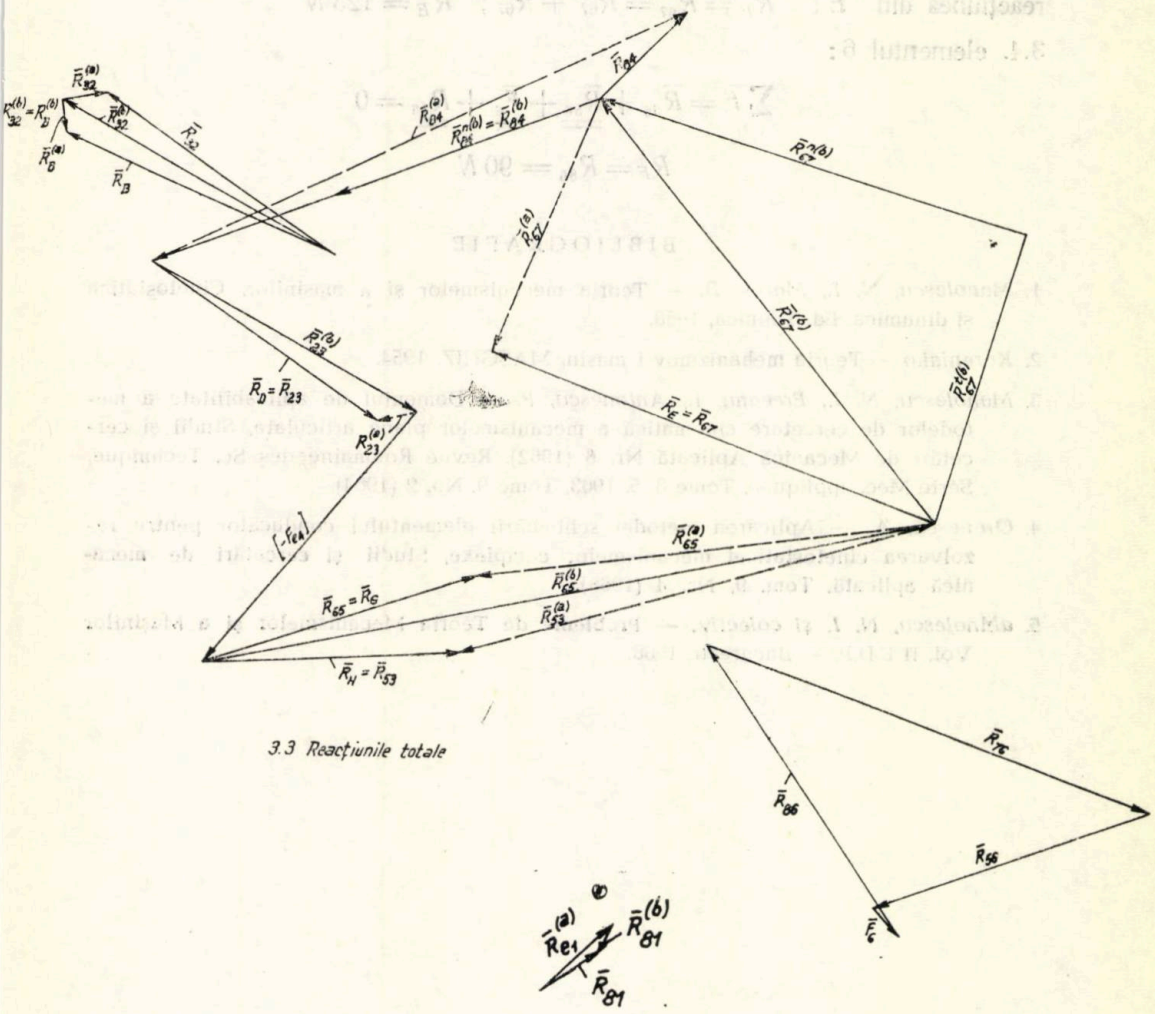
$$\sum M_H^{(5)} = 0\,; \quad R_{65}^{t\,(b)} = 0\,; \quad \overline{R}_{65}^{n\,(b)} = \overline{R}_{65}^{(b)}$$

$$\sum M_S = 0\,; \quad R_{65}^{n\,(b)} = 192{,}5\,N$$

$$\sum \overline{F} = \underline{\overline{R}_{84}^{n\,(b)}} + \underline{\overline{R}_{23}^{(b)}} + [-\underline{\overline{F}_{ec}}] + \underline{\overline{R}_{65}^{n\,(b)}} + \underline{\overline{R}_{67}^{t\,(b)}} + \underline{\overline{R}_{67}^{n\,(b)}} = 0$$

3.3. reacţiunile totale

reacţiunea din O_1: $\overline{R}_{O_1} = \overline{R}_{81} = \overline{R}_{81}^{(a)} + \overline{R}_{81}^{(b)}$; $R_{O_1} = 10\,N$



3.3 Reacţiunile totale

Fig. 3.4

reacțiunea din C: $\overline{R}_C = \overline{R}_{32} = \overline{R}_{32}^{(a)} + \overline{R}_{32}^{(b)}$; $R_C = 72\ N$

reacțiunea din B: $\overline{R}_B = \overline{R}_B^{(a)} + \overline{R}_B^{(b)}$; $R_B = 75{,}5\ N$

reacțiunea din D: $\overline{R}_D = \overline{R}_{23} = \overline{R}_{23}^{(a)} + \overline{R}_{23}^{(b)}$; $R_D = 72\ N$

reacțiunea din G: $R_G = \overline{R}_{65} = \overline{R}_{65}^{(a)} + \overline{R}_{65}^{(b)} = \overline{R}_G = 74\ N$

reacțiunea din I: $\overline{R}_I = \overline{R}_{34} = \overline{R}_{34}^{(a)} + \overline{R}_{34}^{(b)}$; $R_1 = 35{,}5\ N$

reacțiunea din H: $\overline{R}_H = \overline{R}_{53} = \overline{R}_{53}^{(a)} + \overline{R}_{53}^{(b)}$; $R_H = 68\ N$

reacțiunea din E: $\overline{R}_E = \overline{R}_{67} = \overline{R}_{67}^{(a)} + \overline{R}_{67}^{(b)}$; $R_E = 123\ N$

3.4. elementul 6:

$$\sum \overline{F} = \overline{R}_{86} + \underline{\underline{R}}_{56} + \underline{\underline{F}}_6 + \underline{\underline{R}}_{76} = 0$$

$$R_F = R_{86} = 90\ N$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Manolescu, N. I., Maros, D.* — Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinetostatica și dinamica. Ed. Tehnică, 1958.

2. *Koreniako* — Teoria mehanizmov i mașin, MAȘGHIZ, 1954.

3. *Manolescu, N. I., Erceanu, I., Antonescu, P.* — Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate, Studii și cercetări de Mecanică Aplicată Nr. 6 (1962). Revue Roumaine des Sc. Technique, Série Mec. appliquée. Tome 8. 5. 1963, Tome 9. No. 2 (1964).

4. *Orănescu, A.* — Aplicarea metodei schimbării elementului conducător pentru rezolvarea cinetostaticei mecanismelor complexe, Studii și cercetări de mecanică aplicată. Tom. 9, Nr. 4 (1968).

5. *aMnolescu, N. I. și colectiv.* — Probleme de Teoria Mecanismelor și a Mașinilor Vol. II E.D.P. — București, 1968.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. : 539.4 : 624.023.9 : 624.072.2

VIBRAȚIILE FORȚATE VERTICALE ALE GRINZILOR PENDULARE *

A. PETRE, VASILICA COSAC

În lucrarea [1] s-a demonstrat că relația între deplasarea f pe verticală a unei greutăți P_0, fixată în mijlocul unei grinzi prismatice pendulare (fig. 1), este liniară pe porțiuni, înainte și după pierderea stabilității grinzii (fig. 2).

Se consideră o astfel de grindă încărcată cu greutatea P_0 la mijlocul deschiderii. În plus, grinda se presupune a fi solicitată de o forță variabilă în timp, după legea :

$$F = F_0 \sin \omega t \qquad (1)$$

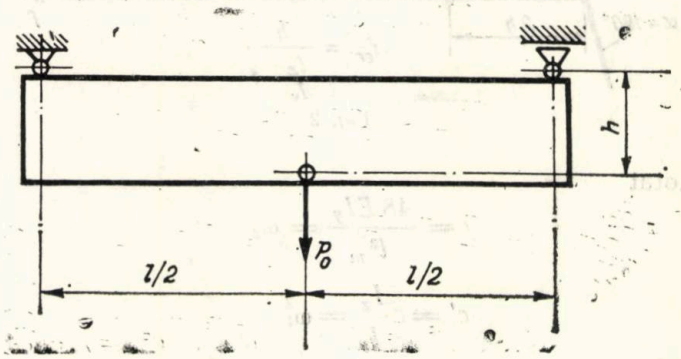


Fig. 1.

Se admite că :

— masa proprie a grinzii este neglijabilă în comparație cu masa sarcinii P_0 aplicate ;
— solicitarea de răsucire a grinzii poate fi neglijată în comparație cu cea produsă de încovoierea ei laterală ;

* Manuscris predat la redacție la 26 ianuarie 1969.

— reazemele permit atît rotiri în toate sensurile cît şi deplasări în lungul barei.

Ecuaţia diferenţială a vibraţiei forţate a greutăţii P_0, considerînd şi frecarea, va fi :

$$\ddot{f} + c' f + \varepsilon F(f) + F_1(\dot{f}) + q \sin \omega t \tag{2}$$

iar

$$\varepsilon F(f) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } f_0 \leqslant f \leqslant \overset{x}{f}_2 \\ (c - c')f + (c' - c)\overset{x}{f}_1 & \text{pentru } \overset{x}{f}_1 \leqslant f \leqslant \overset{x}{f}_2 \end{cases} \tag{3}$$

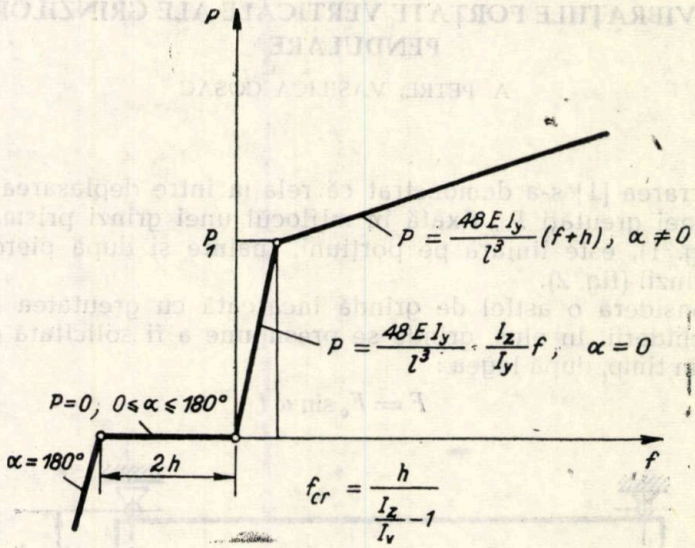


Fig. 2.

unde s-a notat

$$c = \frac{48 E I_y}{l^3 m} = \omega_2^2$$

$$c' = c \frac{I_z}{I_y} = \omega_1^2$$

$$q = \frac{F_0}{m};\ k' = c' m$$

$$\overset{x}{f}_1 = f_1 - f_0$$

$$\overset{x}{f}_2 = f_2 - f_0$$

$$B = \frac{I_y}{I_z}$$

Relația între amplitudinea vibrației forțate a, amortizarea, pulsația ω și intensitatea maximă F_0 a forței perturbatoare se stabilește într-o primă aproximație considerînd

$$f = a\cos(\omega t + \theta) \tag{5}$$

Aplicînd metoda asimtotică (Bogoliulov-Krîlov) relația între mărimile a, ω, F_0 are forma

$$[a^2(\omega_2^2(a) - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_e(a)] = q^2 \tag{6}$$

unde

$$\omega_e^2(a) = \omega_1^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi \tag{7}$$

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_1 a}\int_0^{2\pi} F_1(-a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi \tag{8}$$

Relația (5) rezolvată în raport cu ω^2 devine :

$$\omega^2 = \omega_e^2(a) - 2\delta_e^2(a) + \sqrt{\left(\frac{q}{a}\right)^2 + 4\delta_e^4(a) - 4\omega_e^2(a)\delta_e^2(a)} \tag{9}$$

Se poate observa ușor că această primă aproximație a metodei asimtotice conduce la rezultate identice cu cele obținute prin aplicarea metodei lui Galerkin.

În același timp această metodă permite scrierea într-o formă mai simplă a soluției în aproximația de ordinul doi sau trei decît prin folosirea metodei Galerkin.

Relația (3), după înlocuirea lui f cu soluția dată de prima aproximație, devine :

$$\varepsilon F(a\cos\psi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \psi_0 < \psi < 2\pi - \psi_0 \\ (c' - c)\overset{x}{f}_1 - (c' - c)\, a\cos\psi & \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{pentru } 2\pi - \psi_0 < \psi < 2\pi + \psi_0$$

unde,

$\psi = \omega t + \theta$ este fază totală, iar ψ_0 este cea mai mică rădăcină a ecuației

$$f = a\cos\psi$$

Relația (7) după înlocuirea lui (10) și efectuarea calculelor devine :

$$\omega_e^2(a) = \omega_1^2 + \frac{c' - c}{\pi}\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)^2} - \operatorname{arc\,cos}\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right) \tag{11}$$

Pentru calcularea expresiei (8) se presupune că forța de frecare este proporțională cu viteza, adică

$$F_1(\dot{f}') = 2\delta\dot{f} \tag{12}$$

astfel încît relația (8) ia forma

$$\delta_e(a) = \delta \tag{13}$$

Înlocuind expresiile (11) și (13) în relația (9) se obține :

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{c'-c}{\pi}\left[\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)^2} - \arccos\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)\right] - 2\delta_{\pm}^2$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{q}{a}\right)^2 - 4\omega_1^2\delta^2 - 4\delta^2\frac{c'-c}{\pi}\left[\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)^2} - \arccos\left(\frac{\overset{x}{f}_1}{a}\right)\right] + 4\delta^4} \tag{14}$$

Se notează cu

$$B = \frac{c}{c'} = \frac{I_y}{I_z}$$

$$A = \frac{a}{f_1^*}$$

$$C = \frac{q}{f_1^* c'} = \frac{F_0}{P_1 - P_0} = \frac{F}{k'(f_1 - f_0)} \tag{15}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_1}$$

unde :

B — reprezintă raportul momentelor de inerție principale centrale ale secțiunii transversale ;

A — factor de amplificare — reprezentînd raportul între — a — amplitudinea vibrației forțate a greutății P_0 și cea corespunzătoare unei sarcini egale cu cea critică (P_1) ;

C — factor de încărcare — reprezentînd raportul între intensitatea maximă a forței perturbatoare F_0 și suplimentul de sarcină K' (f_1—f_0) care adăugat la P_0 conduce la pierderea stabilității grinzii ;

D — factorul de amortizare ;

$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ — reprezintă raportul între pulsația forței perturbatoare ω și pulsația vibrației greutății P_0 înaintea pierderii stabilității grinzii.

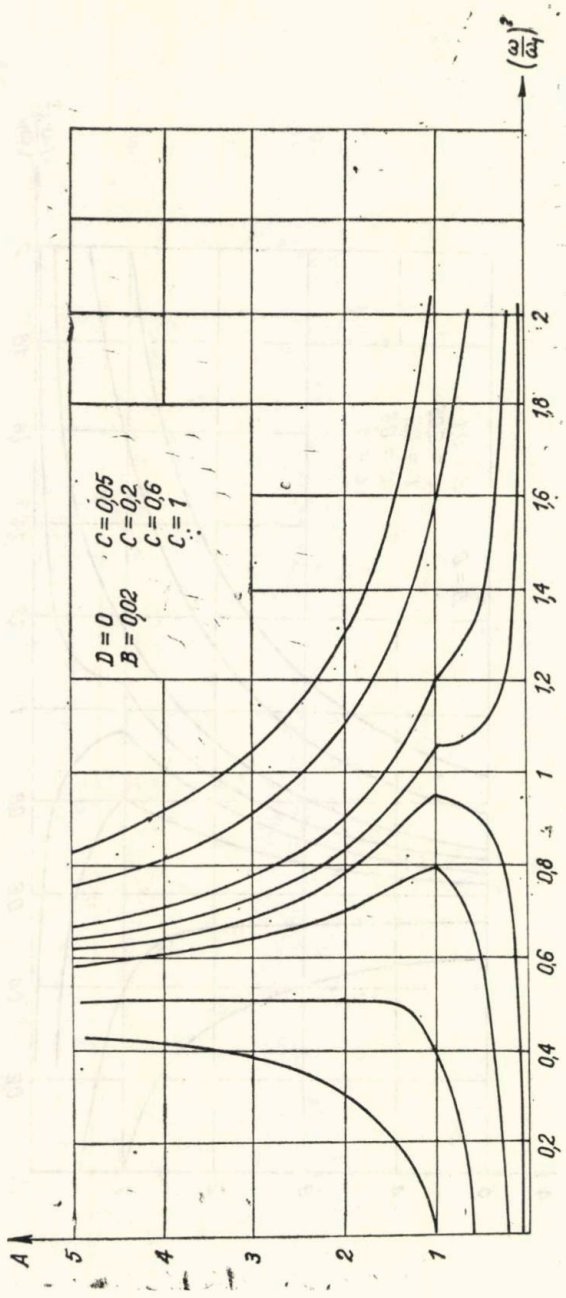

$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$
A
5
4
3
2
1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
D = 0
B = 0,02
C = 0,05
C = 0,2
C = 0,6
C = 1

Fig. 3.

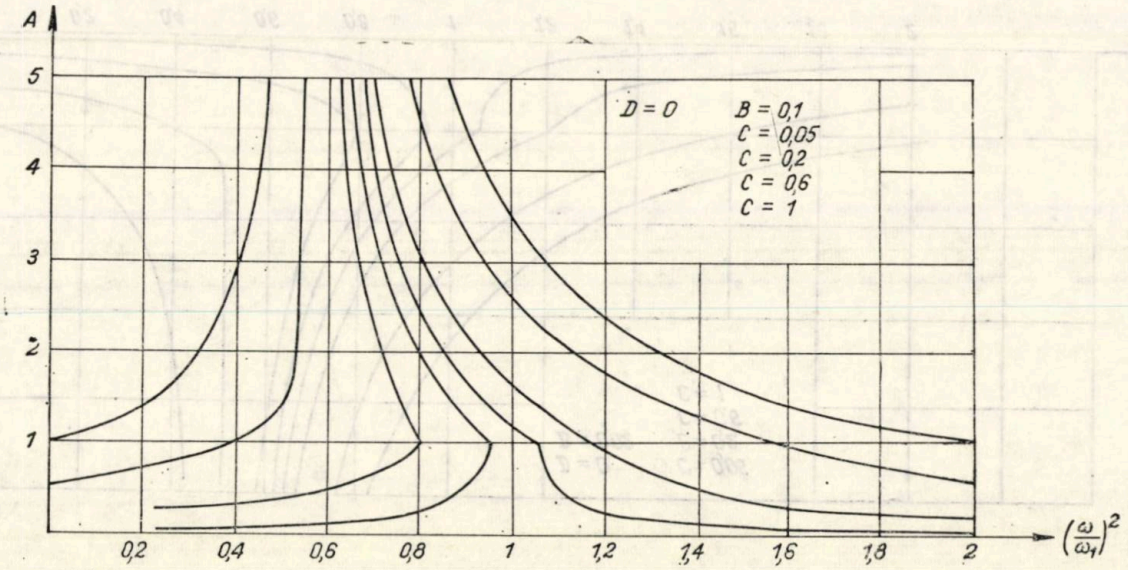

A
5
4
3
2
1
D = 0
B = 0,1
C = 0,05
C = 0,2
C = 0,6
C = 1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$

Fig. 4.

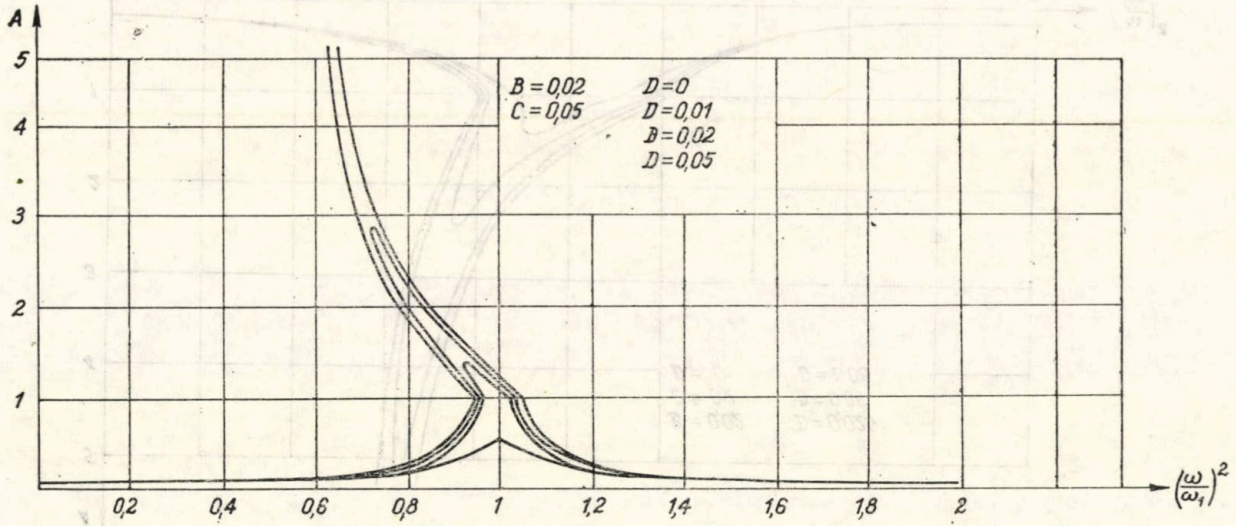

A
5
4
3
2
1
B = 0,02
C = 0,05
D = 0
D = 0,01
B = 0,02
D = 0,05
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$

Fig. 5.

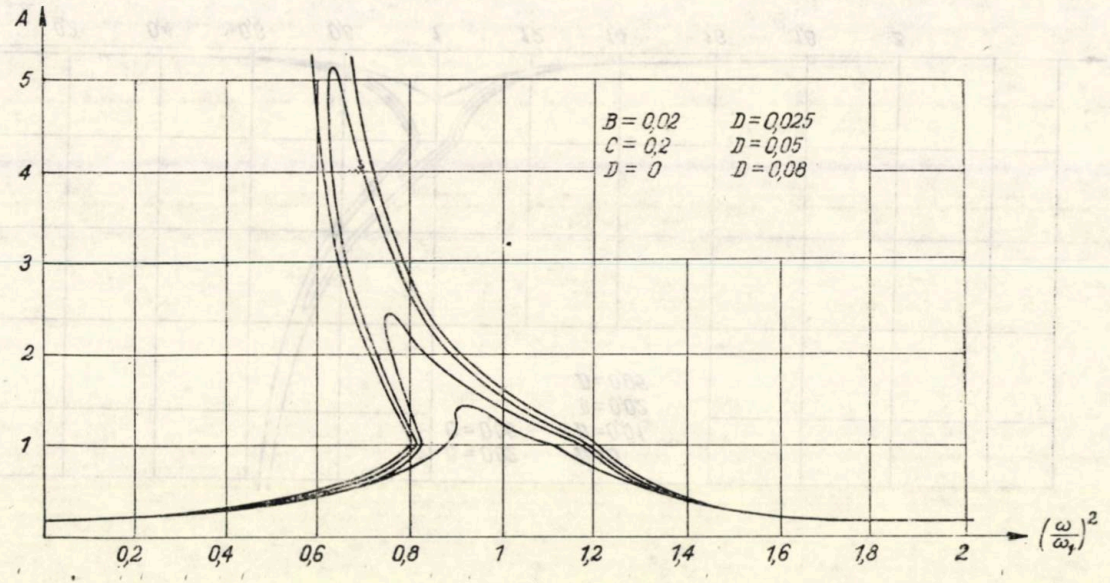

A
5
4
3
2
1
B = 0,02
C = 0,2
D = 0
D = 0,025
D = 0,05
D = 0,08
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$

Fig. 6.

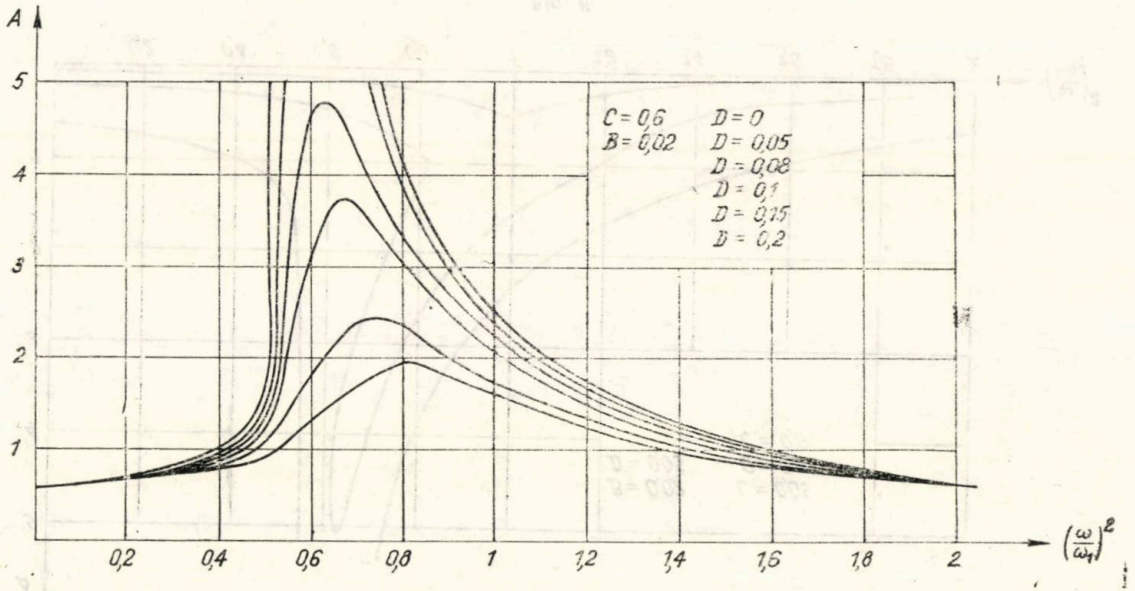

A
5
4
3
2
1
C = 0,6
B = 0,02
D = 0
D = 0,05
D = 0,08
D = 0,1
D = 0,15
D = 0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$

Fig. 7.

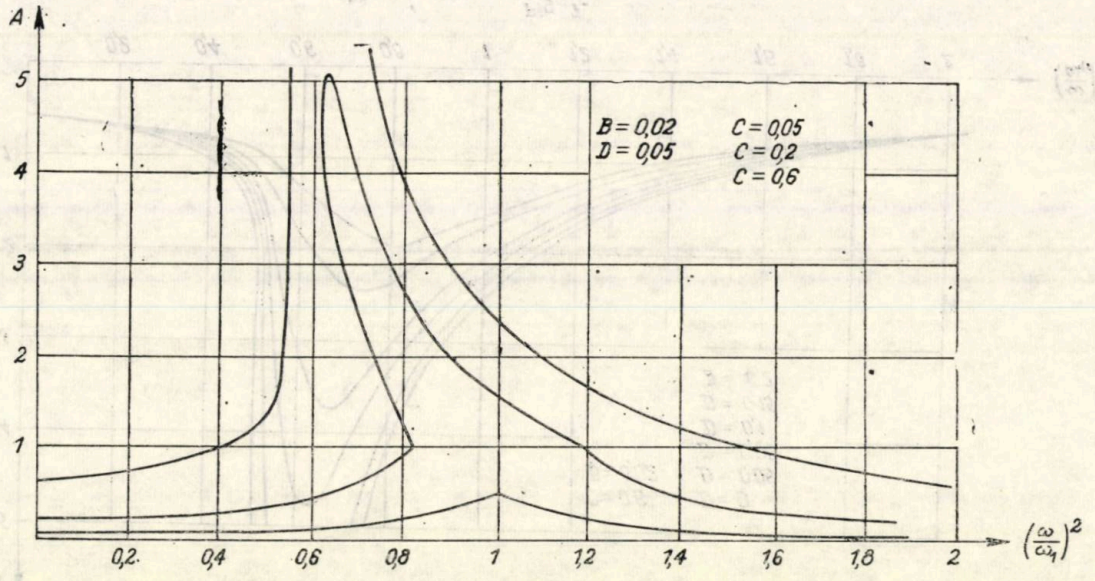

A
5
4
3
2
1
B = 0,02
D = 0,05
C = 0,05
C = 0,2
C = 0,6
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$

Fig. 8.

Cu aceste notații relația (14) devine :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{1-B}{\pi}\left[\frac{1}{A}\sqrt{1-\frac{1}{A^2}} - \arccos\frac{1}{A}\right] - 2D^2 + \tag{16}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 - 4D^2 - 4D^2\frac{1-B}{\pi}\left(\frac{1}{A}\sqrt{1-\frac{1}{A^2}} - \arccos\frac{1}{A}\right) + 4D^4}$$

Este ușor de remarcat că relația (16) este valabilă numai pentru $A > 1$.

Pentru $A < 1$, respectiv înaintea pierderii stabilității grinzii raportul $\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$ se calculează cu expresia binecunoscută

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 - 2D^2 + \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 - 4D^2 + 4D^4} \tag{17}$$

Notațiile din expresia (17) sînt identice cu cele folosite în relația (16).

Se vor stabili în continuare sub formă numerică relația care există între amplitudinea și frecvența acestor oscilații funcție de parametrii independenți (B, C, D) care intervin.

În acest scop se pot utiliza formulele (14) și (15), pe baza cărora se vor construi grafic relațiile căutate.

Efectuarea calculelor necesare construirii figurilor 3, 4, 5, 6, 7, 8 pentru diverse valori ale parametrilor adimensionali au fost făcute cu un calculator electronic (IBM) 360 și o parte din rezultate sînt date în tabelele 1 și 2.

Influența diverșilor parametrii asupra valorilor mărimilor căutate este diferită, efectul unora din acești parametri fiind neglijabil.

Astfel diferența între valorile raportului $\frac{\omega}{\omega_1}$, calculate pentru același C și D dar pentru B 0,02 și B 0,1, este maxim 2%. Acest lucru se poate observa și comparînd curbele din fig. 3 și 4 unde însă intervine pătratul raportului $\frac{\omega}{\omega_1}$.

În consecință parametrul B rămîne constant și egal cu 0,02 în trasarea diferitelor curbe.

Ceilalți parametrii C — încărcarea și D — amortizarea au o influență vizibilă asupra raportului $\frac{\omega}{\omega_1}$. Astfel $C=1$ duce la o vibrație care are loc numai pentru $A>1$, iar $C=0{,}05$ și $D=0{,}05$ greutatea vibrează numai în zona lui $A<1$ (fig. 5).

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Petre, A., Cosac, V.* — Vibrațiile verticale ale grinzilor pendulare luînd în considerare efectele de flambaj dinamic. Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 2/1969.

2. *Panovko* — Osnovîe prikladnoi teorii uprugih kolebanii.

3. *Bogoliubov-Mtropolski* — Asimptoticeskie metodî v teorii nelineinîh colebanii.

4. *Den Hartog* — Vibrații mecanice.

5. *A. I., Lurie, Cekmarev* — Vînujdenie kolebania v nelineinîh sisteme s haracterricescoi sostavlennoi iz dvuh priamo linienîh otrezcov.

Tabelul 1

A	ω/ω_1							
	$B = 0{,}02$, $C = 0{,}1$				$B = 0{,}1$, $C = 0{,}1$			
	$D = 0$		$D = 0{,}025$		$D = 0$		$D = 0{,}025$	
1,2	0,9357	1,0209	0,9435	1,0124	0,9375	1,0225	0,9453	1,0141
1,4	0,9178	0,9926	0,9271	0,9827	0,9217	0,9961	0,9310	0,9862
1,6	0,9001	0,9671	0,9110	0,9555	0,9059	0,9724	0,9169	0,9608
1,8	0,8845	0.9452	0,8973	0,9105	0,8919	0,9522	0,9049	0,9385
2,0	0,8709	0,9265	0,8861	0,8903	0,8798	0,9349	0,8954	0,9186
2,2	0,8591	0,9105	0,8785	0	0,8693	0,9201	0,8899	0,8989
2,4	0,8489	0,8966	0	0	0,8602	0,9074	0	0
2,6	0,8399	0,8845	0	0	0,8523	0,8963	0	0
2,8	0,8320	0,8739	0	0	0,8453	0,8865	0	0
3,0	0,8251	0,8645	0	0	0,8391	0,8779	0	0
3,2	0,8188	0,8562	0	0	0,8336	0,8703	0	0
3,4	0,8133	0,8487	0	0	0,8286	0,8634	0	0
3,6	0,8083	0,8419	0	0	0,8242	0,8572	0	0
3,8	0,8037	0,8358	0	0	0,8202	0,8517	0	0
4,0	0,7996	0,8303	0	0	0,8165	0,8466	0	0
4,2	0,7958	0,8252	0	0	0,8132	0,8420	0	0
4,4	0,7924	0,8205	0	0	0,8102	0,8377	0	0
4,6	0,7822	0,8163	0	0	0,8074	0,8339	0	0
4,8	0,7863	0,8123	0	0	0,8048	0,8303	0	0
5,0	0,7835	0,8087	0	0	0,8024	0,8269	0	0

Tabelul 2

A	ω/ω_1							
	$B = 0{,}02$ $C = 0{,}3$				$B = 0{,}1$, $C = 0{,}3$			
	$D = 0$		$D = 0{,}925$		$D = 0$		$D = 0{,}025$	
1,2	0,8419	1,0995	0,8441	1,0967	0,8439	1,1010	0,8461	1,0982
1,4	0,8364	1,0621	0,8389	1,0590	0,8406	1,0654	0,8431	1,0623
1,6	0,8278	1,0297	0,8306	1,0262	0,8340	1,0347	0,8369	1,0312
1,8	0,8192	1,0022	0,8224	0,9984	0,8273	1,0088	0,8305	1,0050
2,0	0,8114	0,9790	0,8149	0,9748	0,8210	0,9869	0,8245	0,9827
2,2	0,8044	0,9591	0,8082	0,9546	0,8154	0,9683	0,8192	0,9637
2,4	0,7983	0,9419	0,8024	0,9371	0,8103	0,9522	0,8145	0,9473
2,6	0,7928	0,9270	0,7973	0,9218	0,8059	0,9382	0,8104	0,9329
2,8	0,7879	0,7139	0,7927	0,9083	0,8019	0,9259	0,8068	0,9203
3,0	0,7836	0,9022	0,7888	0,8963	0,7984	0,9155	0,8036	0,9091
3,2	0,7797	0,8919	0,7852	0,8857	0,7952	0,9055	0,8008	0,8991
3,4	0,7763	0,8827	0,7821	0,8760	0,7924	0,8968	0,7984	0,8901
3,6	0,7731	0,8743	0,7794	0,8673	0,7898	0,8891	0,7962	0,8819
3,8	0,7703	0,8667	0,7769	0,8594	0,7874	0,8820	0,7942	0,8745
4,0	0,7677	0,8598	0,7747	0,8521	0,7853	0,8756	0,7925	0,8677
4,2	0,7653	0,8536	0,7727	0,8454	0,7834	0,8698	0,7910	0,8615
4,4	0,7631	0,8478	0,7709	0,8392	0,7816	0,8644	0,7896	0,8557
4,6	0,7611	0,8425	0,7693	0,8335	0,7800	0,8595	0 ,7884	0,8503
4,8	0,7593	0,8376	0,7679	0,8282	0,7785	0,8550	0,7874	0,8453
5,0	0,7576	0,8330	0,7667	0,8232	0,7771	0,8508	0,7865	0,840€

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

ORGANE DE MAȘINI

C.Z.: 621.833 : 539.3 : 621.81

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A COEFICIENTULUI DINAMIC LA ROȚILE DINȚATE CILINDRICE CU DINȚI DREPȚI *

TEODOR MLADINESCU

În lucrările [6, 7], s-a prezentat o metodă analitică de calcul a coeficientului dinamic la roțile dințate cilindrice cu dantura dreaptă, bazată pe studiul vibrațiilor acestor roți, excitate și întreținute de forța normală pe dinții în contact (variabilă în timp), amortizate de pelicula de lubrifiant dintre flancuri, cu considerarea variabilității forței normale pe perioada angrenării și a gradului de acoperire.

Prin stabilirea dependenței între forța normală variabilă în timp $P_n(t)$ și gradul de acoperire real ε a devenit posibilă determinarea cantitativă a influenței tuturor parametrilor de care depinde ε, asupra coeficientului dinamic, pentru orice caz concret, așa cum se observă din relațiile (1) și (2):

$$P_n(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon_t + \frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t} + \Delta}}{2}\right) P_n +$$

$$+ \sum_1^j \frac{P_n}{\pi j}\left\{ - \frac{1}{1 + \frac{1}{\left[1 - 2\frac{1}{\varepsilon_t + \frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\varepsilon_t} + \Delta}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_t + \frac{0{,}134}{\sqrt{p_p}}\sqrt{\frac{P_n}{c\varepsilon_t} + \Delta}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \times \right.$$

$$\left. x \times \sin 2\pi j\left(\varepsilon_t + \frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t} + \Delta} - 1\right) + \right.$$

* Lucrare susținută în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București, 1—3 noiembrie 1968.

$$1-2\frac{1}{1+\left[1-2\frac{1}{\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{}{2\pi j\left(\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_n}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}-1\right)}\times$$

$$\times\left[\cos 2\pi j\left(\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}-1\right)-1\right]\Bigg\}\cos\frac{\pi nz}{30}\,t+$$

$$+\sum_1^j\frac{P_n}{\pi j}\Bigg\{-1+\frac{1}{1+\left[1-2\frac{1}{\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_t-\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\left[1+\cos 2\pi j\left(\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}-1\right)\right]+$$

$$1-2\frac{1}{1+\left[1-2\frac{1}{\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{}{2\pi j\left(\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}-1\right)}\times$$

$$\times\sin 2\pi j\left(\varepsilon_t+\frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}}\sqrt{\frac{P_n}{c\,\varepsilon_t}+\Delta}-1\right)\Bigg\}\sin\frac{\pi nz}{30}\,t. \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dy}{dt}+p^2y=\frac{P_n(t)}{m} \qquad (2)$$

în care :

ε_t este gradul de acoperire teoretic

p_b — pasul de bază al danturii în mm

P_n — forţa normală de transmis pe un cm din lungimea dintelui (kgf/cm)

c — rigiditatea medie a perechii de dinţi în contact în $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}\,\mu\,\text{m}}$

Δ — eroarea pasului de bază în μm

j — numărul de ordine al coeficienţilor seriei Fourier în care s-a dezvoltat forţa $P_n(t)$

n — turaţia roţii conducătoare în rot/min.

z — numărul de dinţi ai roţii conducătoare (pinionului)

t — timpul (variabila independentă)

m — masa redusă a roţilor dinţate : $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$2n = \frac{\alpha}{m}$, constanta de amortizare vîscoasă

p — , pulsaţia vibraţiilor proprii a sistemului oscilant.

Rezolvarea ecuaţiei (2) a mişcării vibratorii a dus la determinarea deformaţiei y a dinţilor şi apoi a forţei dinamice pentru fiecare grad de acoperire real ε şi raport $\frac{\omega}{p}$.

Cu ajutorul expresiei cunoscute a coeficientului dinamic :

$$C_{din} = \frac{P_{st} + P_{din}}{P_{st}} \tag{3}$$

s-au calculat valorile acestuia.

Determinarea experimentală a coeficientului dinamic la roţile dinţate cilindrice cu dantura dreaptă, din prezenta lucrare, are ca scop verificarea rezultatelor obţinute pe cale analitică.

Pentru aceasta s-a folosit :

— Un stand construit pe principiul conturului închis, cu încărcare prin cuplaj de torsionare a arborilor, avînd distanţa dintre axe $A = 105$ mm, echipat cu aparatura de măsurat anexă, conform figurii 1.

— Mărci tensometrice de tip Hottinger cu baza de 3 mm şi rezistenţa de 120 Ω, lipite pe feţele frontale ale dinţilor la bază şi legate la contactorul rotativ prin conductori trecuţi prin arbore (fig. 2).

Roţile dinţate încercate au fost din OLC 45 îmbunătăţit, cu lăţimea danturii de 1 cm, modulul $m\,n = 5$ mm şi 3 mm, flancurile dinţilor recti-

ficate sau şevăruite, clasa de precizie 5, respectiv 6. Raportul de transmitere a fost $i=1$ şi $i=1{,}8$.

La fixarea parametrilor geometrici s-a urmărit obţinerea unui grad de acoperire teoretic cît mai apropiat de valoarea 1,5 la roţile cu modulul $m=5$ mm şi în jurul valorii de 1,7 la roţile cu $m=3$ mm.

În timpul încercărilor s-a variat încărcarea şi turaţia.

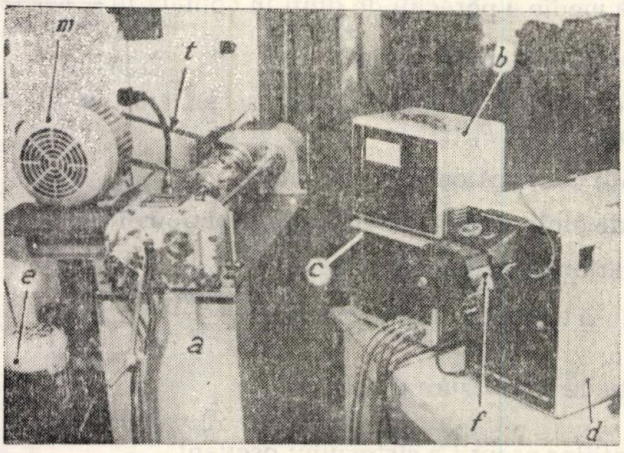


Fig. 1.

a — Standul
b — puntea tensimetrică T.P.W.
c — cutia de comutare T.P.W.
d — oscilograf catodic Orion Tr. 4011
f — aparat de filmat Orion
e — contactor rotativ Hottinger
m — motor electric asincron
t — transmisie prin curele trapezoidale
p — motorul pompei de ulei

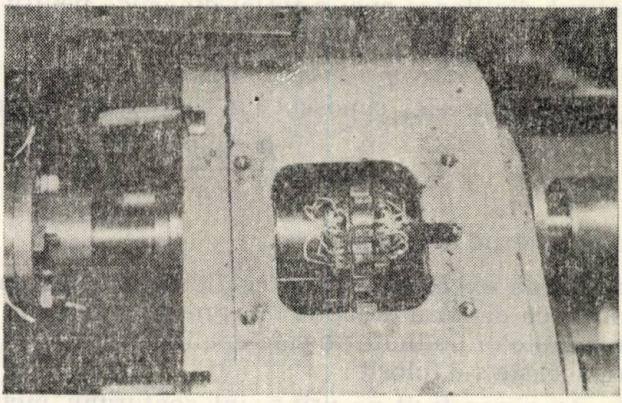


Fig. 2.

Metodica încercărilor

— *Determinarea încărcării statice* a fost dedusă din momentul de răsucire al arborilor măsurat pe cale tensometrică, pentru 3 încărcări diferite la fiecare pereche de roţi încercate.

— *Etalonarea înregistrărilor* oscilografului s-a făcut prin înregistrarea pe film, a oscilogramei deformațiilor specifice ale dinților, corespunzătoare fiecărei încărcări statice (fig. 3).

Deformația specifică maximă $\varepsilon_{st\cdot max}$ pentru fiecare încărcare statică s-a obținut în punctul S_1 (fig. 3 a, 4 a și 5 a).

— *Înregistrarea deformațiilor specifice* totale $(\varepsilon_{st} + \varepsilon_{din\ max})$ s-a obținut prin fotografierea oscilogramei acestor deformații în timpul funcționării standului, pentru trei turații diferite: 1150 rot/min; 1780 rot/min și 3050 rot/min, la fiecare grad de acoperire real, respectiv încărcare statică (fig. 3 b, 4 b și 5 b).

Valorile maxime corespund punctelor în care amplitudinea forței dinamice este maximă.

În scopul eliminării erorilor sistematice de montaj și ale aparatelor, înregistrările deformațiilor specifice totale s-au făcut pe același film imediat după etalonarea statică respectivă.

— *Determinarea mărimilor de calcul* corespunzătoare *condițiilor experienței.*

Gradele de acoperire, reale ε s-au calculat cu formula dată în lucrarea [9], obținîndu-se :

— Pentru roțile cu modulul $m = 5$ mm ; $Z_1 = Z_2 = 21$.

Tabelul 1

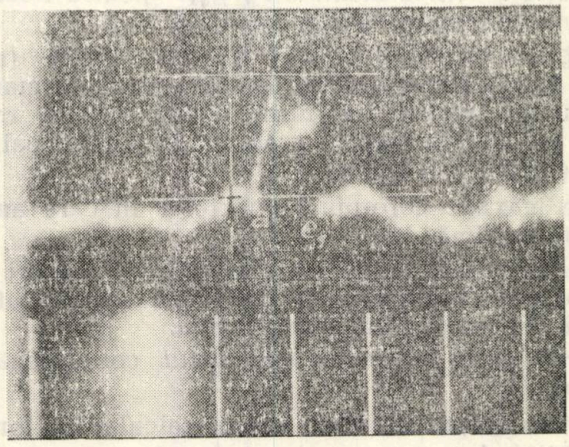
ε_t	p_b mm	Δ μm	P_n kgf/cm	ε
1,556	14,76	+8	170	1,7
1,556	14,76	+8	340	1,737
1,556	14,76	+8	510	1,765

— Pentru roțile cu modulul $m = 3$ mm ; $Z_1 = 25$; $Z_2 = 45$.

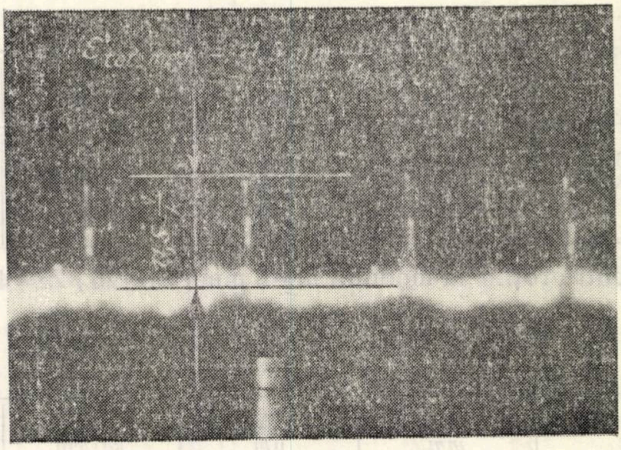
Tabelul 2

ε_t	p_b mm	Δ μm	P_n kgf/cm	ε
1,688	8,8575	+11	340	1,928

— *Pulsația vibrațiilor proprii p* a sistemului oscilant s-a determinat prin calcul, cunoscînd rigiditatea dinților [9] și masa roților dințate (prin cîntărire). Turațiile corespunzătoare acestei pulsații au fost cuprinse între 5490—5520 rot/min, la roțile cu modulul de 5 mm și de aprox. 6100 rot/min. la cele cu modulul de 3 cm.

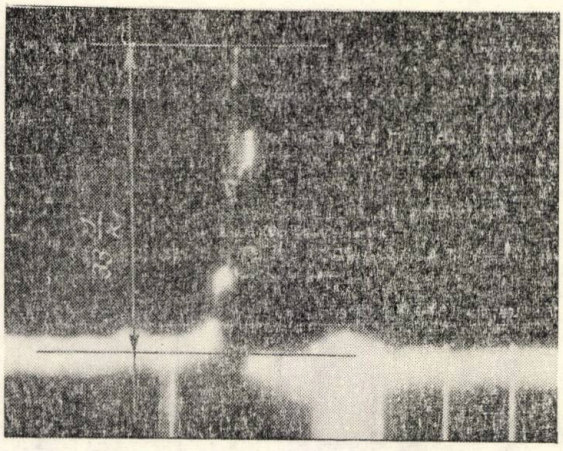


a)

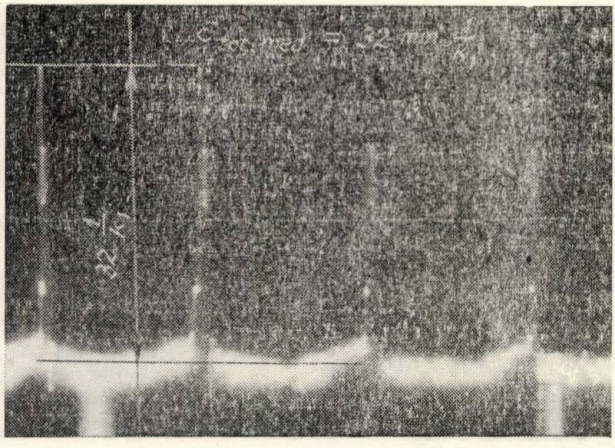


b)

Fig. 3.

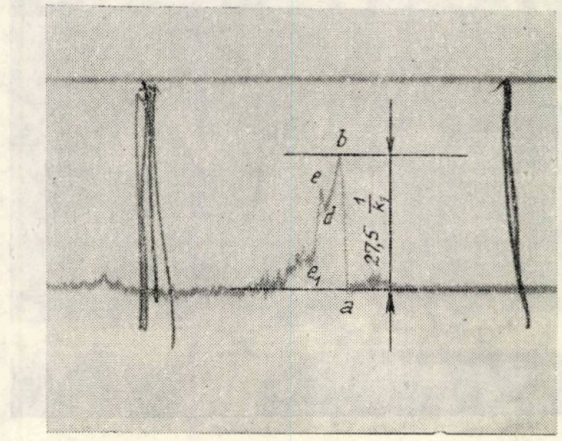


a)

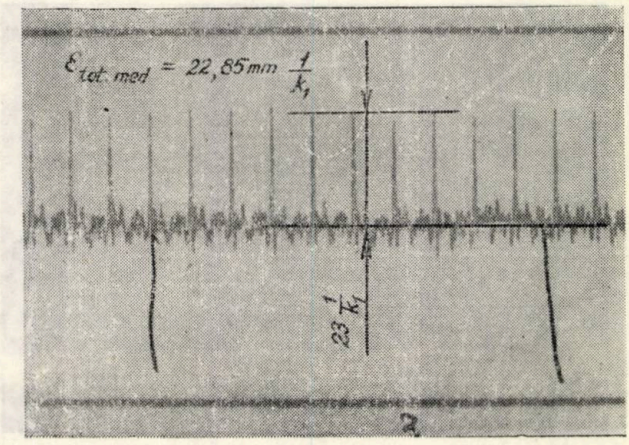


b)

Fig. 4.


b
e
d
$\frac{1}{k_1}$
27,5
e_1
a

a)


$\varepsilon_{tot.\,med} = 22{,}85\,mm\,\frac{1}{k_1}$
$23\,\frac{1}{k_1}$

b)

Fig. 5.

— *Coeficienţii dinamici,* calculaţi după metoda din lucrările 6, 7 pentru gradele de acoperire reale din tabelele de mai sus şi la rapoartele $\frac{\omega}{p}$ corespunzătoare turaţiilor la care s-au efectuat experienţele sînt conţinuţi în tabelul 3.

Tabelul 3

m mm	ε	$\frac{\omega}{p}$	C_{din}	m mm	ε	$\frac{\omega}{p}$	C_{din}
5	1,7	1,	2,515	5	1,765	1	2,297
		0,55	1,735			0,55	1,756
		0,33	1,56			0,33	1,59
		0,20	1,47			0,20	1,562
5	1,737	1	2,422	3	1.928	1	1,551
		0,55	1,736			0,5	1,445
		0,50	1,773			0,3	1,302
		0,33	1,637				
		0,25	1,571			0,2	1,258
		0,20	1,521				

Interpretarea rezultatelor

Valoarea coeficienţilor dinamici obţinuţi experimental rezultînd din relaţia :

$$C_{din} = \frac{P_{st} + P_{din}}{P_{st}} = \frac{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{din\,max}}{\varepsilon_{st}} \qquad (4)$$

a implicat determinarea deformaţiei specifice ε_{st} în poziţia de maximum a forţei dinamice obţinută pe graficul de compunere a armonicelor vibraţiilor.

Pentru control s-a construit pe bază de calcul curbele de variaţie a deformaţiilor statice absolute ale dinţilor pe lungimea segmentului de angrenare (fig. 6).

Constatarea că între modul de variaţie a deformaţiilor specifice statice (fig. 3 a şi 5 a) şi a deformaţiilor absolute corespunzătoare (fig. 6) există diferenţe foarte mici (0,1...5%) în punctele caracteristice, a dus la concluzia, că pentru poziţia de maximum a forţei dinamice precis plasată pe linia de angrenare deformaţia specifică statică poate fi calculată cu relaţii de forma [7] :

$$\varepsilon_{st} = q_2 P_n h^2 \qquad (5)$$

sau

$$\varepsilon_{st} = q_2 K_x P_n h_x^2 \tag{6}$$

după cum, poziția în care are loc forța dinamică maximă se află în zona angrenării unipare, sau a dublei angrenări.

În aceste relații valoarea factorului de proporționalitate q_2, se obține din relația deformației specifice statice maxime înregistrate:

$$q_2 = \frac{\varepsilon_{st \cdot max}}{K P_n h_a^2} \tag{7}$$

Valorile înălțimilor h, h_x a punctelor de contact ale dinților angrenați, față de bază, în pozițiile considerate, s-au obținut pe diagrame de forma din fig. 7, executate la scară.

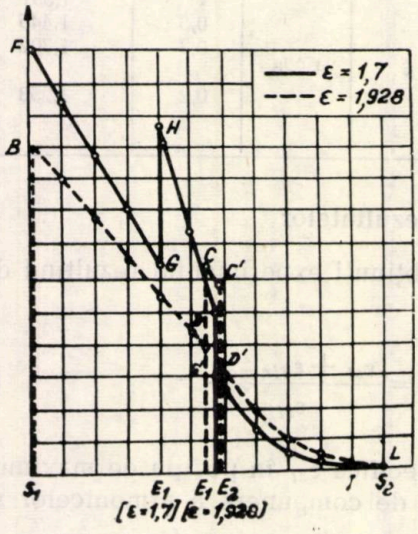


Fig. 6.

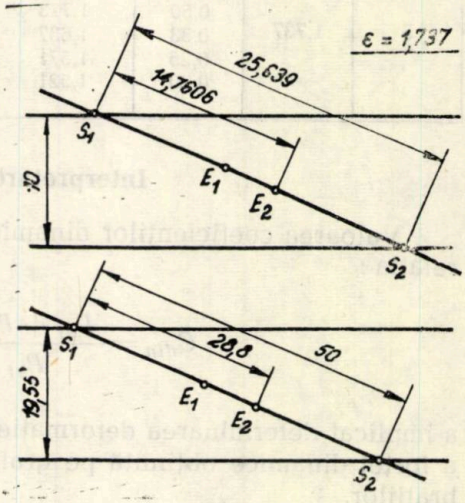


Fig. 7.

Coeficientul de repartiție a încărcării statice K_x s-a obținut din relații geometrice simple cunoscînd pe K și $S_1E_1 = p_b$ (ε—1). (Fig. 8)

Pentru deformațiile specifice totale $(\varepsilon_{st} + \varepsilon_{din \cdot max})$ s-a considerat valoarea medie aritmetică a deformațiilor înregistrate, cu eliminarea acelora la care abaterea a depășit triplul erorii medii patratice, conform teoriei erorilor.

Tabelul 4 conține valorile coeficienților dinamici experimentali, alături de valorile calculate.

Tabelul 4

Gradul de acoperire real ε	$\frac{\omega}{p}$	C_{din} experim.	C_{din} calculat	Abateri %
1,7 dinți șevăruiți	0,2	1,46	1,47	— 0,69
	0,33	1,64	1,56	+ 5,1
	0,55	1,545	1,735	—12,2
1,7 dinți rectificați	0,2	1,61	1,47	+ 8,7
	0,33	1,649	1,56	+ 5,4
	0,55	1,60	1,735	— 8,4
1,737 dințe șevăruiți	0,2	1,72	1,52	+11,6
	0,33	1,83	1,637	+10,5
	0,55	1,72	1,72	0
1,765 dinți rectificați	0,2	1,57	1,562	+ 0,5
	0,33	1,74	1,59	+ 9,45
	0,55	1,975	1,756	+11,1
1,928 dinți șevăruiți	0,2	1,24	1,258	— 1,45
	0,3	1,285	1,302	— 1,3
	0,5	1,630	1,445	+11,85

Observațiuni : Abaterile au fost raportate la valorile experimentale. Se constată că valorile coeficienților dinamici calculați sînt în marea majoritate a cazurilor studiate destul de apropiate de valorile din experiențe, deși punctele considerate se află înzonarezonanțelorsecundare.

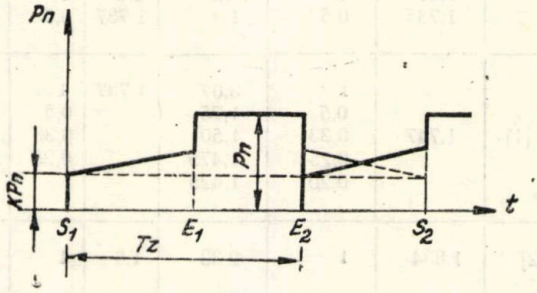


Fig. 8.

Diferențele dintre valorile coeficientului dinamic obținute experimental în general mai mari față de cele calculate, se explică și prin influența unor factori necuprinși în formulele de calcul, cum ar fi de exemplu : vibrația obadei roților, a carcasei, a arborilor, a perechii precedente de dinți.

Aceiași situație se constată și în lucrarea cea mai recent apărută [1], unde curba valorilor experimentale ale coeficientului dinamic este în marea majoritate a traseului situată deasupra curbei valorilor calculate.

O altă cauză a diferențelor dintre rezultatele obținute prin calcul și cele experimentale, o constituie erorile inerente calculului grafic al amplitudinilor forțelor dinamice, erorile accidentale din funcționarea instalației și de înregistrare a aparatelor, ca și acelea de măsurare pe fotografiile reproduse după filmele înregistrărilor.

Comparația coeficienților dinamici calculați după metoda propusă în lucrare, cu valori găsite experimental de alți cercetători, rezultă din tabelul 5

Tabelul 5

Autorul și lucrarea	ε	$\frac{\omega}{p}$	C_{din} experim.	În lucrare			Abateri %
				ε	ω/p	C_{din} calculat	
A. I. Petrusevici [11]	1,603	0,5 0,33	1,90 1,60	1,6	0,5 0,33	1,645 1,575	+13,45 + 1,56
G. Niemann [9] și a	1,97	0,187 0,228	1,24	1,95	0,187 0,228	1,221 1,234	+ 1,53 + 0,48
		0,374 0,456	1,44		0,374 0,456	1,25 1,28	+13,2 +11,1
Firma Bristol [2]	1,61 1,735	1 0,5	2,5 1,4	1,6 1,737	1 0,5	2,7 1,773	— 8 —26
G. Bollinger-Bosch [1]	1,747	1 0,5 0,33 0,25 0,20	3,07 1,75 1,50 1,475 1,425	1,737	1 0,5 0,33 0,25	2,422 1,773 1,63 1,57 1,52	+21 — 1,3 — 8,6 — 6,4 — 6,7
Uragava-Tatsuo [12]	1,834	1	2,33	1,8	1	2,086	—10,5

Se constată abateri în general de același ordin de mărime ca și în experiențele proprii. Diferențele mai mari au avut loc la raportul $\frac{\omega}{p} = 1$ — (rezonanța principală) în cazul lucrării [1] și la raportul $\frac{\omega}{p} = 0{,}5$ (considerat în lucrarea [2] tot ca rezonanta principală) — În

zona de rezonanță, dată fiind complexitatea fenomenului, diferențele mai mari sînt justificate.

— *Verificarea rezultatelor proprii s-a făcut și prin comparația abaterilor între rezultatele calculelor și ale experiențelor la alți cercetători.*

1. A. I. Petrusevici [11] arată că raportul dintre valorile forțelor dinamice calculate și cele experimentale, *cu eliminarea cazurilor de rezonanță*, variază între 1 și 2, ajungînd pentru viteze mici chiar la 3,065. Totuși raportul $\frac{P_{st} + P_{din}\ \text{calculat}}{P_{st} + P_{din}\ \text{exper.}}$, se menține în limitele acceptabile (1,10...1,15).

2. L. A. Kudriavtev [5] verificînd experimentul rezultatelor calculelor lui A. Kovalev [4], constată diferențe foarte mari (care depășesc 200%) justificate prin neglijarea în calcule a amortizării lubrifiantului.

3. Utagava Masahiro și H. Tatsuo [12] au găsit în zona de rezonanță diferențe „considerabile" între valorile calculate și cele experimentale, explicate tot prin neglijarea amortizării în calcule.

4. La G. Bollinger și M. Bosch [1] se constată diferențe între 0 și 22%. Diferența maximă corespunde turației de 5250 rot/min. adică în zona de rezonanță. În rest, așa cum remarcă și autorii diferențele sînt mici (în general sub 10%).

În ceea ce privește aspectul curbelor de variație a coeficientului dinamic cu turația (din lucrare), este asemănător cu acela din lucrările [1, 2, 10, 5, 13].

Din cele de mai sus, rezultă că atît ca valori absolute, ca diferențe între valorile calculate și cele experimentale, cît și ca formă de variație a coeficientului dinamic funcție de turație, rezultatele pe care le-am obținut se încadrează în limitele găsite experimental de alți cercetători, în condiții similare.

Concluzie

Valorile coeficienților dinamici abținute prin calcul, pentru diferite grade de acoperire reale ε, fiind mulțumitor de apropiate de acelea determinate prin experiențe proprii, sau găsite de cercetători străini, confirmă justețea modului de punere și rezolvare a problemei.

În același timp sub aspect aplicativ, oferă proiectantului posibilitatea determinării coeficientului dinamic pe baze științifice și folosirea lui pentru verificări după predimensionarea angrenajului pe baza uneia din metodele cunoscute.

Catedra de organe de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bollinger, I. G. u. M. Bosch* — Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnradgetriebe. Ind. Anz. Nr. 19—1964.

2. *Bristol Siddeley Engines* — Dynamic lood on gear teath-Mach-Design-Enging — Nr. 3, 1963.

3. *Buzdugan, Gh. ş.a.* — Tensometria electrică rezistivă — Ed. Tehnică 1966.

4. *Kovalev, A. N.* — O dinamiceskoi nagruzke Zubceatovo Zateplenia. Izvestia A.N. C.C.C.P. — O T N, Nr. 2 — 1960.

5. *Kudriavţev, L. A.* — Vlianie peremennoi jestkosti zatepliainşihsia zubev na kolebania i şuma priamozubov peredaci. Stanki i Instrument, Nr. 10 — 1962.

6. *Mladinescu, T.* — Calculul coeficientului dinamic la roţi dinţate cilindrice cu dinţi drepţi. Buletinul Inst. Politehnic Bucureşti Nr. 3 — 1966.

7. *Mladinescu, T.* — Dependenţa coeficientului dinamic de gradul de acoperire la roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi.

8. *Mocanu, R. D.* — *Buga, M.* — Determinarea experimentală a eforturilor unitare — Editura Transporturilor 1966.

9. *Niemann G. u. H. Rettig* — Dynamische zahnkräfte — V D I-Z nr. 3 u. 4, 1957.

10. *Niemann G.* — Maschinenelemente Bd. II — Springer Verlag — Berlin 1961.

11. *Petrusevici, I. A. şi alţii* — Dinamiceskie nagruzki v zubceatîh peredaceah s priamozubîmi Kolesami Izd. A N CCCP — 1956.

12. *Utagava Masahiro, Herado Tatsuo* — Influence of the presure angle erora and compareson between the reduction gear and the speedup gears. Bul. I.S.M.E. Nr. 16 — 1961.

13. *Rettig, H.* — Zahnkräfte und Schwingungen in stirnrad getrieben — Konstructions — Heft 2 — 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C.Z.: 621.431 : 662.61.518

DETERMINAREA LEGII DE ARDERE A UNUI MOTOR CU ARDERE INTERNĂ DUPĂ DIAGRAMA INDICATĂ, PRIN INTERMEDIUL CALCULATOARELOR NUMERICE

N. APOSTOLESCU, B. GRÜNWALD, D. TARAZA

Perfecţionarea procesului de ardere dintr-un motor dat se realizează prin studierea legii de ardere şi modificarea sa adecvată, ceea ce presupune reprezentarea ei. Punctul de plecare pentru ridicarea legii de ardere îl constituie diagrama indicată, care se obţine pe cale experimentală. Ridicarea legii de ardere reprezintă o operaţie laborioasă şi adeseori nesigură din cauza ipotezelor simplificatoare care se fac. Ipotezele admise pentru prelucrarea diagramei indicate în perioada arderii se referă la următoarele fenomene implicate în procesul de ardere: discontinuităţile termice ale amestecului din cilindru, schimbul de căldură, disocierea gazelor şi vaporizarea combustibilului. Astfel, se neglijează gradienţii de temperatură din camera de ardere, efectul disocierii, efectul vaporizării combustibilului — în cazul injecţiei de combustibil în cilindru, în timpul arderii — şi eventual schimbul de căldură dintre fluidul motor şi perete — din care cauză legea de ardere obţinută se numeşte legea de degajare a căldurii utile, deoarece reprezintă fracţiunea din căldura degajată care se transformă în lucru mecanic şi energie internă.

În cele ce urmează se prezintă o metodă de prelucrare a diagramei indicate care nu apelează la ipotezele simplificatorii amintite.

Ecuaţia diferenţială de bilanţ energetic al procesului de ardere are forma:

$$\nu_c Q_{vc} d\xi = dU + A\,dL + dQ_p + dQ_{vd} + dQ_{vap}, \qquad (1)$$

unde: ν_c [kmoli/ciclu] este doza de combustibil pe ciclu; Q_{vc} — căldura molară de reacţie a combustibilului la volum constant; ξ — fracţiunea din căldura de reacţie degajată din momentul iniţial al arderii pînă în momentul considerat *) U — energia internă a amestecului de

*) Variaţia coeficientului ξ de degajare a căldurii de reacţie în raport cu timpul sau cu unghiul RAC α, reprezintă legea de degajare a căldurii sau legea de ardere.

gaze ; AL — echivalentul caloric al lucrului mecanic ; Q_p — căldura schimbată de amestecul de gaze cu pereții ; Q_{vd} — căldura de disociere la volum constant ; Q_{vap} — căldura de vaporizare a combustibilului, în cazul injectării combustibilului în amestec.

Ecuația diferențială (1), poate fi rezolvată cu ajutorul metodelor analizei numerice [6], [7]. Utilizarea unor asemenea metode implică un volum de lucru care nu face interesantă aplicarea lor decît în cazul folosirii calculatoarelor numerice. De aceea autorii au căutat să exprime ecuația diferențială de bilanț energetic într-o formă convenabilă pentru programarea rezolvării ei pe mașină. S-a apreciat, în concordanță și cu alte lucrări similare [4], [5], că o metodă de rezolvare de tip Runge-Kutta de ordinul II satisface atît cerințele unor erori minime cît și posibilitatea unei programări simple.

Într-o lucrare precedentă [3] autorii au stabilit o metodă de calcul a energiilor interne, ținînd seama de gradienții de temperatură din amestecul de gaze în timpul arderii și au exprimat energia internă elementară într-o formă convenabilă programării calculului pe mașini numerice. Astfel, s-a obținut :

$$dU = U'_{\xi}(\xi, \alpha)\, d\xi + U'_{\alpha}(\xi, \alpha)\, d\alpha, \tag{2}$$

derivatele parțiale ale energiilor interne fiind de forma $U'_{\xi} = (g_3 + g_5 + g_2 g_6)$, $U_{\alpha} = (g_4 + g_1 g_6)$, funcțiunile $g_1 \ldots g_6$ fiind precizate în lucrarea amintită.

În continuare se stabilesc expresiile convenabile pentru programare ale celorlalți termeni din membrul drept al ecuației (1) și se precizează metoda de rezolvare a ecuației diferențiale.

Lucrul mecanic elementar se calculează cu ușurință fiind dat de legea de variație a presiunii $p(\alpha)$, dimensiunile fundamentale ale motorului *) și caracteristicile cinematice ale mecanismului motor **). Astfel,

$$A\, dL = A\, p\, dV = A\, p\, V'\, d\alpha, \tag{3}$$

unde V' este derivata volumului V în raport cu α. Volumul V se exprimă cu ajutorul relației care precizează mărimea cursei pistonului x_P la un moment dat : $V = V_c + (\pi D^2/4).x_P$, unde V_c este volumul camerei de ardere, iar $x_P = S\,[(1-\cos\alpha) + \Lambda\,(1-\cos 2\alpha)/4]/2$, adică

$$V = 0{,}5\, V_S\, \sigma_{\alpha}, \tag{4}$$

și

$$V' = 0{,}5\, V_S\, \sigma'_{\alpha}, \tag{5}$$

unde σ_{α}, σ'_{α} sînt funcțiuni cinematice definite în anexa I. Cu relația (5), expresia lucrului mecanic elementar (3) devine :

$$A\, dL = 0{,}5\, A\, p\, V_S\, \sigma'_{\alpha}\, d\alpha,$$

*) D — alezajul cilindrului și S — cursa pistonului

**) Λ — raportul dintre raza manetonului și lungimea bielei.

sau, într-o formă concentrată,

$$A\,dL = g_7\,d\alpha, \tag{6}$$

g_7 fiind definit în anexa II *).

Cantitatea elementară de căldură schimbată de fluidul motor cu pereții se exprimă în forma generală

$$d\,Q_p = \alpha_c\; A_t\,\Delta T\,d\tau, \tag{7}$$

unde α_c este coeficientul de convecție, A_t — suprafața instantanee totală de schimb de căldură, ΔT — diferența instantanee de temperatură dintre fluidul motor și perete, τ — timpul.

Într-o lucrare anterioară [1] autorii au stabilit o expresie pentru α_c elaborînd un model fizic nou al transferului de căldură din cilindrul motorului. Considerînd o cameră de ardere fără praguri de turbulență și neglijînd influența mișcării decelerate a pistonului asupra turbulenței, rezultă

$$\alpha_c = C_a\, n^{0,8} \left(\frac{\eta_v}{A_L^{SA}}\right)^{0,9} V^{-0,1}\, p^{0,8}\, T^{-0,67}, \tag{8}$$

unde n este turația, η_v — coeficientul de umplere, A_L^{SA} — secțiunea litrică a supapei de admisiune, T — temperatura medie a gazelor, C_a — constantă de proporționalitate **), care se determină pe cale experimentală.

În calculul coeficientului α_c, se introduce temperatura medie determinată din ecuația de stare, deoarece se apreciază că neomogenitatea termică a amestecului de gaze, care apare în timpul arderii, nu afectează transferul global de căldură.

În adevăr, schimbul local de căldură ar putea înregistra variații, din cauza contactului dintre perete și elementele de volum reci sau fierbinți. Datorită însă nivelului înalt al inerției termice a peretelui, precum și a alternanței rapide a elementelor de volum de temperaturi diferite pe suprafața peretelui, transferul de căldură nu este supus fluctuațiilor instantanee ale temperaturii locale. Aceste aspecte arată că pentru calculul transferului de căldură este ilustrativă numai temperatura medie a amestecului.

Un aspect particular al schimbului de căldură apare la motorul cu aprindere prin scînteie, în perioada propagării flăcării, cînd amestecul inițial este distinct fizic de gazele arse. În acest caz, se pot presupune în camera de ardere două zone distincte de temperatură, cărora le corespund coeficienți de convecție și viteze diferite de transfer de căldură. Dat fiind durata redusă a propagării flăcării, și în acest caz iner-

*) Pentru o prezentare unitară a metodei de calcul, se ține seama de notațiile utilizate în lucrarea [3], care intervin în ecuația (2).

**) $C_a \simeq 0{,}136$, dacă celelalte mărimi sînt exprimate în : n [rot/s], A_L^{SA} [m^2/m^3], V [m^3], p [kgf/m^2], T [°K], α_c [kcal/m^2 h grd].

ţia termică contribue la uniformizarea temperaturii peretelui. Considerarea în această perioadă, a transferului de căldură cu coeficienţi de convecţie diferiţi apare ca lipsită de interes practic, atît pentru faptul că nu măreşte gradul de precizie a calculelor, cît şi din imposibilitatea organizării unor determinări experimentale adecvate.

Substituind în relaţia (8) temperatura T din ecuaţia de stare, $T=pV/\nu_{am}R$, unde ν_{am} este numărul de moli de gaze, iar R — constanta generală a gazelor perfecte, se obţine

$$\alpha_c = C_a\, n^{0,8} \left(\frac{\eta_v}{A_L^{SA}}\right)^{0,9} (\nu_{am}\, R)^{0,67}\, V^{-0,77}\, p^{0,13}\,. \tag{9}$$

Substituind relaţia (9) în relaţia (7) şi ţinînd seama de corelaţia dintre unghiul RAC şi timp : $d\tau = d\alpha/21.600\ n$, rezultă

$$d\,Q_p = C_a\, n^{0,8} \left(\frac{\eta_v}{A_L^{SA}}\right)^{0,9} (\nu_{am}\, R)^{0,67}\, V^{-0,77}\, p^{0,13}\,\cdot$$

$$\cdot\, A_{ch}\left(\frac{p\,V}{\nu_{am}\,R} - T_{ch}\right) + A_\alpha\left(\frac{p\,V}{\nu_{am}\,R} - T_{cl}\right) + A_p\left(\frac{p\,V}{\nu_{am}\,R} - T_p\right)\frac{d\,\alpha}{21.600\,n} \tag{10}$$

unde A_{ch}, A_α, A_p sînt, în ordine, ariile suprafeţelor chiulasei, cilindrului şi pistonului, iar T_{ch}, T_{cl} şi T_p sînt temperaturile medii, corespunzătoare organelor respective. Aria suprafeţei instantanee a cilindrului are expresia $A_\alpha = 2\,A_p\,\psi\sigma_\alpha$ unde $\psi = S/D$ iar funcţia cinematică σ_α este definită în Anexa I.

După transformări simple *) se obţine expresia finală pentru schimbul elementar de căldură

$$d\,Q_p = I_a\,(p\,J\,\sigma_{a\alpha} - T_{cp}\,\sigma_{b\alpha})\,p^{0,13}\,d\,\alpha\,, \tag{11}$$

unde

$$I_a = \frac{1}{10.800}\, n^{-0,20}\, C_a \left(\frac{\eta_v}{A_L^{SA}}\right)^{0,9} A_p\,(\nu_{am}\,R)^{-0,1}\,J^{-0,77},$$

$$J = \frac{0,5\,V_S}{\nu_{am}\,R}\,; \qquad \overline{T}_{cp} = \frac{T_{ch} + T_p}{2}\,,$$

iar $\sigma_{a\alpha}$ şi $\sigma_{b\alpha}$ sînt precizate în anexa I.

Expresia (11) se exprimă în forma concentrată

$$d\,Q_p = g_8\,d\,\alpha\,, \tag{12}$$

funcţiunea g_8 fiind definită în anexa II.

Căldura de disociere se determină pe baza căldurii de formare a produselor de disociere şi a numărului de moli de substanţe disociate.

*) Pentru simplificare se presupune $A_p = A_{ch}$

Notînd cu Q_{vCO} și Q_{vOH} căldurile de formare corespunzătoare celor două echilibre care se iau în considerare [3], căldura elementară de disociere va fi

$$dQ_{vd} = Q_{vCO}\, d\nu_{ga\alpha}^{CO} + Q_{vOH}\, d\nu_{ga\alpha}^{OH}, \tag{13}$$

unde $\nu_{ga\alpha}^{CO}$ și $\nu_{ga\alpha}^{OH}$ sînt cantitățile molare instantanee de CO și OH la echilibru chimic.

Pentru calculul echilibrelor chimice se utilizează ecuațiile [2]

$$\frac{\xi \nu_{ga}^{CO_2} - \nu_{ga\alpha}^{CO}}{\nu_{ga\alpha}^{CO}\,(\xi \nu_{ga}^{O_2} + 0{,}5\,\nu_{ga\alpha}^{CO})^{1/2}} = K_{pCO}\sqrt{\frac{p}{\xi \nu_{ga}}}$$

$$\frac{\xi \nu_{ga}^{H_2O} - \nu_{ga\alpha}^{OH}}{\nu_{ga\alpha}^{OH}(0{,}5\ \nu_{ga\alpha}^{OH})^{1/2}} = K_{pOH}\sqrt{\frac{p}{\xi \nu_{ga}}}, \tag{14}$$

unde $\nu_{ga}^{CO_2}$ și $\nu_{ga}^{H_2O}$ sînt cantitățile molare de produse de ardere rezultate din ecuațiile stoichiometrice, iar K_{pCO}, K_{pOH} constantele de echilibru.

Ecuațiile (14) se rezolvă în funcție de $\nu_{ga\alpha}^{CO}$, respectiv $\nu_{ga\alpha}^{OH}$.

$$(\nu_{ga\alpha}^{CO})^3 + \varphi_3^{CO}(\nu_{ga\alpha}^{CO})^2 + \varphi_2^{CO}\nu_{ga\alpha}^{CO} + \varphi_1^{CO} = 0, \tag{15}$$

$$(\nu_{ga\alpha}^{OH})^3 + \varphi_3^{OH}(\nu_{ga\alpha}^{OH})^2 + \varphi_2^{OH}\nu_{ga\alpha}^{OH} + \varphi_1^{OH} = 0, \tag{16}$$

funcțiile $\varphi_1 \ldots \varphi_3$ fiind precizate în anexa III.

Cantitățile de produse formate se determină cu ecuațiile (15) și (16). Se observă că variația elementară dQ_{vd} este pozitivă pe intervalul în care temperatura crește (produsele arderii disociază) și negativă pe intervalul în care temperatura scade (produsele disocierii resociază).

Se admite că fenomenul de disociere devine apreciabil atunci cînd căldura de disociere reprezintă mai mult de 1% din căldura de reacție a combustibilului, ceea ce corespunde în general la temperaturi mai mari de 2000°K.

Relația (13) trebuie exprimată într-o formă convenabilă pentru calcul. În acest scop, se poate admite că pe intervale mici, gradul de disociere rămîne invariabil. Această ipoteză se exprimă analitic astfel:

$$d\nu_{ga\alpha}^{CO} = \frac{\Delta \nu_{ga\alpha}^{CO}}{\Delta \alpha}\, d\alpha, \tag{17}$$

$$d\nu_{ga\alpha}^{OH} = \frac{\Delta \nu_{ga\alpha}^{OH}}{\Delta \alpha}\, d\alpha. \tag{18}$$

Cu relațiile (17) și (18), relația (13) devine

$$dQ_{vd} = \left(Q_{vCO}\frac{\Delta \nu_{ga\alpha}^{CO}}{\Delta \alpha} + Q_{vOH}\frac{\Delta \nu_{ga\alpha}^{OH}}{\Delta \alpha}\right) d\alpha,$$

sau

$$d\,Q_{vd} = g_9\,d\,\alpha\,, \tag{19}$$

funcțiunea g_9 fiind definită în anexa II.

Căldura elementară de vaporizare se calculează ținînd seama că este cunoscută legea de injecție ξ_i,

$$\xi_i = \frac{v_{c\alpha}}{v_c}\,, \tag{20}$$

unde $v_{c\alpha}$ este cantitatea de combustibil injectată în cilindru din momentul declanșării injecției pînă în momentul considerat, iar v_c este doza de combustibil pe ciclu. Întrucît $v_{c\alpha}$ este o funcțiune cunoscută de unghiul RAC, precizată grafic sau aproximată prin serii trigonometrice, se obține :

$$d\,\xi_i = \frac{v'_{c\alpha}}{v_c}\,d\,\alpha\,, \tag{21}$$

unde $v'_{c\alpha}$ este derivata funcțiunii $v_{c\alpha}$. Se admite că vaporizarea combustibilului decurge cu viteză infinită ; dacă q_{vap} este căldura de vaporizare pentru unitatea de masă de combustibil, atunci

$$d\,Q_{vap} = v_c\;q_{vap}\;d\,\xi = q_{vap}\cdot v'_{c\alpha}\,d\,\alpha\,. \tag{22}$$

Exprimînd relația (22) într-o formă concentrată, se obține :

$$d\,Q_{vap} = g_{10}\,d\,\alpha\,, \tag{23}$$

funcțiunea g_{10} fiind definită în anexa II.

Rezolvarea ecuației de bilanț energetic se realizează astfel. Se substituie în ecuația (1) expresiile (2), (6), (12), (19) și (23) :

$$v_c\,Q_{vc}\,d\,\xi = U'_\xi\;d\,\xi + U'_\alpha\;d\,\alpha + g_7\;d\,\alpha + g_8\;d\,\alpha + g_9\;d\,\alpha + g_{10}\;d\,\alpha\,;$$

grupînd convenabil termenii se obține :

$$\frac{d\,\xi}{d\,\alpha} = \Gamma\,(\xi, \alpha)\,, \tag{24}$$

funcțiunea Γ fiind precizată în anexa II. Integrînd ecuația (24) se obține legea de ardere.

Pentru integrarea ecuației de bilanț energetic se utilizează metoda Runge-Kutta de ordinul II, cunoscută curent sub denumirea de metoda Euler îmbunătățită [6], [7].

Particularitățile acestei metode, aplicate în cazul de față, sînt următoarele : — este o metodă pas cu pas, la care pentru determinarea valorii funcției ξ în punctul $m+1$ este suficientă cunoașterea valorii ei în punctul m ; — metoda concordă cu dezvoltarea funcției ξ în serie Taylor pînă la termenul în ξ'' inclusiv ; — pentru integrarea ecuației (24) este suficientă numai evaluarea funcției Γ, nu și a derivatei ei.

În figura 1 este prezentat principiul metodei. Cunoscînd valoarea funcției ξ la începutul intervalului, α_m și aproximînd panta curbei con-

stantă pe intervalul de integrare $\Delta\alpha$ și egală cu valoarea ei în punctul M, se determină la sfîrșitul intervalului o primă aproximare a valorii funcției ξ pentru α_{m+1} în punctul L. Pentru mărirea preciziei se calculează acum panta curbei ξ pentru valoarea α_{m+1} cu mărimile determinate în punctul L și se apreciază că pe intervalul de integrare

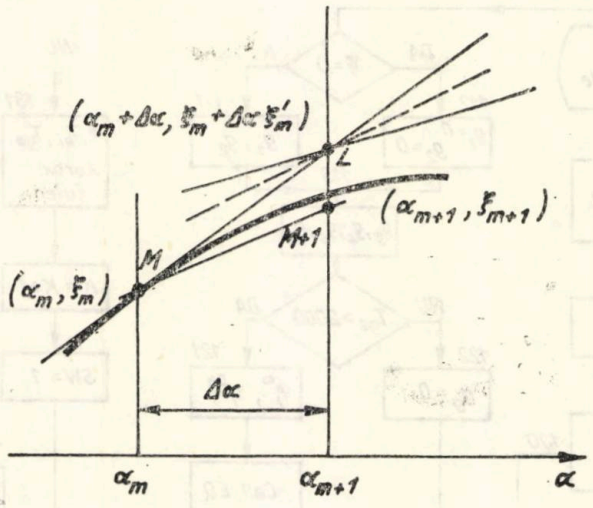


Fig. 1.

panta este constantă și egală cu media aritmetică a celor două pante calculate. Astfel, valoarea funcției la sfîrșitul intervalului de calcul este exprimată de relația :

$$\xi_{m+1} = \xi_m + \Delta\alpha \cdot \Phi(\alpha_m, \xi_m, \Delta\alpha),$$

unde

$$\Phi(\alpha_m, \xi_m, \Delta\alpha) = \frac{1}{2}\left[\Gamma(\alpha_m, \xi_m) + \Gamma(\alpha_m + \Delta\alpha, \xi_m + \Delta\alpha\,\xi'_m)\right].$$

În continuare se prezintă organigrama programului întocmit (fig. 2).

Pentru început sînt furnizate calculatorului datele privind variația presunii și a derivatei ei în funcție de unghiul RAC, precum și legea de injecție și derivata acesteia. De asemenea sînt furnizate valorile coeficienților de echilibru chimic pentru substanțele disociate și căldurile de disociere în funcție de temperatură. Toate aceste valori sînt citite de calculator și înregistrate în memorie.

Se indică apoi mărimile tuturor parametrilor (temperatura și presiunea gazelor, compoziția lor etc.) la începutul primului interval. Se definește o variabilă SW care urmează să controleze terminarea calculului pe intervalul considerat.

Se declanșează calculul prin evaluarea funcțiilor cinematice, a compoziției gazelor, a funcțiilor g_7, g_8, g_{10} și a căldurilor specifice la tem-

peratura respectivă. Întrucît în formula de definiție a funcțiilor g_1 și g_2, ξ apare la numitor, pentru evitarea unui „refuz" din partea calculatorului se procedează la efectuarea unui test. În cazul în care $\xi=0$, se precizează $g_1=g_2=0$; în caz contrar se calculează valorile respective. Se determină apoi valorile funcțiilor g_3, g_4, g_5 și g_6.

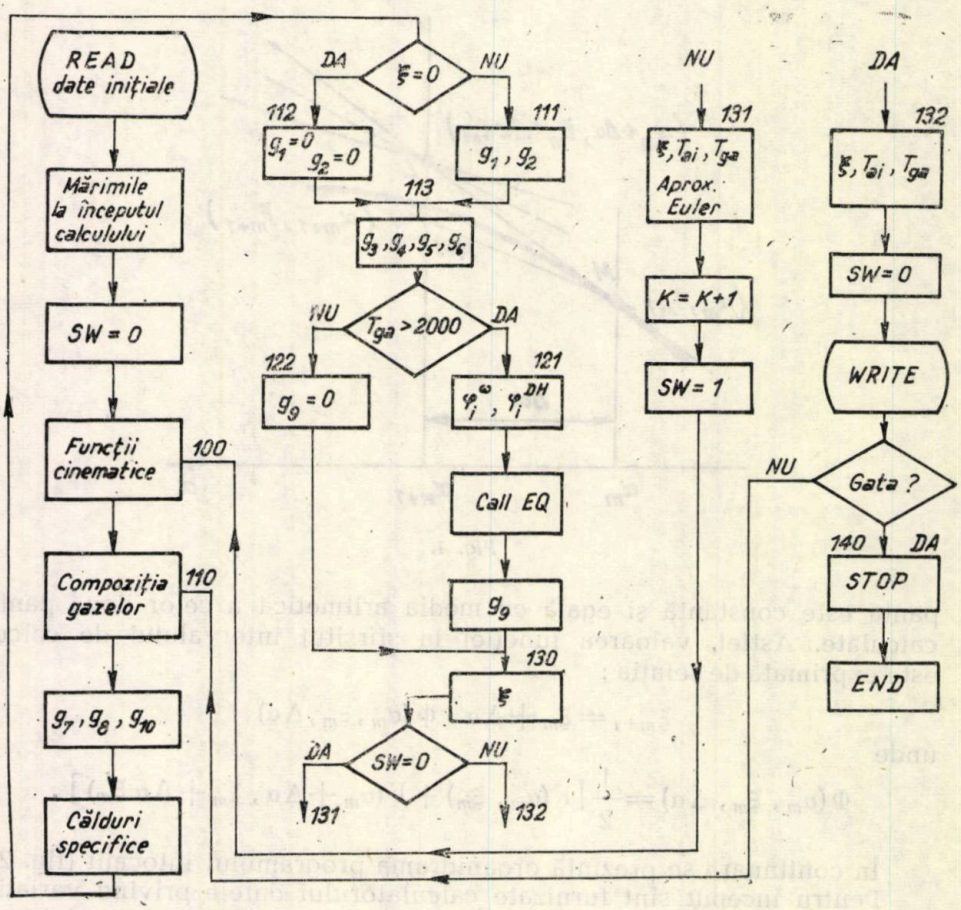


Fig. 2.

Se introduce un nou test. În cazul în care temperatura gazelor arse este mai mică de 2000°K se neglijează disocierea și $g_9=0$; în caz contrar se procedează la evaluarea coeficienților φ din ecuațiile care precizează cantitățile de produse disociate. Pentru rezolvarea acestor ecuații se apelează la un subprogram denumit EQ. Acest subprogram permite determinarea acelei rădăcini a ecuației care ne interesează pentru calcul, iterînd prin metoda falsei poziții între zero și o valoare maximă limită.

Fiind evaluate toate funcțiile g se procedează la calculul pantei curbei (ξ'). Se testează mărimea variabilei SW. Dacă $SW=0$, înseamnă că intervalul este parcurs prima oară; se calculează aproximata Euler (punctul L, figura 1) a mărimilor la sfîrșitul intervalului și se reține valorile lor la începutul acestuia. Se trece de la punctul m la $m+1$ și se pune $SW=1$, calculul fiind reluat prin evaluarea funcțiilor cinematice pentru noul punct. Secvența calculelor este aceeași pînă se ajunge din nou în blocul de testare a valorii lui SW. Întrucît $SW=1$ calculatorul identifică terminarea iterației pe intervalul considerat, determină toate mărimile la sfîrșitul acestuia, repune $SW=0$ și scrie valorile obținute.

Un ultim bloc de testare verifică terminarea programului. În cazul în care nu a fost parcurs complet domeniul pe care urmează să se efectueze calculul, acesta este reluat prin trecerea la intervalul următor. În caz contrar programul este întrerupt și scos din calculator.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

Anexa I

Expresiile unor funcțiuni cinematice

$$\sigma_\alpha = \frac{2}{\varepsilon - 1} + (1 - \cos\alpha) + \frac{\Lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sigma'_\alpha = \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \left[\sin\alpha + \frac{\Lambda}{2}\sin 2\alpha\right]\frac{\pi}{180}$$

$$\sigma_{a\alpha} = (1 + \psi\sigma_\alpha)\sigma_\alpha + 0{,}33$$

$$\sigma_{b\alpha} = (1 + \psi\theta\sigma_\alpha)\sigma_\alpha - 0{,}77$$

$$\theta = \frac{T_{cl}}{\overline{T}_{cp}}$$

Anexa II

Expresia funcției Γ

$$\Gamma = \frac{U'_\alpha + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10}}{\nu_c Q_{vc} - U'_\xi}$$

$$g_7 = \frac{0{,}5}{427} p V_S \sigma'_\alpha$$

$$g_8 = I_a (p J \sigma_{a\alpha} - \overline{T}_{cp}\sigma_{b\alpha}) p^{0{,}13}$$

$$g_9 = Q_{vCO}\frac{\Delta\nu^{CO}_{ga\alpha}}{\Delta\alpha} + Q_{vOH}\frac{\Delta\nu^{OH}_{ga\alpha}}{\Delta\alpha}$$

$$g_{10} = q_{vap}\nu'_{c\alpha}$$

Anexa III

Relaţiile care precizează funcţiile φ pentru calculul echilibrelor chimice

$$\varphi_1^{CO} = -2\frac{\xi^3 \nu_{ga}(\nu_{ga}^{CO_2})^2}{p K_{p\,CO}^2}$$

$$\varphi^{CO} = 4\frac{\xi^2 \nu_{ga} \nu_{ga}^{CO_2}}{p K_{pCO}^2}$$

$$\varphi_3^{CO} = 2\xi\left(\nu_{ga}^{O_2} - \frac{\nu_{ga}}{p K_{pCO}^2}\right)$$

$$\varphi_1^{OH} = -2\frac{\xi^3 \nu_{ga}(\nu_{ga}^{H_2O})^2}{p K_{pOH}^2}$$

$$\varphi_2^{OH} = 4\frac{\xi^2 \nu_{ga} \nu_{ga}^{H_2O}}{p K_{pOH}^2}$$

$$\varphi_3^{OH} = -2\frac{\xi \nu_{ga}}{p K_{pOH}^2}$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Apostolescu, N., Grünwald, B.* — Contribuţii la teoria transferului de căldură din cilindrul motorului cu ardere internă. Construcţia de maşini, 8—9, 1967.
2. *Bărănescu, G.* — Calculul proceselor de ardere. Bucureşt, Editura Academiei, 1955.
3. *Grünwald, B., Apostolescu, N.* — Calculul energiei interne a gazelor din cilindrul motorului cu ardere internă, cu considerarea neomogenităţii termice a amestecului în perioada arderii. Buletinul Institutului Politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", Bucureşti, 3, 1969.
4. *Aulai Mc, K. J., Wu, T., Chen, S. K., Borman, G. L., Myers, P. S., Uyehara, O. A.* — Development and evaluation of the compression-ignition engine. S.A.E. paper 650451. Mid-Year Meeting, Chicago, 1965, may.
5. *Krieger, R. B., Borman, G. L.* — The computation of apparent heat release for internal combustion engines. ASME publication 66-WA/DGP-4, 1966.
6. *Cracken Mc, D., Dorn, W. S.* — Numerical methods and Fortran programming. J. Wiley and Sons Inc., 1964.
7. *Demidovici, B. P., Maron, I. A., Şuvalova, E. Z.* — Cislennîe metodî analiza. Moskva, Gosudarstvennoe izdatelistvo fizico-matematiceskoi literaturî, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

C.Z.: 621.431 : 621—242 : 621.827

O CONSTRUCȚIE PENTRU DETERMINAREA GRAFICĂ A DEPLASĂRII PISTONULUI LA MECANISMUL BIELĂ-MANIVELĂ NORMAL ȘI DEZAXAT

RODICA MANIȚIU

1. *Expresia exactă a deplasării pistonului*

Se consideră mecanismul bielă-manivelă într-o poziție oarecare (fig. 1). Deplasarea pistonului, măsurată față de poziția moartă interioară, este exprimată prin relația

$$x_B = O_1 B_i - O_1 B . \tag{1}$$

Distanța O_1B se obține proiectînd conturul OAB pe direcția axei cilindrului

$$O_1 B = R \cos \alpha + L \cos \beta . \tag{2}$$

Distanța O_1B are expresia

$$O_1 B_i = \sqrt{\overline{OB_i}^2 - \overline{OO_1}^2} = \sqrt{(R+L)^2 - H^2} = R \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} \tag{3}$$

unde

$$\lambda = \frac{R}{L} \quad \text{și} \quad h = \frac{H}{R}$$

Înlocuind în (1) expresiile (2) și (3) rezultă

$$x_B = R \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left(\cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cos \beta\right) \right] . \tag{4}$$

Proiectînd conturul OAB pe normala la axa cilindrului se obține pentru cele două cazuri de dazaxare

$$R \sin \alpha = \pm H + L \sin \beta ,$$

din care se deduce

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 (\sin \alpha \mp h)^2} ; \tag{5}$$

semnul minus se referă la dezaxarea în sensul de rotație (fig. 1 a) iar semnul plus la dezaxarea în sens invers sensului de rotație (fig. 1 b).

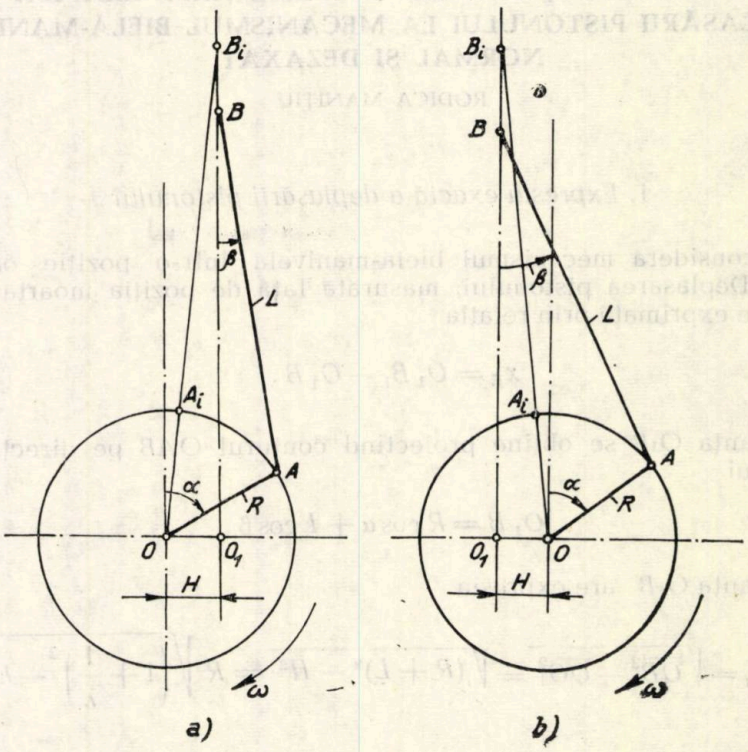


Fig. 1.

Eliminînd cos β între ecuațiile (4) și (5) expresia deplasării pistonului în funcție de variabila independentă α devine

$$x_B = R \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left[\cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 (\sin \alpha \mp h)^2} \right] \right\}. \tag{6}$$

Pentru obținerea deplasării pistonului sub formă de serie Fourier se dezvoltă în serie radicalul din formula precedentă. Efectuînd această operație și înlocuind în (6) rezultă

$$x_B = R\left[1 + A_0^* - \cos\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} \pm (-1)^p A_{2p-1}^* \sin(2p-1)\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p}^* \cos 2p\alpha\right],$$

sau

$$x_B = R(1 + A_0^*) - R\left[(\cos\alpha + A_2^* \cos 2\alpha - A_4^* \cos 4\alpha + A_6^* \cos 6\alpha - + \cdots) \pm \pm (A_1^* \sin\alpha - A_3^* \sin 3\alpha + A_5^* \sin 5\alpha - + \cdots)\right], \quad (7)$$

unde s-a notat

$$A_0^* = \sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left(1+\frac{1}{\lambda}\right) + A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n} \lambda^{2n} h^{2n} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\binom{\frac{1}{2}}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{2k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k+n} \binom{2k+2n}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}\right],$$

$$A_{2p-1}^* = -\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \lambda^{2n+1} h^{2n+1} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+n} \binom{2k+2n}{2k-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-2},$$

$$A_{2p}^* = A_{2p} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^{2n} h^{2n} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+n} \binom{2k+2n}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

$$A_{2p} = -\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k-p} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}.$$

În formula (7) înaintea parantezei care conține termenii în sinus trebuie considerat semnul plus cînd dezaxarea este în sensul de rotație și semnul minus cînd dezaxarea este în sens invers sensului de rotație.

2. *Expresia aproximativă a deplasării pistonului*

Datorită valorilor mici ale raportului λ și ale coeficientului de dezaxare h coeficienții armonicilor superioare din seria (7) au valori mici. Fără a comite o eroare însemnată se poate limita seria (7) la primele două armonici

$$x_B \approx R\,(1 + A_0^*) - R\,(\cos\alpha + A_1^* \sin\alpha + A_2^* \cos 2\alpha). \tag{8}$$

Neglijînd în expresiile coeficienților A_0^*, A_i^*, A_2^* termenii care conțin puterile superioare ale lui λ sau h se deduce

$$A_0^* = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\lambda h^2,$$

$$A_1^* = \lambda h \; : \quad A_2^* = \frac{1}{4}\lambda.$$

Dezvoltînd radicalul precedent în serie și păstrînd primii doi termeni se obține

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} = 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda h^2}{1+\lambda}.$$

Expresia aproximativă a coeficientului A_0^* devine

$$A_0^* = \frac{1}{2}\,\lambda^2 h^2\,\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{4}.$$

Înlocuind în formula (8) expresiile aproximative ale coeficienților A_0^*, A_1^* și A_2^* rezultă

$$x_B = R\left[\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) - \left(\cos\alpha + \frac{\lambda}{4}\cos 2\alpha\right)\right] + \frac{R\lambda^2 h^2}{2(1+\lambda)} \mp R\lambda h \sin\alpha. \tag{9}$$

Eroarea maximă introdusă de această formulă aproximativă nu depășește 1 %.

3. *Determinarea grafică a deplasării pistonului*

Determinarea pe cale grafică a deplasării exacte a pistonului se poate face printr-o construcție asemănătoare celei folosite pentru determinarea grafică a deplasării exacte a pistonului la mecanismul bielă-manivelă normal și axat (fig. 2).

O construcție grafică bazată pe expresia aproximativă a deplasării pistonului este arătată în figura 3. Se descrie un cerc de rază R cu cen-

trul în O. Pe un diametru al acestui cerc se ia segmentul $OO' = \frac{R\lambda}{2}$

Se deduce dreapta $O'C$ care face cu $O'A'$ unghiul α pentru care se caută deplasarea pistonului și se proiectează punctul C pe diametrul cercului. Din figură rezultă

$$A'D = A'O - DO = R - R\cos(\alpha + \xi) = R \cdot \\ \cdot (1 - \cos\alpha\cos\xi + \sin\alpha\sin\xi). \tag{10}$$

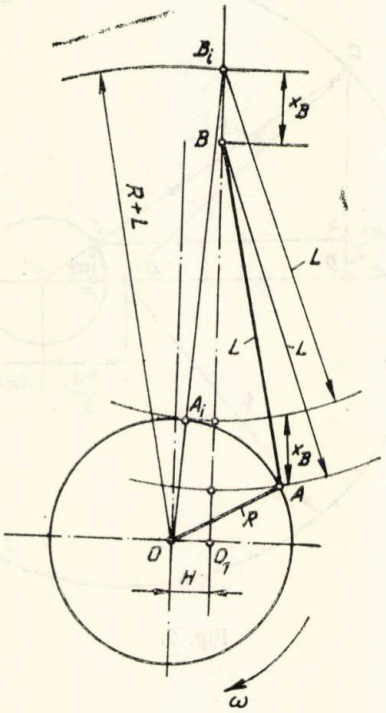


Fig. 2.

Din triunghiul $OO'C$ se deduce

$$\sin\xi = \frac{OO'}{OC}\sin\alpha = \frac{\lambda}{2}\sin\alpha .$$

Unghiul ξ fiind mic se consideră $\cos\xi \approx 1$. Înlocuind în (10) pe $\sin\xi$ și $\cos\xi$ se obține după transformări.

$$A'D = R\left[\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) - \left(\cos\alpha + \frac{\lambda}{4}\cos 2\alpha\right)\right] .$$

Segmentul $A'D$ reprezintă deci paranteza dublă din formula (9).

Termenul $\frac{R\lambda^2 h^2}{2(1+\lambda)}$, care este constant, se ia la scara desenului egal cu segmentul $A''A'$.

Pentru construirea ultimului termen se trasează un cerc de rază $R\lambda h$ cu centrul în O'; ducînd $EG//O'A'$ și GK înclinat la 45° față de CD rezultă

$$EF = KD = R\lambda h \sin\alpha,$$

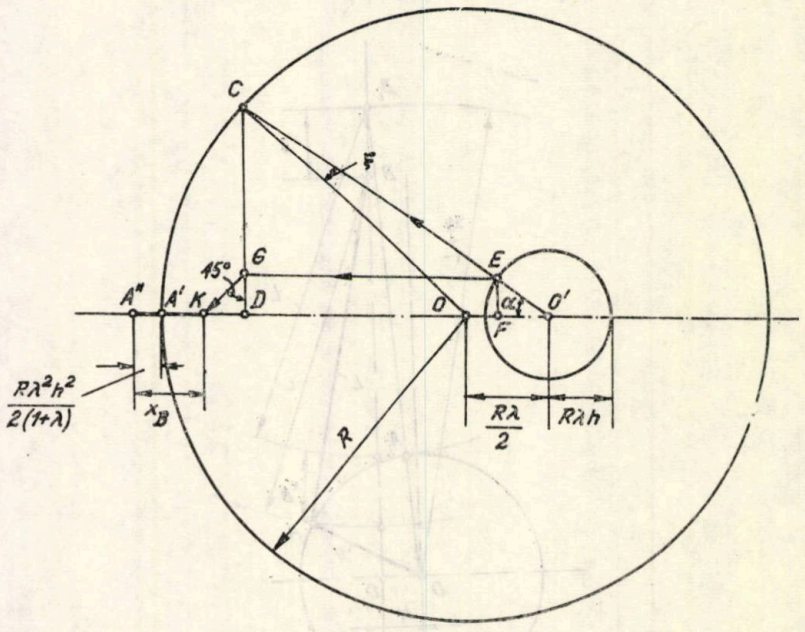


Fig. 3.

și deci

$$x_B = A''K.$$

Dacă mecanismul este dezaxat în sensul de rotație punctul K trebuie plasat la stînga punctului D în intervalul $0° < \alpha < 180°$, și la dreapta punctului D în intervalul $180° < \alpha < 360°$. Dacă mecanismul este dezaxat în sensul invers sensului de rotație pozițiile punctului K față de punctul D în cele două intervale sînt inverse.

Datorită valorilor mici ale mărimilor λ și h construcția trebuie făcută la o scară mare.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

REȚELE ELECTRICE

C.Z.: 621.3.015 : 621.315/.316 : 621, 314.1/.2 : 621.313.12

CERCETAREA PE MODEL A DEFORMĂRII UNDELOR SUB ACȚIUNEA EFECTULUI CORONA DE IMPULS

D. CRISTESCU
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

M. BUDAȘCĂ
Întreprinderea pentru raționalizarea
și modernizarea instalațiilor
energetice

1. *Principii de modelare. Scări de modelare*

În alegerea scărilor de modelare pentru modelul de linie de transport cu simularea efectului corona construit, s-a ținut seama de considerații de ordin teoretic și practic.

Elementele longitudinale ale modelului trebuie realizate cu o cît mai mică rezistență și într-o variantă care să introducă cît mai puține elemente de deformare. Aceste două cerințe sînt contradictorii, pentru că realizarea bobinelor de inductanță cu aer, deci fără deformări cauzate de prezența elementelor feromagnetice, necesită un număr mare de spire și deci o rezistență longitudinală mare.

Studiul optimizării scărilor de modelare în condițiile utilizării unor capacități de ordinul 100—1000 pF a arătat că sînt îndeplinite cît mai multe din cerințele mai sus menționate dacă

$$m_L = m_C = 4 \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad m_R = 1$$

S-au analizat și variante care dădeau $m_R = 2$; 8; 16; 40 și ele nu îndeplineau condițiile realizabile ale bobinei de inductanță.

2. *Dimensionarea elementelor modelului de linie*

Problema modelării transformatoarelor este larg analizată în literatură, pentru modelarea liniilor, în analizoarele de procese tranzitorii curente, se folosește lanțul de cuadripoli (în fig. 1 inductanța L_e și capacitatea C_g). Mult mai puțin cercetată este problema liniilor cu pierderi, în speță pierderi transversale. În fig. 6.1 este prezentată schema realizată cu scopul de a modela propagarea, ținîndu-se seama și de efectul corona de impulsie. Schemele din literatură (4, 5) se referă numai la regimul de durată corona.

Pentru modelarea pragului critic corona se folosesc două diode semiconductoare D_1 şi D_2, tensionate în prealabil cu o tensiune $\pm U_c$ în sensul invers conductibilităţii lor.

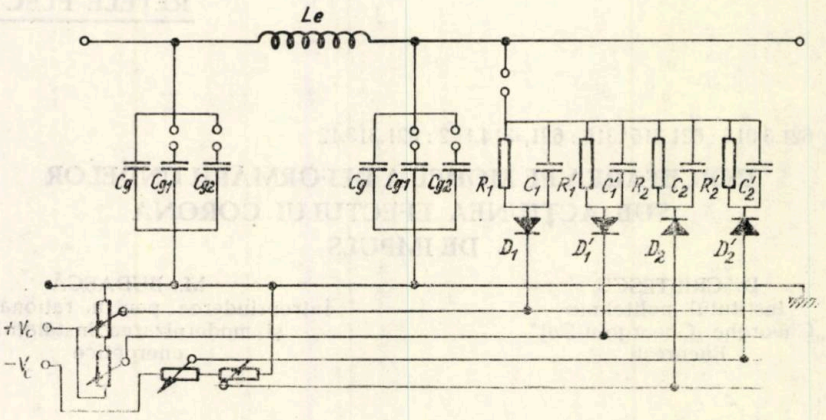


Fig. 1.

După cum rezultă din analiza ecuaţiilor de propagare în lungul liniilor cu pierderi, s-a ales pentru lungimea cuadripolului original real valoarea de 50 m.

Folosind scările de modelare precizate anterior, se obţin următoarele valori pentru cuadripolul elementar al modelului

$$L_{cm} = 276\,\mu H \qquad 2C_{gm} = 1720\,pF \qquad z_1 = 400\,\Omega$$

unde indicele „m", precizează că este vorba de parametrii modelului.

Influenţa construcţiei geometrice a suporţilor liniei şi a dispoziţiei şi numărului conductoarelor poate fi luată în considerare prin modificarea impedanţei caracteristice a acestuia. Întrucît ponderea cea mai mare o are modificarea capacităţii liniare, în realizarea modelului, s-au adoptat următoarele relaţii :

— pentru impedanţa caracteristică Z_2

$$Z_2 = 370\,\Omega\,;\quad 2(C_g + C_{g_1}) = 2000\,pF$$

— pentru impedanţa caracteristică Z_3

$$Z_3 = 330\,\Omega\,;\quad 2(C_g + C_{g_1} + C_{g_2}) = 2200\,pF$$

Elementele suplimentare corespunzătoare efectului corona de impulsie, determinate cu relaţiile deduse în [3], sînt pentru un cuadripol elementar, corespunzător unei lungimi de 50 m pe original :

$$C_1 = 550\,pF\,:\quad C_2 = 450\,pF\,:\quad R_1 = R_2 = 60\,k\,\Omega$$

Analiza prin frecvență a unui cuadripol elementar [3], considerat ca element ideal, arată că transmiterea unei frecvențe sinusoidale aplicată la intrare se face fără distorsiuni importante pînă la frecvența de ordinul 1 MHz în domeniul original.

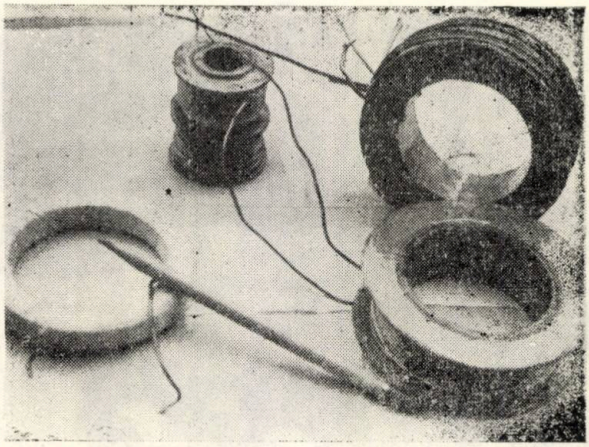


Fig. 2.

Se poate aprecia, în urma cercetării erorilor înregistrate că modelul de linie cu simularea efectului corona de impulsie îndeplinește condiții bune de precizie.

În fig. 2 este redată vederea unor bobine de model pentru 50 m de linie.

3. *Generatorul de impulsuri de formă variabilă*

Producerea undelor de impuls întregi, cu formă și amplitudine variabilă și a undelor tăiate se efectuează cu un generator de impulsuri cu multiple posibilități de lucru.

În fig. 3 este redată vederea generatorului construit, a cărui schemă este schema uzuală a generatoarelor de impuls [2, 4].

Pentru dimensionarea elementelor generatorului s-au folosit formulele uzuale de calcul, funcție de durata frunții și spatelui undei.

Capacitatea C s-a ales de 0,12 μF.

Elementele variabile ale schemei construite sînt :

— Capacitatea C_k în 2 trepte, 1 și 10 μF, ceea ce permite realizarea unor unde scurte cu spate de ordinul 50—70 μs, respectiv undă lungă 400—600 μs.

— rezistența R în 10 trepte de 25 Ω pentru realizarea variației spatelui

— rezistența r în 10 trepte de 10 Ω pentru variația duratei frunții.

Reglajul grosier al amplitudinii undelor de impuls este realizabil

de la panoul blocului de comandă, prin alimentarea capacității C_k cu 3 trepte de tensiune continuă 350 ; 400 ; 450 V.

În acest fel generatorul poate furniza 1200 forme de undă de impuls întreagă, cu fronturi cuprinse între 1 μs și 5 μs, și durate ale spatelui

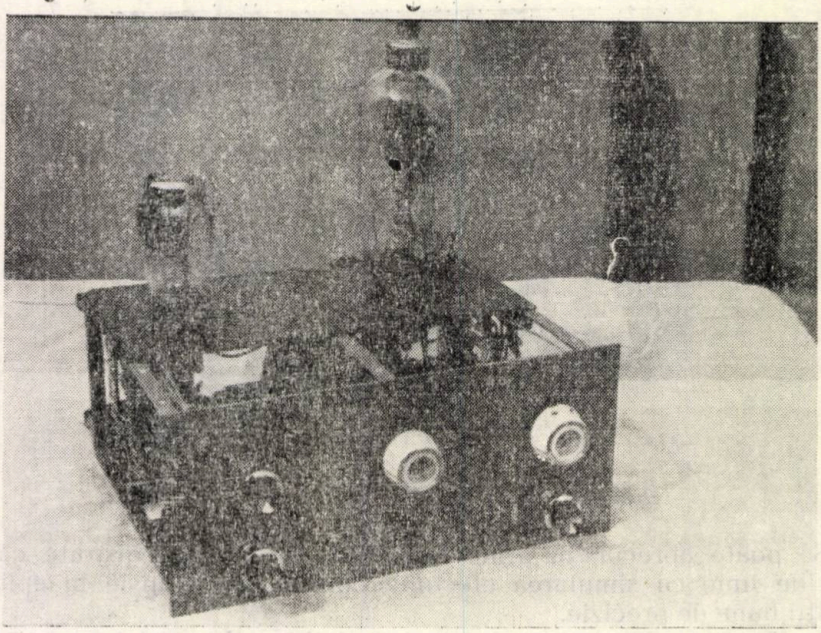


Fig. 3.

între 40 și 600 μs duratele timpului la scara timpului original, ceea ce este suficient pentru studierea proceselor legate de supratensiuni atmosferice.

Pentru studiul fenomenelor care au loc la propagarea undelor de supratensiune atmosferică în lungul liniilor precum și pentru studiul protecției stațiilor contra supratensiunilor a fost necesar să se proiecteze și execute un dispozitiv de tăiere a undei furnizate de generator. Cuplarea dispozitivelor de tăiere se poate face fie direct la bornele generatorului fie, undeva pe parcursul liniei, loc în care îndeplinește fie rolul unui descărcător tubular fie al unei izolații conturnate.

Dimensionarea dispozitivului de tăiere permite tăieri ale undei de la timpi de 0,4 μs pînă la 5 μs. Aceste valori corespund fie tăierii pe front a impulsului, fie la tăierea pe spate.

În figura 4 alăturată sînt prezentate 6 oscilograme, unda 1,05/76,2 cu amplitudinea de 1960 kV, undă 1,66/341,2 cu amplitudinea de 1507 kV, rîndul al doilea și din rîndul al treilea, cu timpii de tăiere de 1,8 μs, respectiv 5,41 μs.

Valorile timpului de tăiere și ale duratei convenționale de scădere a tensiunii sînt determinate conform normelor CEI. Aceeași observație este valabilă și pentru determinările anterioare, pentru unda întreagă.

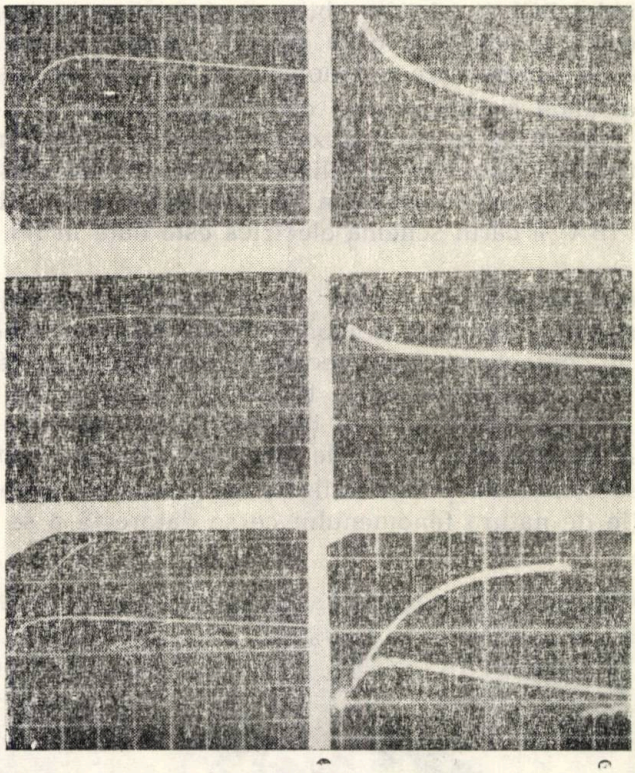


Fig. 4.

4. *Elementele schemei de măsură*

Aspectele specifice ale măsurătorilor unor fenomene de propagare au necesitat construirea unor blocuri auxiliare care completează schema de măsură.

Elementul de comandă al schemei de măsură, care fixează și originea de timp a procesului studiat, este blocul impulsurilor de comandă (BIC).

Pornirea schemei este comandată fie cu impulsuri dreptunghiulare negative, de amplitudine 20 V, de frecvență variabilă fie cu o tensiune sinusoidală de 15 V, cu frecvența de 50 hz.

Pentru înregistrarea fenomenelor care comportă întîrzieri datorită propagărilor, care se face cu dificultate, mai ales dacă este vorba de

întîrzieri mai mari 40—50 μs, s-a construit „blocul pentru controlul luminozității" (BCL) executat în două subansamble.

BCL 1 este un decalor de timp furnizînd la ieșirea sa un impuls întîrziat cu pînă la 110 μs.

Subansamblul BCL II permite obținerea unui impuls dreptunghiular de putere, pentru a comanda grila tubului catodic al osciloscopului, într-o schemă de înregistrare a fenomenelor funcție de distanță.

Pentru comanda și alimentarea diverselor blocuri și elemente ale schemelor de măsură ce se pot realiza cu instalațiile construite, au fost necesare 12 tensiuni continue stabilizate, unele reglabile și 3 tensiuni alternative. Pentru aceste scopuri a fost proiectat și construit blocul de alimentare (BA) a cărui schemă electrică este dată în fig. 6 și panou frontal în fig. 5.

Instalația construită aduce nou și posibilitatea reglării frecvenței undelor de impuls ce se trimit la model. Pentru aceasta se folosește un al treilea șir de contacte ale unui sector — care sînt șuntate și alimentate, în serie cu o rezistență, de la tensiunea continuă. De pe această rezistență se culege o tensiune de impulsuri cu frecvența și amplitudinea reglabile cu ajutorul vitezei de antrenare a axului comutatorului.

Instalațiile construite pot fi utilizate în mai multe scheme de măsură, în funcție de natura fenomenului ce se datorește a se studia.

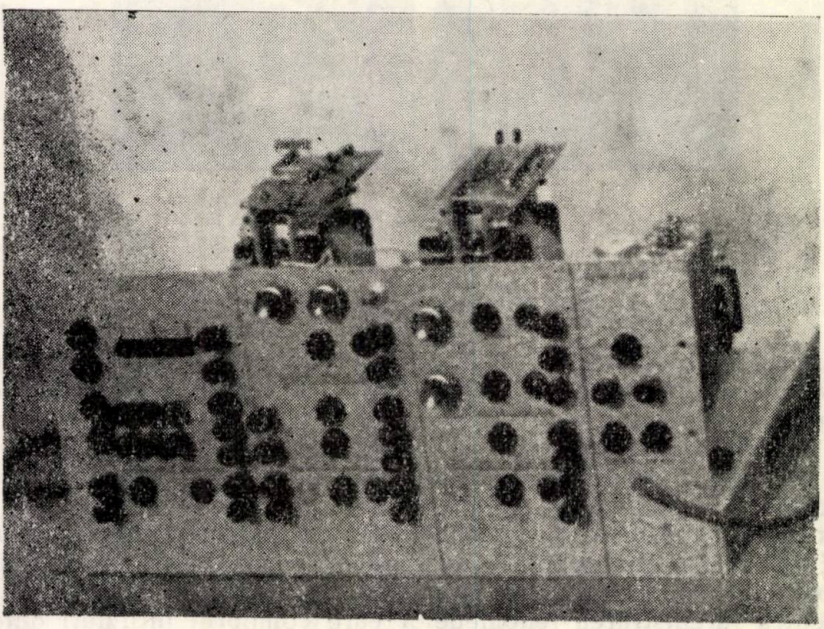


Fig. 5.

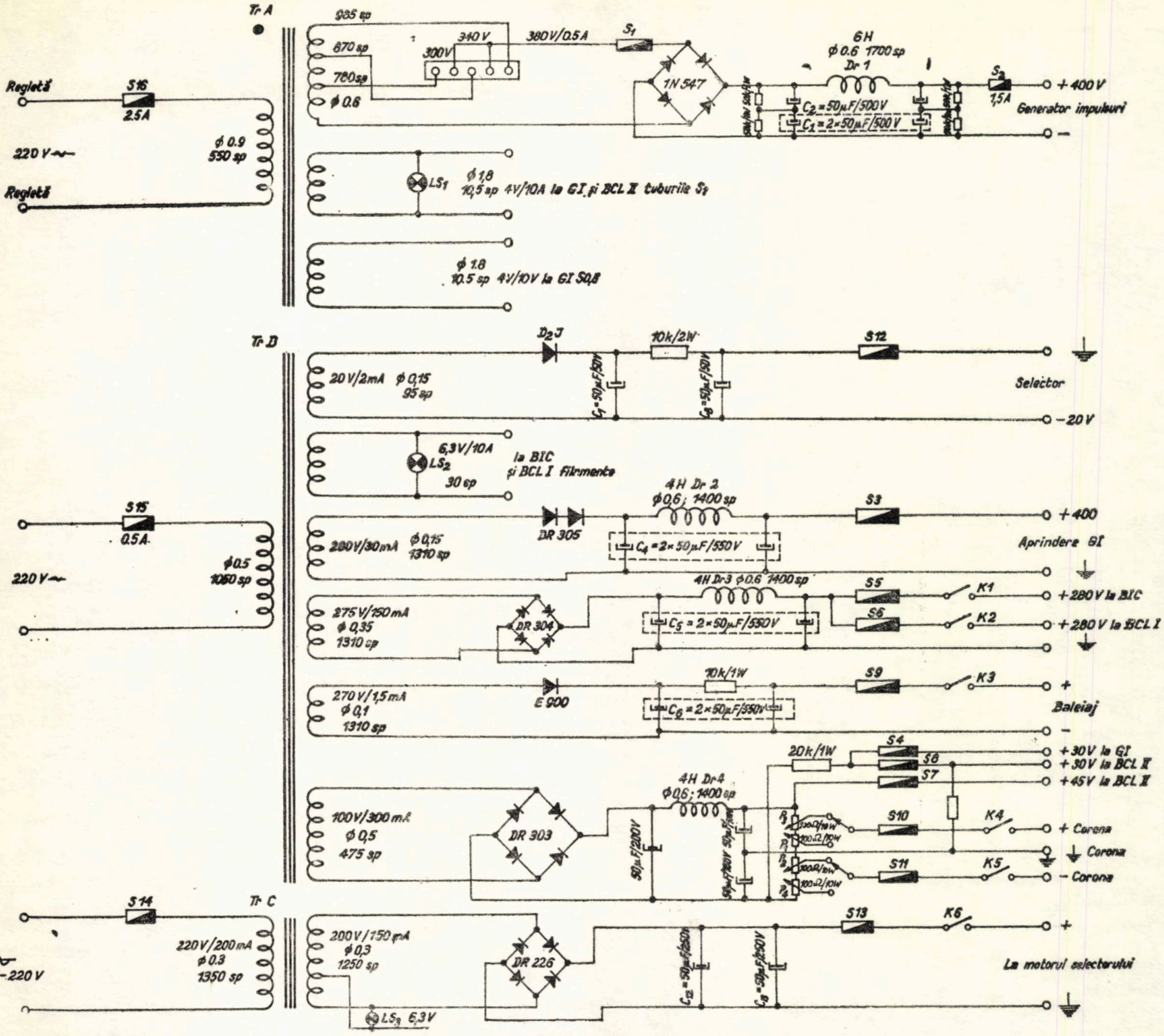
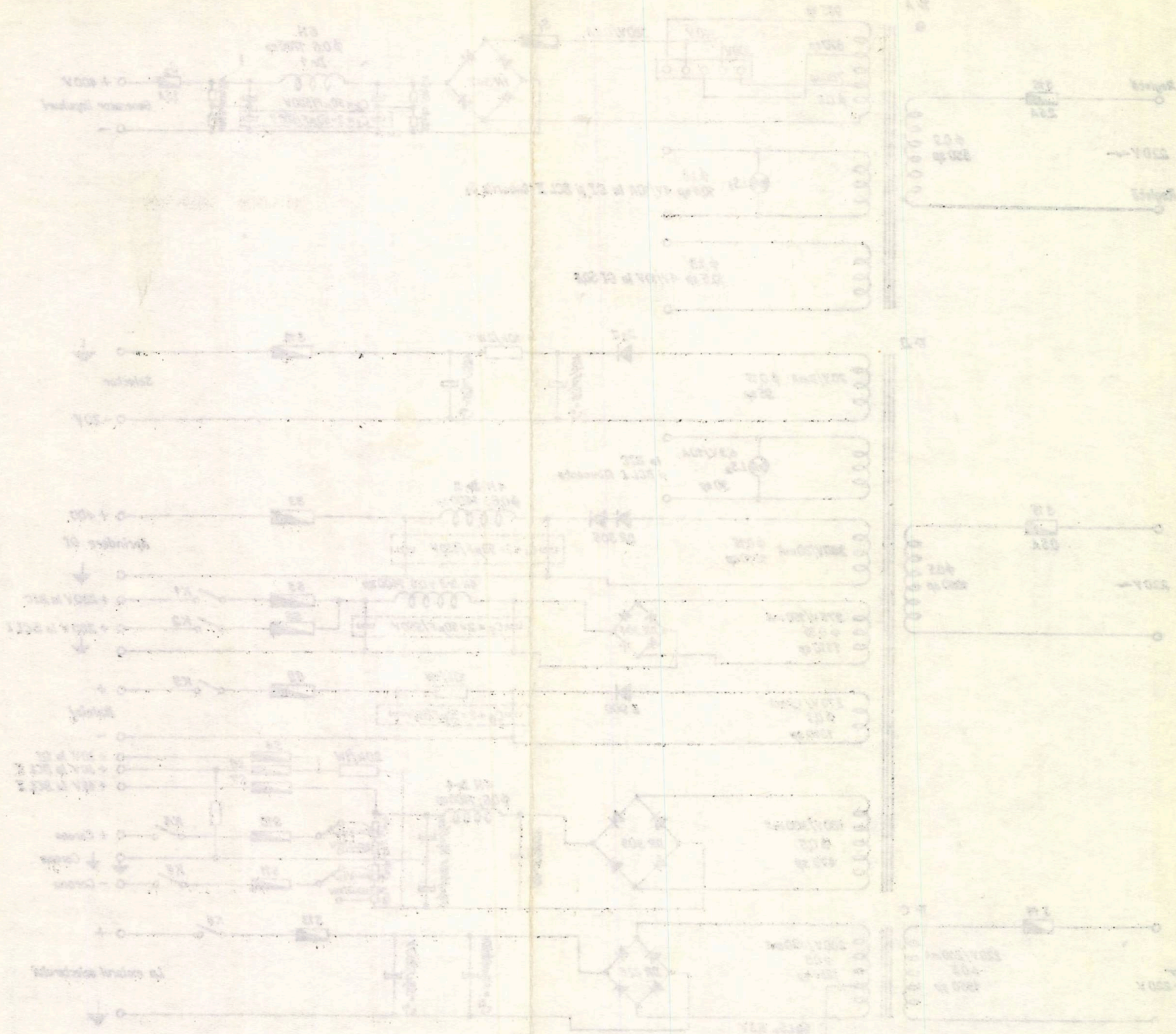

Tr A
935 sp
670 sp
780 sp
ϕ 0.6
340 V
300 V
380 V/0.5 A
S1
1N 547
6 H
ϕ 0.6 1700 sp
Dr 1
S2
1,5 A
+ 400 V
Generator impulsuri
C2 = 50 μF/500 V
C1 = 2×50 μF/500 V
Rețea
S16
2,5 A
220 V ~
ϕ 0.9
550 sp
Rețea
LS1
ϕ 1,8
10,5 sp 4V/10A la GI și BCL II tuburile S1
ϕ 1.8
10.5 sp 4V/10V la GI S0,8
Tr B
D2 J
10k/2W
S12
20 V/2mA ϕ 0,15
95 sp
C7 = 50μF/50V
C8 = 50μF/50V
Selector
- 20 V
6,3 V/10 A
LS2
30 sp
la BIC
și BCL I filamente
4H Dr 2
ϕ 0,6 ; 1400 sp
S3
+ 400
Aprindere GI
S15
0,5 A
220 V ~
ϕ 0,5
1050 sp
DR 305
280 V/30 mA ϕ 0,15
1310 sp
C4 = 2×50 μF/550 V
4H Dr 3 ϕ 0,6 1400 sp
S5
K1
+ 280 V la BIC
S6
K2
+ 280 V la BCL I
275 V/150 mA
ϕ 0,35
1310 sp
DR 304
C5 = 2×50 μF/550 V
10k/1W
S9
K3
+
Baleiaj
270 V/1,5 mA
ϕ 0,1
1310 sp
E 900
C6 = 2×50 μF/550 V
-
20k/1W
S4
+ 30 V la GI
S8
+ 30 V la BCL II
S7
+ 45 V la BCL II
4H Dr 4
ϕ 0,6 ; 1400 sp
100 V/300 mA
ϕ 0,5
475 sp
DR 303
50 μF/200 V
S10
K4
+ Corona
Corona
S11
K5
- Corona
S14
Tr C
220 V/200 mA
ϕ 0,3
1350 sp
0 - 220 V
200 V/150 mA
ϕ 0,3
1250 sp
DR 226
LS3 6,3 V
S13
K6
+
La motorul selectorului
C22 = 50μF/350V
C8 = 50μF/350V

Fig. 6.



Schimbînd punctul de sondă pe diverse prize ale modelului se obţine în fiecare punct o variaţie a tensiunii $u=f(t)$, în urma aplicării tensiuni de baleiere cu variaţia proporţională cu timpul, pe celelalte plăci.

Instalaţiile au fost însă concepute, proiectate şi executate în aşa fel, pentru a permite utilizarea lor şi într-o altă schemă de măsură, după principiul propus în 1954 de Abetti [1, 3] pentru transformatoare. Această schemă permite obţinerea pe ecranul osciloscopului a variaţiei tensiunii ca o funcţie directă de distanţa parcursă.

5. *Rezultatele determinărilor oscilografice. Concluzii*

5.1. Dintre multiplele posibilităţi de cercetare ce se pot realiza cu ajutorul modelului de linie coronată, al generatorului de impulsuri şi al instalaţiilor auxiliare în lucrarea de faţă s-a studiat procesul deformării undelor de impuls tăiate, deformare datorită efectului corona de impulsie.

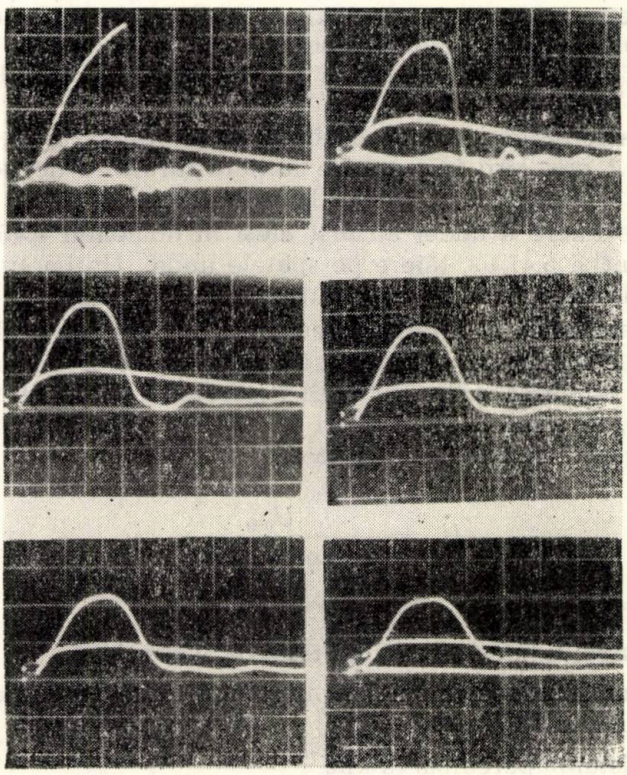


Fig. 7.

Scopul cercetărilor expuse în acest capitol este obţinerea unor relaţii de calcul al deformării undei, funcţie de distanţa parcursă, de timpul de tăiere al undei, de panta iniţială a impulsului şi de valoarea sa maximă.

Pentru oscilografiere s-a folosit un osciloscop EO-2 şi s-a fotografiat imaginea de pe ecran. Pentru fiecare tip de impuls tăiat s-au făcut 6 oscilograme corespunzătoare lungimilor de propagare 0, 1, 2, 3, 4 şi 5 km.

În figura 7 alăturată sînt prezentate 6 oscilograme cuprinzînd deformarea unei unde scurte de impuls, cu pantă mică 590 kV/μs şi timp de tăiere mediu, 2,10 μs.

Succesiunea oscilogramelor este :

— rîndul 1 stînga : impuls iniţial cu amplitudinea de 1240 kV ;

— rîndul 1 dreapta : impuls deformat după 1 km ; $U_{max}=950$ kV ;

— rîndul 2 : impuls deformat după 2 şi 3 km cu amplitudinile de 825 kV, respectiv 725 kV ;

— rîndul 3 : idem pentru 4 şi 5 km, 650 kV şi 570 kV.

Pentru impulsurile tăiate şi deformate datorită propagării s-au determinat : amplitudinea maximă, timpul maximului, timpul de tăiere, durata convenţională a scăderii undei, panta impulsului triunghiular echivalent $U'=U_{max}/T_{max}$, panta în origine a impulsului la lungimea de propagare zero, U'_0.

Pentru ca relaţiile de calcul obţinute să îmbrăţişeze un domeniu de valabilitate cît mai larg impulsurile iniţiale furnizate de generator au avut pante în origine de la 760 kV/μs la 3600 kV/μs.

Timpii de tăiere a undei au fost aleşi în domeniul 0,46 μs, tăierea rapidă pe front şi 5,41 μs, tăiere pe spatele undei. Un impuls cu o anumită pantă iniţială a fost analizat pentru 3 timpi de tăiere.

Analiza statistică şi interpretarea numerică a rezultatelor obţinute a permis să se încadreze procesul deformării undelor de impuls tăiate într-o relaţie analitică cu coeficienţii determinaţi experimental şi care se suprapune, în limitele unor erori de 3—5% peste rezultatele experimentale. Această relaţie de calcul este

$$U_m = \frac{U_{0m}}{1 + \gamma(l + \alpha)\, U_{0m}} \tag{1}$$

în care :

U_{om} = amplitudinea impulsului tăiat iniţial, în MV,

U_m = amplitudinea impulsului deformat după parcurgerea distanţei l, în MV.

l = distanţa parcursă, în km,

γ, α = coeficienţi de deformare pentru impulsuri tăiate.

În fig. 8 sînt date diagramele de variație cu distanța parcursă a amplitudinilor diferitelor forme de unde.

Pentru determinarea coeficientului γ [1/(MV.km)] se poate folosi cu suficientă precizie relația

$$\gamma = \frac{\lambda U_{0\,max}^2}{T_{max}^2} = \lambda U'^2_{echiv} \tag{2}$$

unde $U_{0\,max}$ și T_{max} sînt amplitudinea și timpul de tăiere pentru impulsul inițial, în MV respectiv μs.

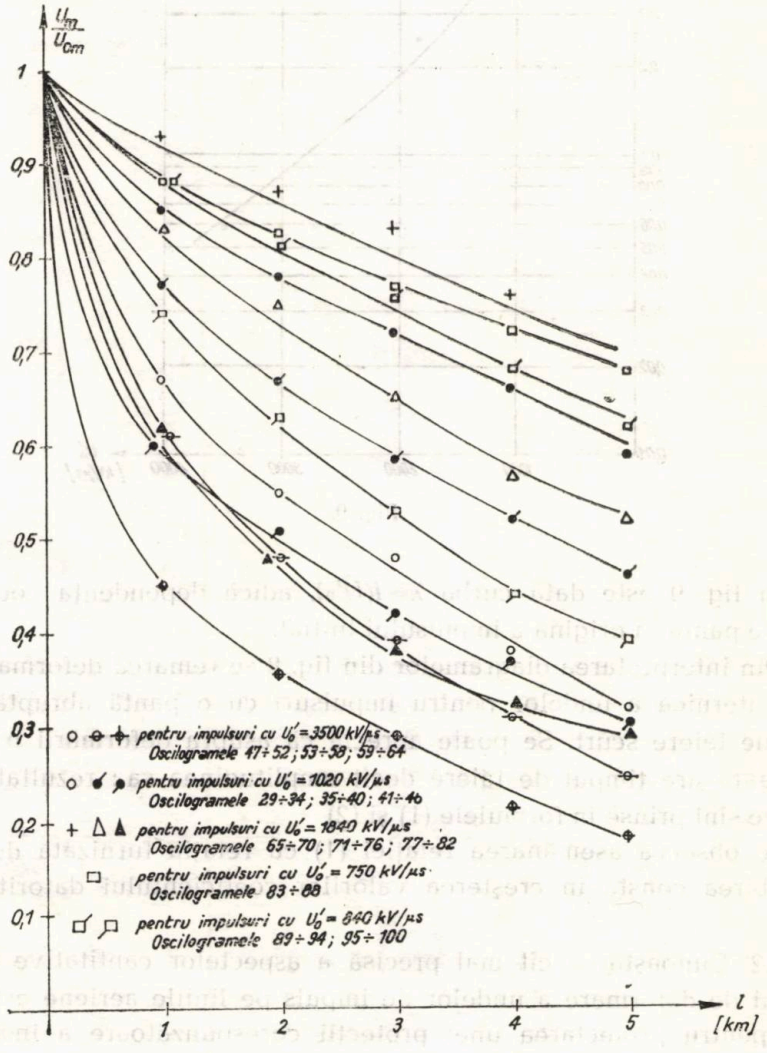


Fig. 8.

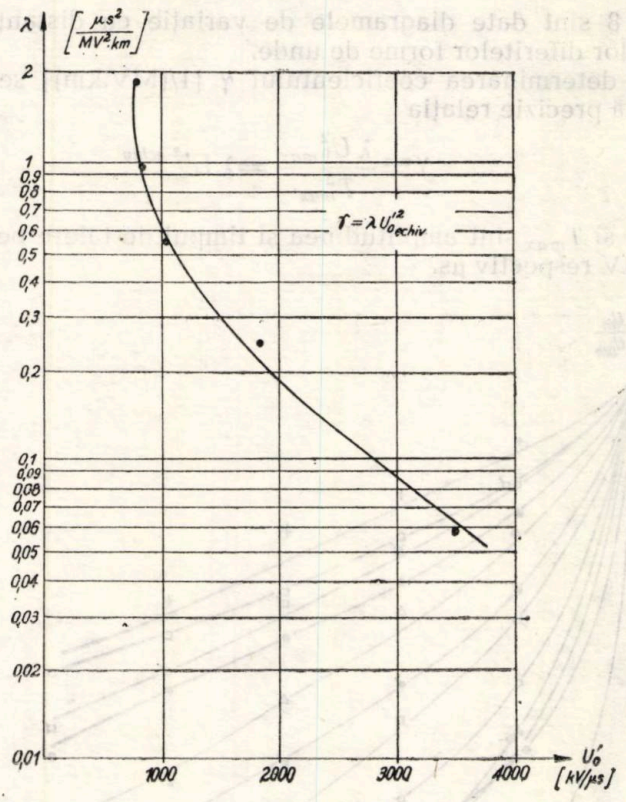


Fig. 9.

În fig. 9 este dată curba $\lambda = f(U'_0)$, adică dependența coeficientului λ de panta în origină a impulsului inițial.

Din interpretarea diagramelor din fig. 8 se remarcă deformarea mult mai puternică a undelor pentru impulsuri cu o pantă abruptă sau cu timp de tăiere scurt. Se poate aprecia că asupra deformării o pondere mai mare are timpul de tăiere decît amplitudinea sa: rezultatele cantitative sînt prinse în formulele (1) și (2)

Se observă asemănarea relației (1) cu relația furnizată de Foust; deosebirea constă în creșterea valorilor coeficientului datorită tăierii undei.

5.2. Cunoașterea cît mai precisă a aspectelor cantitative ale procesului de deformare a undelor de impuls pe liniile aeriene este foarte utilă pentru proiectarea unei protecții corespunzătoare a instalațiilor electroenergetice împotriva supratensiunilor.

Astfel relația (1) poate servi pentru determinarea lungimii necesar a fi ecranate pe porțiunile de sosire ale liniilor, în vederea asigurării sosirii în stații a unor unde care să poată fi suportate în mod corespunzător de schema de protecție împotriva supratensiunilor.

Catedra de rețele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *C. F. Wagner, Lloyd B. I.* — Effect of corona on travelling waves. Trans. AIEE, 1955, v. 74, pt. III.

2. *Heller B., Veverka A.* — „Volnovîe protesi v elekticeskih mașinah, GEI, 1960, Moscova.

3. *Cristescu D.* — Teza de doctorat, Institutul Politehnic București, 1967.

4. *Dinculescu C., Cristescu D.* — Déformation des ondes d'impulsion dans la propagation sur les lignes aériennes haute tension Bull. Inst. Politehnic, București, nr. 2, 1966.

5. *Alexandrov, G. N.* — Coronii razriad na liniah elektroperedaci, Izd. Energia, 1964, Moscova.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 4

AUTOVEHICULE

C.Z.: 629.113 : 629.11.012 : 621—233

CU PRIVIRE LA ÎNCĂRCĂRILE SUPLIMENTARE ALE TRANSMISIEI LA AUTOMOBILELE CU DOUĂ OSII MOTOARE *

GHEORGHE FRĂȚILA

1. Generalități

Prin încărcări suplimentare ale transmisiei la automobilele cu mai multe osii motoare se înțeleg încărcările care depășesc pe cele normale corespunzătoare unui anumit regim de mișcare.

În cazul automobilelor cu mai multe osii motoare distribuția momentului motor între aceste osii se poate face cu un reductor-distribuitor prevăzut, sau nu, cu un mecanism diferențial.

În situația în care nu se prevede un mecanism diferențial între osii, vitezele unghiulare ale arborilor de ieșire ai mecanismului reductor-distribuitor sînt egale. Repartiția momentului motor la osiile motoare depinde în acest caz de o serie de parametri ca: unghiul de bracare al roților de direcție, denivelările căii, diferența dintre razele de rulare ale roților și devierea laterală a roților.

La reductoarele-distribuitoare cu mecanism diferențial, vitezele unghiulare ale arborilor de ieșire pot să varieze, iar distribuția momentelor între osiile motoare se determină folosindu-se proprietățile mecanismului diferențial.

În lucrarea de față se va studia cazul automobilelor fără mecanism diferențial între osii, deoarece acesta este cazul cel mai des întîlnit în practică. Mecanismul diferențial scumpește construcția și micșorează capacitatea de trecere în teren, din această cauză se utilizează foarte rar.

În cazul automobilelor cu mai multe osii motoare cu distribuția momentului fără diferențial între ele, deși viteza unghiulară a roților este egală, nu toate au aceeași viteză tangențială. Datorită aderenței unele roți motoare pot acționa ca roți frînate făcînd ca organele transmisiei să fie solicitate de încărcări suplimentare.

Pentru a studia încărcările suplimentare ale transmisiei este necesar să se determine în ce condiții forțele și momentele care acționează asu-

* Lucrare susținută în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 1—3 noiembrie 1968.

pra roților motoare depășesc valorile normale corespunzătoare regimului de mișcare dat. Deci va fi necesar să se deducă relațiile forțelor și a momentelor la roțile motoare.

2. Determinarea relațiilor pentru calculul forțelor și momentelor ce revin osiilor

Se consideră un automobil cu două osii motoare care se deplasează în viraj (fig. 1).

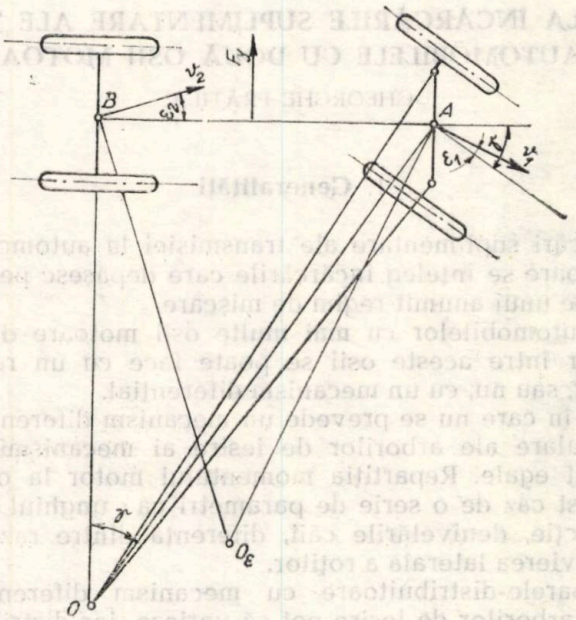


Fig. 1

Se notează :

γ — unghiul mediu de bracare a roților de direcție, în grade ;
v_1 — viteza punctului mijlociu al osiei din față, în m.s.$^{-1}$;
v_2 — viteza punctului mijlociu al osiei din spate, în m.s.$^{-1}$;
r_{c1} — raza de rulare a roților din față corespunzătoare forțelor tangențiale nule (roți conduse), în m ;
r_{c2} — raza de rulare a roților din spate corespunzătoare forțelor tangențiale nule (roți conduse), în m ;
r_{r1} — raza de rulare a roților din față, în m ;
r_{r2} — raza de rulare a roților din spate, în m ;
ω_{r1} — viteza unghiulară a roților din față, în rad.s^{-1} ;
ω_{r2} — viteza unghiulară a roților din spate, în rad.s^{-1} ;
ω_{d1} — viteza unghiulară a casetei diferențialului punții din față, în rad.s^{-1} ;

ω_{d2} — viteza unghiulară a casetei diferențialului punții din spate, în rad.s^{-1};

F_{t1} — forța tangențială dezvoltată la periferia roților din față, în kgf;

F_{t2} — forța tangențială dezvoltată la periferia roților din spate, în kgf;

F_y — componenta transversală a forței laterale care acționează asupra automobilului (se datorește forței centrifuge, înclinării transversale a căii sau vîntului lateral), în kgf;

ε_1 — unghiul de deviere laterală (derivă) a roților din față, în rad;

ε_2 — unghiul de deviere laterală (derivă) a roților din spate, în rad.

După cum rezultă din figura 1, sub acțiunea componentelor forței F_y asupra osiilor din față și din spate, iau naștere unghiurile de deviere laterală ε_1 și ε_2. În această situație viteza v_1 a punctului mijlociu al osiei din față face cu axa longitudinală a automobilului unghiul $\gamma-\varepsilon_1$, iar viteza v_2 a punctului mijlociu B al osiei din spate face cu axa longitudinală a automobilului unghiul ε_2. Centrul efectiv de viraj se mută din punctul O de pe prelungirea axei osiei din spate în punctul O_ε la intersecția perpendicularelor duse în punctele A și B pe direcția vitezelor v_1 și v_2.

Dacă se consideră automobilul ca un corp rigid care se găsește în mișcare generală, proiecțiile vitezelor a două puncte pe dreapta care unește aceste puncte sînt egale. Acest rezultat se datorește rigidității corpului. Dacă proiecțiile nu ar fi egale ar rezulta fie o apropiere, fie o îndepărtare între cele două puncte considerate, ceea ce nu este posibil pentru un rigid.

Considerîndu-se punctele A și B de pe axa longitudinală a automobilului, conform celor arătate mai sus se poate scrie:

$$v_2 \cdot \cos \varepsilon_2 = v_1 \cdot \cos (\gamma - \varepsilon_1). \tag{1}$$

Vitezele, punctelor mijlocii ale osiilor sînt date de relațiile:

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{r1} \cdot \omega_{d1}, \\ v_2 &= r_{r2} \cdot \omega_{d2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Înlocuind în relația 1 expresiile vitezelor v_1 și v_2 date de relațiile 2 și dacă se ține seama că $\omega_{d1} = \omega_{d2}$ (reductor-distribuitor fără diferențial între osii) se obține:

$$r_{r2} \cdot \cos \varepsilon_2 = r_{r1} \cdot \cos (\gamma - \varepsilon_1). \tag{3}$$

Dependența dintre forța tangențială și raza de rulare r_r a unei roți cu bandaj pneumatic este dată [1] de relația:

$$r_r = r_c - \lambda \cdot F_t \tag{4}$$

în care :

F_t este forța tangențială dezvoltată la periferia roții ;
λ — coeficient de elasticitate tangențială a pneului.

Pentru roțile unui automobil 4×4 se poate scrie :

$$r_{r1} = r_{c1} - \lambda_1 \cdot F_{t1}$$
$$r_{r2} = r_{c2} - \lambda_2 \cdot F_{t2}. \tag{5}$$

Dacă se înlocuiesc expresiile razelor r_{r1} și r_{r2} date de relațiile 5 în relația 3 și se consideră $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ se obține o relație între F_{t2} și F_{t1} :

$$F_{t2} = F_{t1} \cdot \frac{\cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\cos \varepsilon_2} - \frac{r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2}{\lambda \cdot \cos \varepsilon_2}. \tag{6}$$

În timpul deplasării automobilului există în fiecare moment o egalitate între rezistențele la înaintare și forțele tangențiale dezvoltate la periferia roților, deci :

$$F_{t1} + F_{t2} = \Sigma R. \tag{7}$$

Considerînd ecuațiile 6 și 7 rezultă valoarea forțelor tangențiale F_{t_1} și F_{t_2}:

$$F_{t1} = \frac{1}{\cos(\gamma - \varepsilon_1) + \cos \varepsilon_2} \cdot$$
$$\cdot \left[\Sigma R \cdot \cos \varepsilon_2 - \frac{r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2 - r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\lambda} \right]; \tag{8}$$

$$F_{t2} = \frac{1}{\cos(\gamma - \varepsilon_1) + \cos \varepsilon_2} \cdot$$
$$\cdot \left[\Sigma R \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - \frac{r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2}{\lambda} \right] \tag{9}$$

Cunoscînd forțele tangențiale se pot deduce momentele ce revin roților :

$$M_1 = F_{t1} \cdot r_{r1} = \frac{r_{r1}}{\cos(\gamma - \varepsilon_1) + \cos_2} \cdot$$
$$\cdot \left[\Sigma R \cdot \cos \varepsilon_2 - \frac{r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2 - r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\lambda} \right] \tag{10}$$

$$M_2 = F_{t2} \cdot r_{r2} = \frac{r_{r2}}{\cos(\gamma - \varepsilon_1) + \cos \varepsilon_2} \cdot$$
$$\cdot \left[\Sigma R \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - \frac{r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2}{\lambda} \right]. \tag{11}$$

Relațiile 8, 9, 10 și 11 sînt valabile numai la deplasarea automobilului pe drumuri nedeformabile. În cazul deplasării pe drumuri deformabile în afară de deformarea tangențială a pneului se mai produce și deformarea drumului, rezultînd relații de calcul mult mai complicate.

Din analiza relațiilor 8, 9, 10 și 11 se constată că atît mărimea cît și sensul forțelor tangențiale și a momentelor, depind de rezistențele la înaintare ale automobilului, de unghiul de bracare a roților de direcție, de deviația laterală a roților datorită elasticității transversale a pneurilor și de razele de rulare ale roților pentru cazul forței tangențiale nule. Forțele tangențiale și momentele devin negative în următoarele cazuri :

$$a) \quad F_{t1} < 0 \quad \text{și} \quad M_1 < 0$$

pentru (12)

$$\Sigma R \cdot \lambda \cdot \cos \varepsilon_2 < r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2 - r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1)$$

$$b) \quad F_{t_2} < 0 \quad \text{și} \quad M_2 < 0 \tag{13}$$

$$\Sigma R \cdot \lambda \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) < r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1) - r_{c2} \cdot \cos \varepsilon_2 .$$

Dacă momentul motor (sau forța tangențială) a unei osii este mai mic decît zero se produce fenomenul denumit „circulația de puteri".

În principiu acest fenomen constă în faptul că una dintre roțile motoare (cu momentul negativ) acționează ca element de frînare în cursul mișcării, iar organele transmisiei sînt solicitate de forțe suplimentare importante. Prin roțile motoare cu momentul $M>0$ se transmite o putere mai mare decît cea necesară pentru a învinge rezistențele la înaintare a automobilului. Excesul de putere se transmite prin cadru sau prin caroserie, de la aceste roți, la roțile cu momentul $M<0$. De la aceste roți, puterea suplimentară, prin dispozitivul de acționare a lor se transmite la reductorul-distribuitor și mai departe la roțile cu momentul $M>0$. Deci circulația de puteri apare atunci cînd forțele tangențiale sau momentele roților devin negative.

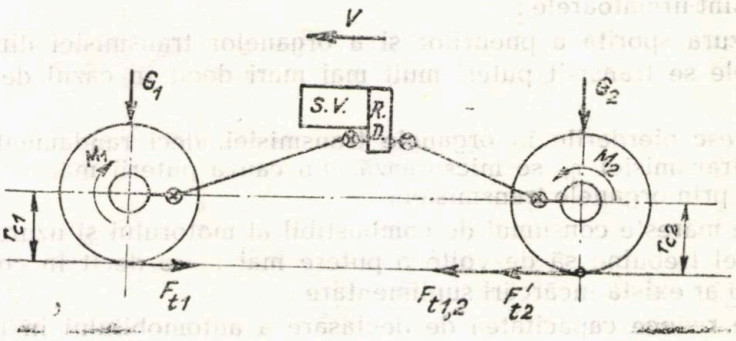


Fig. 2

Puterile corespunzătoare încărcărilor suplimentare pot ajunge în anumite condiții la valori care depășesc cu mult puterea necesară pentru a învinge rezistențele la mișcarea automobilului.

Pentru exemplificare se consideră un automobil cu două osii motoare (fig. 2) care se deplasează în linie dreaptă pe o cale orizontală și care are razele roților osiei din față mai mici decît ale roților osiei din spate.

La roțile din față apare forța $F_{t_1}<0$ datorită faptului că roțile din față, presupuse cu raza mai mică, au tendința de a aluneca pe cale o dată cu rostogolirea acționînd astfel ca niște roți frînate.

Acest lucru se explică prin faptul că antrenarea osiilor motoare (al căror centru are aceeași viteză de deplasare V ca și automobilul) făcîndu-se fără un mecanism diferențial între ele, roțile au aceleași viteze unghiulare, vitezele tangențiale pe cale fiind însă diferite din cauza diferențelor razelor de rulare.

Reacțiunea tangențială a căii F_{t_1} care este de sens opus cu viteza V a automobilului acționînd ca o forță de frînare, dă naștere la un moment de frînare M_1 care se transmite de la roțile din față, arborele longitudinal din față, distribuitor, arborele longitudinal din spate la roțile din spate suprapunîndu-se peste momentul primit de la motor. Momentul M_1 va da naștere la roțile din spate la forța de tracțiune $F_{t_{1\,2}}$ care se adaugă la forța F_{t_2} rezultată din momentul primit de la motor.

Puterea corespunzătoare încărcării suplimentare datorită forței de frînare F_{t_1} de la osia din față va fi dată de expresia :

$$P_s = \frac{F_{t_1} \cdot V}{270} = \frac{V}{\cos(\gamma - \varepsilon_1) + \cos\varepsilon_2} \cdot \left[\Sigma R \cdot \cos\varepsilon_2 - \frac{r_{c2} \cdot \cos\varepsilon_2 - r_{c1} \cdot \cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\lambda}\right] \cdot \frac{1}{270} \cdot \tag{14}$$

Efectele dăunătoare ale puterii corespunzătoare încărcărilor suplimentare sînt următoarele :

— uzura sporită a pneurilor și a organelor transmisiei din cauză că prin ele se transmit puteri mult mai mari decît în cazul deplasării normale ;

— cresc pierderile în organele transmisiei, deci randamentul mecanic al transmisiei η_t se micșorează, din cauza puterii mărite care se transmite prin organele transmisiei ;

— se mărește consumul de combustibil al motorului și uzura pieselor sale, el trebuind să dezvolte o putere mai mare decît în condițiile în care nu ar exista încărcări suplimentare ;

— se reduce capacitatea de deplasare a automobilului în terenuri grele deoarece se micșorează forța de tracțiune disponibilă.

3. Analiza influenței diverșilor factori asupra încărcărilor suplimentare ale transmisiei

După cum s-a arătat mărimea și sensul forțelor tangențiale și a momentelor care acționează asupra roților fiecărei osii motoare depind de următorii factori :

— diferența dintre razele de rulare ale roților corespunzătoare forțelor tangențiale nule a celor două osii motoare ($\Delta r = r_{c2} - r_{c1}$) ;

— rezistențele care se opun deplasării automobilului ;

— unghiul de bracare al roților de direcție ;

— devierea laterală a roților datorită elasticității transversale a pneurilor.

Pentru a scoate în evidență influența diverșilor factori asupra momentelor roților motoare, analiza se va face luîndu-se inițial în considerare numai cîte unul din factori, iar apoi cîte doi etc.

a. *Influența diferenței razelor de rulare a roților celor două osii*

Se consideră un automobil, cu ambele osii motoare, care se deplasează în linie dreaptă ($\gamma = 0$) și la care se neglijează și deviația laterală a roților ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$). Presupunînd că raza roților din față diferă față de raza roților din spate, relațiile 10 și 11 vor deveni :

$$M_1 = \frac{r_{r1}}{2}\left(\Sigma R - \frac{r_{c2} - r_{c1}}{\lambda}\right) \text{ sau } M_1 = \frac{r_{r1}}{2}\left(\Sigma R - \frac{\Delta r}{\lambda}\right), \qquad (15)$$

$$M_2 = \frac{r_{r2}}{2}\left(\Sigma R - \frac{r_{c1} - r_{c2}}{\lambda}\right) \text{ sau } M_2 = \frac{r_{r2}}{2}\left(\Sigma R + \frac{\Delta r}{\lambda}\right). \qquad (16)$$

unde :

$$\Delta r = r_{c2} - r_{c1}.$$

Diferența dintre razele de rulare corespunzătoare forțelor tangențiale nule se poate datori presiunii inegale a pneurilor (pentru aceleași sarcini pe roți) sau folosirii unor pneuri care nu sînt identice ca model, material sau ca grad de uzură.

Din analiza relațiilor 15 și 16 se constată o variație lineară a momentelor în raport cu Δr.

O dată cu creșterea variabilei Δr momentul M_1 scade iar momentul M_2 crește și invers.

La anumite valori pe care le poate avea Δr unul din momente poate deveni negativ apărînd circulația de puteri.

Pentru a ilustra mai bine influența diferenței dintre razele de rulare asupra momentelor la osii se va analiza un caz concret.

Se consideră autocamionul „Carpați" SR-132 care are următoarele date caracteristice : greutatea totală $G_a = 5\,700$ kgf ; suprafața transversală $A = 5$ m² ; coeficientul aerodinamic $K = 0{,}06$; pneurile 9,75—18" ; coeficientul de elasticitate tangențială a pneurilor $\lambda = 0{,}04$ mm/kgf.

Presupunînd că autocamionul se deplasează pe o șosea asfaltată orizontală caracterizată prin coeficientul de rezistență la rulare $f = 0{,}02$,

cu o viteză constantă $V = 50$ km/h, rezistențele la înaintare vor fi : rezistența la rulare R_r și rezistența aerului R_a

$$\left(\varepsilon R = f \cdot G_a + \frac{K \cdot A \cdot V^2}{13} = 172 \text{ kgf} .\right)$$

Pentru a reprezenta grafic momentele M_1 și M_2 se consideră o variație pentru Δr cuprinsă între limitele întîlnite în practică (-12 mm $\leqslant \Delta r \leqslant 12$ mm).

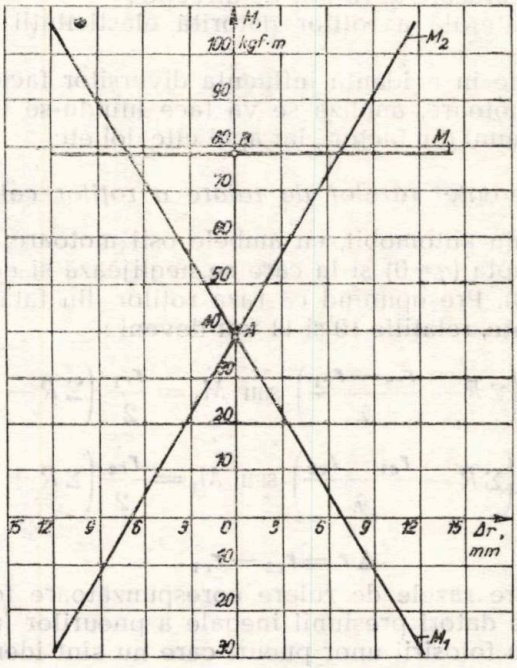


Fig. 3

Analizînd variația momentelor M_1 și M_2 (fig. 3) rezultă următoarele observații :

— atît momentul M_1 cît și momentul M_2, pentru anumite valori ale lui Δr, devin momente de frînare cînd apare circulația de puteri.

— cu cît unul din momente se micșorează cu atît celălalt crește astfel că suma lor să rămînă constantă și egală cu momentul necesar pentru a învinge rezistențele la înaintare (momentul M corespunzător orizontalei dusă prin punctul B) ;

— pentru cazul în care $\Delta r = 0$ și $M_1 = M_2$ (punctul A) ;

— în cazul cînd unul din momente devine negativ, momentul motor de la cealaltă osie va trebui ca în afară de rezistențele la înaintare să învingă și momentul frînă.

b. *Influența rezistențelor care se opun deplasării automobilului*

Dacă se consideră un automobil care se deplasează în linie dreaptă ($\gamma=0$) cu aceleași raze de rulare pentru toate roțile ($\Delta r=0$) și la care se neglijează devierea laterală a roților ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$), momentele care revin celor două osii sînt date de relațiile :

$$M_1=\frac{r_r}{2}\cdot\Sigma R, \tag{17}$$

$$M_2=\frac{r_r}{2}\cdot\Sigma R. \tag{18}$$

Din aceste două relații rezultă că o dată cu creșterea rezistențelor la înaintare cresc și momentele M_1 și M_2.

În condițiile considerate momentele vor deveni negative cînd și ΣR devine negativă. La mersul normal nu se întîlnesc situații în care un moment să fie pozitiv, iar celălalt negativ (momentul de frînare), cele două momente fiind egale atît ca mărime cît și ca semn.

Circulația de puteri va apare atunci cînd ΣR la roțile uneia dintre osii devine negativă iar la cealaltă rămîne pozitivă (cazul trecerii unor denivelări sau obstacole ale căii).

c. *Influența unghiului de bracare ale roților de direcție*

Pentru studiul influenței unghiului de bracare al roților de direcție se consideră că roțile celor două osii au aceeași rază de rulare ($\Delta r=0$) și se neglijează de asemenea devierile laterale ale roților ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$).

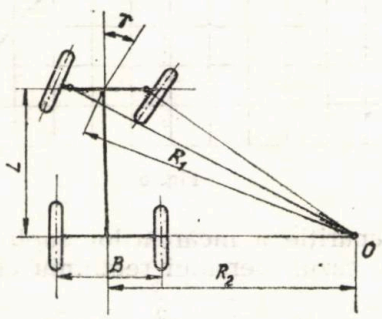


Fig. 4

În acest caz, momentele care revin celor două osii vor fi date de relațiile :

$$M_1=\frac{r_r}{1+\cos\gamma}\left[\Sigma R-\frac{r_c}{\lambda}\cdot(1-\cos\gamma)\right], \tag{19}$$

$$M_2=\frac{r_r}{1+\cos\gamma}\left[\Sigma R\cdot\cos\gamma+\frac{r_c}{\lambda}\cdot(1-\cos\gamma)\right]\cdot \tag{20}$$

În cazul deplasării în viraj a unui automobil, drumurile parcurse de roțile osiei din față sînt mai lungi decît cele corespunzătoare ale roților din spate (fig. 4).

La fiecare roată din față apare după o anumită înclinare un moment de frînare proporțional cu diferența (R_1—R_2) dintre razele de viraj ale centrelor osiilor, diferență cu atît mai mare cu cît unghiul de bracare a roților de direcție este mai mare.

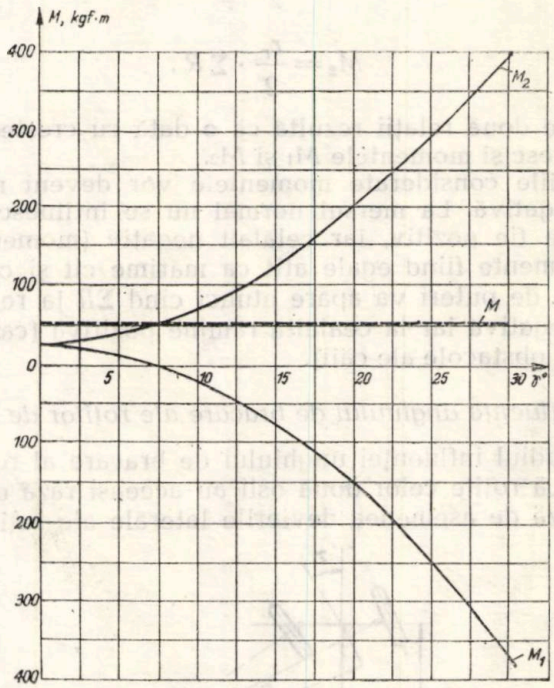


Fig. 5

Fenomenul de apariție a încărcărilor suplimentare ale transmisiei este același ca și în cazul mersului rectiliniu cu raze diferite la roțile celor două osii.

Pentru exemplificare se consideră autocamionul „Carpați" SR-132 care se deplasează pe o cale orizontală caracterizată prin coeficientul de rezistență la rulare $f=0{,}02$, viteza de deplasare fiind $V=10$ km/h, iar unghiul γ de bracare al roților de direcție variind între 0—30° (valori întîlnite mai des în practică).

$$\text{In acest caz } \Sigma R = f \cdot G_a + \frac{K \cdot A \cdot V^2}{13} \approx 117 \text{ kgf.}$$

În figura 5 s-a trasat variația momentelor M_1 și M_2. Analizînd figura 5 se observă că M_1 devine moment de frînare de la o valoare des-

tul de mică a unghiului γ, atingînd valori negative foarte mari pentru unghiul de bracare de 30°.

Se constată de asemenea că M_2 atinge valori cu mult mai mari decît cele necesare deplasării în linie dreaptă (orizontală notată cu M) tocmai pentru a învinge momentul de frînare M_1 în plus peste momentul M necesar deplasării automobilului.

d. *Influența diferenței dintre razele de rulare ale roților și a rezistențelor la înaintare ale automobilului*

Pentru a studia aceste influențe se consideră că rezistențele la înaintare variază o dată cu variația coeficientului de rezistență la rulare f al căii.

Se consideră un autocamion care se deplasează pe o cale orizontală caracterizată prin coeficientul de rezistență la rulare f_1 și apoi pe

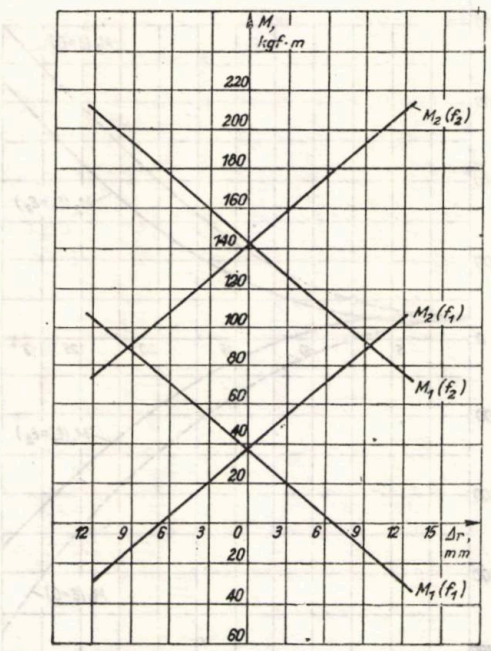


Fig. 6

altă cale orizontală caracterizată prin f_2. Viteza de deplasare pe ambele căi se presupune aceeași. În același timp se presupune că variază și razele de rulare ale roților celor două osii.

Pentru exemplificare se consideră autocamionul „Carpați" SR-132 care se deplasează cu viteza $V = 50$ km/h, inițial pe o cale cu coeficientul de rezistență la rulare $f_1 = 0{,}02$ și apoi pe alta cu $f_2 = 0{,}1$. Se consideră de asemenea că Δr variază între $\pm$ 12 mm.

În figura 6 s-a reprezentat variația momentelor M_1 și M_2 pentru ambele cazuri considerate.

Din analiza figurii 6 rezultă că momentele negative apar la o valoare mai mică a lui Δr dacă se circulă pe o cale bună (f_1).

În cazul circulației pe o cale cu rezistențe mari (f_2) „circulația de puteri" nu se produce la valorile Δr întîlnite în practică.

e. *Influența unghiului de bracare a roților de direcție și a devierii laterale*

În figura 7 se reprezintă variația momentelor M_1 și M_2 ținîndu-se seama și de devierea laterală a roților datorită elasticității transversale a pneurilor considerîndu-se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3°$, iar unghiul de bracare al

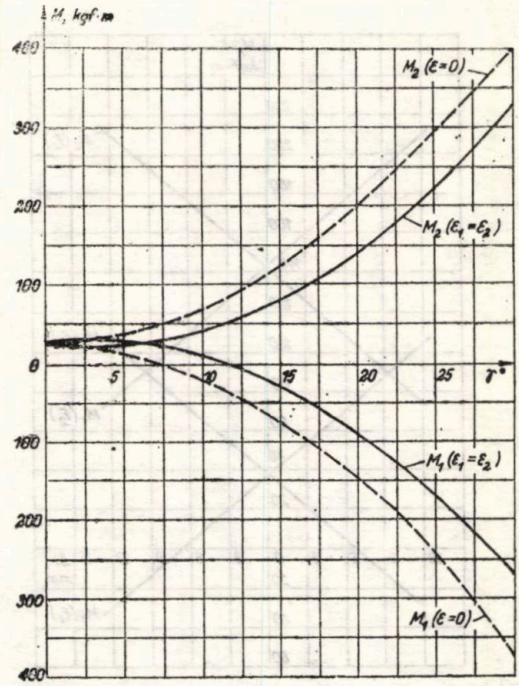


Fig. 7

roților de direcție variind între 0—30°. Pentru comparație pe aceeași figură s-au reprezentat și momentele M_1 și M_2 fără a se ține seama de devierea laterală ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$).

Din analiza figurii 7 rezultă că M_1 și M_2 scad în valoare absolută față de cazul în care se neglijează devierea roților și o dată cu aceasta „circulația de puteri" care rezultă, se reduce.

4. Măsuri pentru diminuarea efectelor dăunătoare ale puterii corespunzătoare încărcărilor suplimentare

Pentru diminuarea efectelor dăunătoare ale puterii corespunzătoare încărcărilor suplimentare se recomandă următoarele :

— menținerea aceleași presiuni în toate pneurile în timpul exploatării, dacă sarcina pe roți este aceeași, sau a unei presiuni proporționale cu sarcina (conform indicațiilor fabricii constructoare) ;

— evitarea de a se efectua viraje cu rază mică ;

— utilizarea unor pneuri identice ca material, model și uzură ;

— prevederea unui dispozitiv pentru decuplarea osiilor motoare (tracțiune pe o singură osie) la mersul pe drumuri cu rezistențe la înaintare mici (șosele).

5. Concluzii

— Relațiile obținute permit să se determine repartiția momentului motor între osiile unui automobil cu două osii motoare (4×4) în funcție de devierea laterală a roților datorită elasticității transversale a pneurilor, diferența dintre razele de rulare ale roților, rezistențele care se opun deplasării automobilului și unghiul de bracare al roților de direcție.

— Relațiile 8, 9, 10 și 11 spre deosebire de cele existente în literatură [2], [3] și [4] permit și analiza influenței devierii laterale a roților, datorită elasticității transversale a pneurilor asupra repartiției momentului la osiile motoare. În modul acesta se obțin rezultate mai apropiate de realitate.

— Se analizează de asemenea influența diverșilor factori asupra repartiției momentului motor între osii făcîndu-se și o serie de observații importante.

— Se mai analizează efectele dăunătoare ale „circulației de puteri" și se indică măsurile de luat în considerație atît la proiectare cît și în exploatare.

Catedra autovehicule rutiere
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ciudakov, A. E.* — Izbrannîe trudî. Tom. I, Moskva, Izdatelstvo AN SSSR, 1961.

2. *Ghiulai, C.* — Mecanica automobilului, București, Ed. tehnică, 1965.

2. *Lewin, A. L.* — Zur Frage des Blindleistungsumlaufs im Triebwerk eines Kraftfahrzeugtechnik Nr. 7 și 8 din 1965.

4. *Litvinov, A. S., Rotenberg, R. V., Frumkin, A. K.* — Șasiî avtomobilea, Moskva, Maşghiz, 1963.

I. P. Grafica Nouă" II — c. 10442

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

[illegible]

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 5 ANUL 1969
SEPTEMBRIE—OCTOMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI"
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

1383

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXI — NUMĂRUL 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE
1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Conf. dr. ing. *Petru Baltă* ; Academician prof. *Marin Bercovici* ; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* ; Conf. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua* ; Conf. dr. *Ion Grădișteanu* ; Conf. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific) ; Prof. *Constantin Ionescu-Bujor*, Profesor emerit ; Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu* ; Prof. ing. *Ștefan Mantea* ; Prof. dr. ing. *Marius Preda* ; Prof. ing. *Mihai Renert* ; Conf. *Mircea Soare* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. docent *Radu Voinea* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

Redactor responsabil:

Rector

Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

M. St. Botez

Asupra unui mod de generare a conoidului Plücker 17

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Adsorbția amoniului și fixarea potasiului în bentonite . . . 23

C. Bejan

Influența concentrației substanțelor capilar active asupra extracției lichid-lichid 35

Fl. Daneș

Nou criteriu de optimizare a proceselor de separare 51

Gr. Teodorescu

Metodă de determinare a bicarbonatului de amino-guanidină . . 61

ORGANE DE MAȘINI

Tr. Demian

Asupra teoriei, calculului și încercării lagărelor pentru vîrfuri . . 65

REZISTENȚA MATERIALELOR

D. Voiculescu

Contributions à la détermination des déformations et des efforts par la méthode des paramètres initiaux à la barre droite à section constante et à section variable en degrès 83

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

N. Apostolescu

Calculation of the Rate of Heat Release in the Direct — injection Diesel Engine 97

ENERGETICA

A. Carabulea

Contribution à l'étude de l'influence des reseaux éléctrique sur les circuits des télécommunications 115

TRANSPORTURI

P. Frîncu, S. Raicu

Studiul solicitării intersecțiilor de cale ferată 131

Резюме

Д. К. 513.5/8

М. Ст. Ботез

Относительно способа генерирования коноида плюкера

Находится генерирование коноида, как геометрического места при помощи линейной конгруенции и устанавливаютея геометрическим путем при помощи эпюры Монжа несколько новых соотношений между коноидами Плюкера сконструированными таким образом и применяяемыми параболоидами линейной конгруенции.

Находятся также пучки коноидов, когда одной из фокусных прямых дается перемещение, и выводится несколько теорем.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 66.074 : 661.5 : 661.3 : 622.3 : 631.88./84

Т. Ионеску, И. Г. Константинеску

Абсорбция амония и фиксирование калия в бентонитах

Авторы исследуют абсорбцию и ионный обмен на местном бентоните. Исследовалась задержка ионов амония и калия и было установлено особое значение способов обработки бентонита в этих процессах.

Заключения, к которым пришли авторы после проведенных испытаний, указывают на возможность фиксирования амония и калия на бентонитах в значительных количествах (90—125 мвал/г бентонита), что позволяет использовать это ионнитическое удобрение.

Себестоимость бенто-ионнитического удобрения невысокая.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 66.061.5 : 661.731 : 662.753.21

К. Бежан

Влияние концентрации активных капиллярных веществ на вытяжку жидкость — жидкость.

Иселедовалось влияние некоторых активных капиллярных веществ (с активным аннионом и катионом) на вытяжку кислоты из бензойных растворов (дисперсной фазы) в воде (непрерывная фаза). Было установлено, что для низких концентраций активных капиллярных веществ, находящихся в пределах $10^{-6} — 10^{-2}$ моль/л, кривая изменения вытяжки уксусной кислоты цредставляет собой резкий минимум. Для концентраций капиллярных активных веществ, близких к 10^{-2} моль/л, вытянутая уксусная кислота в некоторых случаях соответствует той, которая была получена в экстракциях, в которых не было активных капиллярных веществ.

Из этих данных, а также из вариации параметров экстракции, установлен механизм экстракции в присутствии активных капиллярных веществ.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Summary

D.C. 513.4/.8

M. Şt. Botez

On the Plücker Conoid Generating Manner

A monoid generating is found as locus by means of a linear congruence and some new relations between the Plucker conoids constructed by means of a Monge epure and the paraboloids of the linear congruence used are geometrically determined.

The conoid beams are also found for the case a shift is applied to one of the focal lines, determining some theorems.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 66.074 : 661.5 : 661.3 : 622.3 : 631.83/.84

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Ammonium Adsorption and Potassium Fixing in Bentonites

The authors study the native bentonite adsorption and ion exchange. The ammonium and potassium ion retention has been studied determining the special role of the bentonite processing manner within these processes.

The conclusions resulting from researches show that there is a possibility to fix ammonium and potassium on bentonite in considerable amounts (90 to 125 mval/g. of bentonite), fact allowing its use as ionitic fertilizer.

The cost price of the bento-ionitic fertilizer is low.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 66.061.5 :661.731 : 662.753.21

C. Bejan

Influence of the Strength of Capillary-active Substances on the Liquid-liquid Extraction

The influence of a number of capillary-active substances (both cation-active and anion-active) on the acetic acid extraction from benzenic solutions (disperse phase) in water (continuous phase) has been studied. Onehas found that for low concentrations of capillary-active substance within 10^{-6} and 10^{-2} mole/litre, the variation curve of the acetic acid extracted shows a marked minimum. With concentrations of cappillary-active substance near 10^{-3} mole/litre, the extracted acetic acid corresponds, in some cases, to that obtained in extraction when capillary-active substances are absent.

Conclusions have been drawn from these data as well as from the variation of the extraction parameters on the extraction mechanism when capillary-active substances are present.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 66.022 : 621.928 : 541.01

Фл. Данеш

Новый критерий оптимизации процессов разделения

В работе предложен критерий оптимизации операций разделения, позволяющий выбор оптимальных значений числовых отношений фаз. Оптимизация состоит в максимализации отношения между эффектом разделения и усилием разделения, последний равен сумме объемов веществ, циркулирующих в сепарационную уетановку, а первый равняясъ минимальному усилию необходимому в случае идеальной установки. Предлагаемый критерий приложим к любому процессу разделения без введения конкретных коммерческих ценностей. Он устраняет недостатки других ранее расмотренных критериев оптимизации.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 547.497.1 : 543/545 : 546

Гр. Теодореску

Метод установления бикарбоната амино-гуанедина.

В данной статье изложен метод установления бикарбоната аминогуанедина. Метод может применяться для синтеза этого продукта как такового и при его применении в синтезе 3-амино 1, 2, 4-триазоля или кислоты 3-амино 1, 2, 4 триазоля — 5 карбоксил.

Метод основывается на усложнении амино-катионизированной группы с солью Рейнеке. Учитывая высокую растворимость комплекса в воде, необходимо производить усложнение в водяном растворе серной кислоты концентрации 25 % и затем прочищать комплекс эфиром. Комплекс легко разбавляется в ацетоне. В дальнейшем рейникат серебра осаждают и титруют остаток азотата серебра известным методом.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 621.822.5 : 621.891 : 621.924 : 620.178.1

Тр. Демьян

К теории расчета и испытания опор на кернах

В статье дается краткий обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований относительно опор на кернах изложенных в докторской диссертации автора. После предварительных теоретических выводов к теоретическому изучению явлений трения, предположений динамического расчета и расчета износа, представляется метод, разработанный автором, для определения момента трения и полученные результаты с помощью этого метода.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 624.044 : 624.07 : 539.3/4

Д. Войкулеску

К определению деформаций и усилий методом начальных параметров в прямом стержне с постоянным сечением и с переменным ступенчатым сечением.

Путем применения матрициального исчисления выводится выражение вектора деформации-усилия в весьма общей форме для прямой балки с постоянным сечением и указывается аналогия данного выражения с выражением изгибающего момента для прямой балки. Анализируются различные предельные случаи. В дальнейшем изучается ступенчатое изменение сечения в случае прямых балок и в сдучае круглых дисков во вращательном движении, нагруженные симметрически.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 66.022 : 621.928 : 541.01

Fl. Daneş

New Criterion for Optimizing the Separation Processes

A criterion for optimizing the separation operations has been proposed. which allows the selection of the optimal values of the phase quantitative ratios. The optimizing consists in maximizing the ratio between the separation effect and the separation effort, the last being equal to the sum of the flows circulating in the separation plant and the first with the minimal stress required in case of ideal separation. The suggested criterion may be applied to any separation process without introducing actual commercial values and eliminates the disadvantages shown by other previously discussed optimizing criteria.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 547.497.1 : 543/545 : 546

Gr. Teodorescu

Method of Determination for Amino- guanidine Bicarbonate

The methode consiste in the complexation of the group amino-quanidine bicarbonate. The method is applicable for the two cases : at the synthesis of this product and at utilisation of this product for the synthesis of 3- amino-1,2,4 — tryazole or 3-amino-1,2,4 — tryazole — 5 carboxylic acid.

The method consiste in the complexation of the group amino cationised with Reinecke salt. As the complex is very soluble in water, the complexation must be made in aqueous solution of sulfuric acid (25% conc.) and the purification of the complex with ether. The complex is easlily disolved in acetone. Further on the reinecate of silver is precipitated and the excess of silver azotate is titrated in the known way.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 24.044 : 624.07 : 539.3/.4

Tr. Demian

On the Theory, Calculation and Testing of Point Bearing

The paper deals with a brief reviewing of the theoretical and experimental results of the researches submitted in the author's doctorate degree thesis concerning the point bearings. After a previous theoretical study of the friction phenomena, dynamic calculation and waring hypotheses, the method elaborated by the author for the determination of the friction torque and the results obtained by means of it are further submitted.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 624.044 : 624.07 : 539.3/.4

D. Voiculescu

Contributions to Distortion and Stress Determination Through the Initial Parameter Method with a Straight bar or Constant and of step Variable Cross-section

By using the matrix calculus, the distortion-stress vector expression is deduced in a very general shape for the straight beam of constant cross-section and the analogy of the expression with that of the straight beam bending moment is made evident. Further the cross-section step variation is studied for the case of straight bars and axially symmetric loaded circular disks in rotating motion. The cases indicated above are analysed for varions boundary conditions.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 621.431 : 621.43-4 : 621.436 : 62.001.24

Н. Апостолеску

Вычисление скорости выделения тепла в дизельном двигателе с прямым инжектированием

В работе представлен новый методвычисления закона выделения тепла в дизельном двигателе с прямым инжектированием, который увязывает закон сгорания с законом инжектирования, а также особенности образования смеси. Метод схематизирует оба главных механизма сгорания в данном двигателе : сгорание предобразованных смесей и сгорание турбулентно диффузивное. Физическая модель, принятая для диффузивного сгорания, выражает существенно нестационарный характер процессов испарения и сгорания топлива.

Метод позволяет произведение расчетов с повышенной точностью и может быть использован, например, при изучении оптимизации закона инжектирования.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 621.316 : 621.3.02 : 621.39 : 518.5

А. Карабуля

К вопросу о влиянии электрических сетей на контур связи

В работе представлены математические модели и общая логическая схема для изучения влияния электросетей с помощью цифровых вычислительных машин.

Отношения расчета вводимых в контуры связи величин являются общими и включают частные случаи, описанные в литературе. Построенная логическая схема, с одной стороны, облегчает определение импедансов и проводимостей и позволяет, с другой стороны, производить расчет как токов короткого замыкания оказывающей влияние цепи, так и токов и напряжений, индуктируемых в контурах слабого тока.

Выведенный алгоритм проверен на вычислительной машине ОДРА — 1013 на основе программы МОСТ — 1 и на основании цифровых данных, полученных при проектировании электрической линии в 400 кв.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Д. К. 656.2 : 625.1/2 : 656.40

П. Фрынку, Ш. Райку

Исследование нагрузки железнодорожных Н. Н. пересечений.

В работе выводятся оригинальные соотношения относительно нагрузки железнодорожных пересечений с использованием теории вероятности.

Демонстрируется, что существующие соотношения в литературе по специальности представляют собой частные случаи. Предложенные соотношения соответствуют всевозможным елучаям нагрузки железнодорожных пересечеий для врождебных Иоршрутов.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 621.431 : 621.43-4 : 621.436 : 62.001.24

N. Apostolescu

Calculation of the Rate of Heat Release in the Direct Injection Diesel Engine

The work submits a new calculation method of the rate of heat release in the direct injection Diesel engine, which correlates the combustion law with the injection law and the mixing process features. The method is schematizing the two essential mechanisms of the combustion in this engine : combustion of the preformed mixture and diffusive turbulent combustion. The physical pattern adopted for the diffusive combustion expresses the essential nonstationary character of the fuel vaporization and combustion.

The method allows the carrying out of high accuracy calculation and may be used, for instance, with studies for the optimizing of the fuel injection law.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.C. 621.316 : 621.3 02 : 621.39 : 518.5

A. Carabulea

Contribution to The Study of Electric Network Influence on Telecommucation Circuits

Mathematical models and the general logical diagram are submitted for the study of the electric network influence, by means of digital computers.

The calculating relations of the induced magnitudes in the telecommunication circuits are general and include the special cases dealt with in literature. The plotted logical diagram facilitates, on one hand, the impedances and admittance determination and allows, on the other hand, the calculation both of the shortcircuit currents in the influencing network and that of the induced currents and voltages in the weak current circuits.

The conceived algorithm has been tested on the ODRA-1013 digital computer on basis of the MOST-1 programme and of a digital example effected with the designing data of an electric line of 400 kV.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

P. Frîncu, S. Raicu

Study of the Railway Crossing Solicitation

The work determines original relations concerning the solicitation of the railway crossings by using the probability theory .

It proves that the relations existing in the specialized literature represent special cases. The relations proposed correspond to all the possible cases of railway crossing solicitation for n incompatible covered distances.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Résume

C.D. 513.5/.8

M. Şt. Botez

Sur un moyen de produire le conoïde Plücker.

On trouve une manière de produire le conoïde comme lieu géométrique ,à l'aide d'une congruence linéaire et on établit géométriquement, au moyen d'une épure Monge, quelques relations nouvelles entre les conoïdes Plücker ainsi construits et les paraboloïdes de la congruence linéaire utilisée.

On trouve aussi les faisceaux de conoïdes quand à l'une des droites focales on applique un déplacement et l'on établit quelques théorèmes.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 66.074:661.5:661.3:622.3:631.83/.84

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Adsorption de l'ammonium et fixation du potassium à la bentonite.

Les auteurs étudient l'adsorption et l'échange d'ions sur des bentonites indigénes.

On a étudié la rétention des ions d'ammonium et de potassium, en établissant le rôle spécial de la manière de traiter la bentonite en ces processus.

Les conclusions qui ressortent de ces recherches indiquent qu'il est possible de fixer l'ammonium et le potassium sur la bentonite en quantités appréciables (90 à 125 mvl/g de bentonite) ce qui permet l'utilisation de celle-ci comme engrais ionitique.

Le prix de revient de l'engrais bento-ionitique est bas.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 66.061.5:661.731:662.753.21

C. Bejan

Influence de la concentration des substances capillairement actives sur l'extraction liquide-liquide.

On a étudié l'influence d'un nombre de substances capillairement actives (tant cation actives qu'anion actives) sur l'extraction de l'acide acétique des solutions benzéniques (phase disperse) en eau (phase continue). On a constaté que, pour de petites concentrations de substances capillairement actives comprises entre 10^{-6} et 10^{-2} mole/litre ,la courbe de la variation de l'acide acétique extrait présente un minimum marqué. Pour les concentrations de substance capillairement active proches de 10^{-2} mole/litre l'acide acétique extrait correspond, en certains cas, à celui obtenu à l'extraction saus substances capillairement actives.

De ces données, ainsi que de la variation des paramètres de l'extraction, on a tiré des conclusions sur le mécanisme de l'extraction en présence des substances capillairement actives.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

Zusammenfassung

D.K. 513.5/.8

M. Şt. Botez

Über eine Erzeugungsart des Plückerkonoid

Es wird eine Erzeugungsart des Konoiden als geometrischer Ort, mittels einer linearen Kongruenz gefunden und mit Hilfe von einer Monge-Epure, einige neue Verhältnisse zwischen den so zusammengestellten Konoiden und den verwendeten Paraboloiden der linearen Kongruenz geometrisch bestimmt.

Konoidenbündel werden ebenfalls gefunden, wenn eine der Fokalgeraden verstellt wird und es werden einige Theoreme bestimmt.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 66.074:661.5:661.3:622.3:631.83/.84

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu

Ammoniumabsorption und Kaliumfixierung im Bentonit

Die Verfasser studieren die Absorption und den Ionenaustausch auf inländischen Leichtbetonstein. Es wurde das Aufhalten der Ammonium- und Kaliumionen studiert und die besondere Rolle der Bentonit-Bearbeitung in diesen Vorgängen bestimmt.

Die Schlussfolgerungen der Untersuchungen zeigen, dass die Ammonium- und Kaliumfixierung auf Bentonit in beachtenswerten Mengen (90—125 mval/g Leichtbeton) möglich ist und demzufolge die Anwendung desselben als ionitisches Düngemittel erlaubt.

Der Kostenpreis des bentonit-ionitischen Düngemittels ist sehr gering.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 66.061.5:661.731:662.753.21

C. Bejan

Einfluss der kapillaraktiven Stoffkonzentration auf die Flüssigkeit-Flüssigkeit Extraktion

Es wird der Einfluss einer Anzahl kapillaraktiven Stoffe (sowohl kationaktiv, als auch anionaktiv) auf die Extraktion der Essigsäure aus Benzollösungen (disperse Phase) in Wasser (ununterbrochene Phase) studiert. Es wurde festgestellt, dass für kleine Konzentrationen von kapillaraktiven Lösungen zwischen 10^{-6}—10^{-2} Mol/1, die Änderung der gewonnenen Essigsäure ein ausgeprägtes Minimum vorweist.

Für Konzentrationen der kapillaraktiven Stoffe mit annähernd 10^{-2} Mol/1, entspricht die gewonnene Essigsäure, in einigen Fällen, der Säure, die durch Extraktion ohne kapillaraktive Stoffe gewonnen wurde.

Aus diesen Daten, sowie der Variation der Extraktion-Einflussgrössen wurden Schlussfolgerungen über den Extraktionsvorgang in Anwesenheit der kapillaraktiven Stoffe gezogen.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 66.022:621.928:541.01

Fl. Danes

Nouveau critère d'optimisation des processus de séparation.

On propose un critère d'optimisation des opérations de séparation, critère qui permet de choisir les valeurs optimales des rapports des quantités des phases. L'optimisation consiste en la maximisation du rapport entre l'effet de la séparation et l'effort de la séparation, ce dernier étant égal à la somme des débits qui circulent dans l'installation de séparation et le premier, à l'effort minimum nécessaire au cas de la séparation idéale.

Le critère proposé est applicable à n'importe quel processus de séparation, sans introduire des valeurs commerciales concrètes et élimine les inconvenients présentés par d'autres critères d'optimisation discutés antérieurement.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 547.497.1:543/545:546

Gr. Teodorescu

Méthode de détermination de l'amino-guanidine bicarbonate.

Dans l'article se présente la méthode de détermination de l'amino-guanidine bicarbonate. La méthode est applicable pour les deux cas: à la synthese de ce produit et à l'utilisation de ce produit pour la synthèse de l'amino-3-tryazol-1,2,4, ou de l'acide amino-3 tryazole-1,2,4,-carboxy-5.

La méthode consiste dans la complexation du groupe amino cationisé avec le sel de Reinecke. Etant donné, la grande solubilité du complexe dans l'eau, il faut effectuer la complexation en solution aqueuse de l'acide sulfurique (25% conc.) et la purification du complexe avec de l'éther. Le complexe se dissout facilement dans l'acétone. Par conséquence ou précipite le reinecktate d'argent et on fait la titration de l'excès de l'azotate d'argent par la voie connue.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 621.822.5:621.891:621.824:620.178.1

Tr. Demian

Sur la théorie, le calcul et, l'essai des palier à pointes.

En cet article on passe succinctement en revue les résultats des recherches théoriques et expérimentales présentées par l'auteur dans sa thèse de doctorat. concernant les paliers à pointes. Après une étude théorique préalable des phénomènes de friction, des hypothèses de calcul dynamique et d'usure, on présente la méthode élaborée par l'auteur pour déterminer le moment de frottement et les résultats obtenus au moyen de cette méthode.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 624.044:624.07:539.3/.4

D. Voiculescu

Contributions à la détermination des déformations et des efforts par la méthode des paramètres initiaux la barre droite à section constante et à section variable en degrés.

Par l'utilisation du calcul matriciel on déduit l'expression du vecteur déformations-efforts en une forme très générale pour la poutre droite à section constante et on explique l'analogie de cette expression avec celle du moment de flexion de la poutre droite. On étudie ensuite la variation en degrés de la section, au cas des barres droites et au cas des disques circulaires en mouvement de rotation axialement chargés symétriquement. Les cas ci-dessus sont analysés pour différentes conditions à la limite.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 66.022:621.928:541.01

Fl. Daneş

Neues Optimierungskriterium bei Trennungsprozessen.

Es wurde für die Trennungsoptimisierung ein Kriterium vorgeschlagen, mittels dessen das optimale Verhältnis der Phasenmengen ermittelt wird. Optimisierung besteht aus der Errechnung eines maximalen Verhältnises zwischen der. Trennungswirkung und der Trennungsanstrengung, wobeit die letzterè die Summe der in der Anlage fliessenden Ströme und die erstere die für die ideelle Trennung minimal notneudige Autstrenung bedeutet.

Das Kriterium ist bei jegliche Trennungsprozesse anwendbar, braucht keine konkrete kommerzielle. Rate und beseitigt die Unzulänglichkeiten anderer Trennungskriterien.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 547.497.1:543/545:546

Gr. Teodorescu

Methode für die Bestimmung des Amino-Guanidin-Bikarbonats

Im vorliegenden Beitrag wird die Methode für die Bestimmung des Amino-Guanidin-Bikarbonats angegeben. Die Methode ist in beiden Fällen anwendbar: bei der eigentlichen Synthese dieser Erzeugnisse, sowie bei seiner Verwendung in der Synthese des 3-Amino 1,2,4-Triasol oder der Karbonsäure 3-Amino 1,2,4-Triasol-5.

Die Methode stützt sich auf die Komplexion der Amino-Kationen-Gruppe mit dem Reinecke-Salz. Da sich der Komplex stark im Wasser auflöst, muss die Komplexion in wässeriger Schwefelsäurelösung von 25% Konzentration und die Läuterung mit Äther durchgeführt werden. Der Komplex löst sich leicht in Azeton. Anschliessend wird das Silberreinekat gefällt und der Überschuss an Silbernitrat, in der bekannten Weise, titriert.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 621.822.5:621.891:621.824:620.178.1

Tr. Demian

Über die Theorie, Berechnung und Versuch der Spitzenlager

In dem Beitrag wird eine kurze Übersicht der theoretischen und experimentellen Untersuchungen gegeben, die in der Doktorarbeit des Verfassers, über die Spitzenlager, angeführt wurden. Nach einem vorhergehenden theoretischen Studium der Reibungserscheinungen, der dynamischen Berechnungshypothesen und des Verschleisses, wird die Methode, die der Verfasser für die Bestimmung des Reibungsmoments ausgearbeitet hat, sowie die damit erzielten Ergebnisse angegebeu.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.KK. 624.044:624.07:539.3/.4

D. Voiculescu

Beiträge für die Bestimmung der Formänderungen und Kräfte durch die Methode der Anfangs-Einflussgrössen bei gerader Stange mit konstantem Schnitt und stufenweise veränderlichem Schnitt.

Durch Anwendung der Matrixberechnung wird der Ausdruck des Formänderung-Kraft-Vektors in einer sehr allgemeinen Form für den geraden Balken mit konstantem Schnitt gefolgert und die Übereinstimmung dieses Ausdrucs mit demjenigen des Biegemoments des rechten Balkens angegeben. Anschliessend wird die stufenweise Schnittvariation bei den geraden Balken und den kreisförmigen Scheiben, mit axial-symmetrischer Belastung, in Drehbewegung studiert. Die obenerwähnten Fälle werden für verschiedene Randbedingungen untersucht.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 621.431:621.43-4:621.436:62.001.24

N. Apostolescu

Calcul de la vitesse de dégagement de la chaleur au cas du moteur Diesel à injection directe.

On présente en ce travail une nouvelle méthode de calcul pour la loi de dégagement de la chaleur au cas du moteur Diesel à injection directe ,qui réalise la corrélation entre la loi de la combustion et la loi de l'injection et les particularités de la formation du mélange. La méthode schématise les deux mécanismes essentiels de la combustion dans ce moteur : la combustion des mélanges formés au préalable et la combustion turbulente diffusive. Le modèle physique adopté pour la combustion diffusive exprime le caractère esentiellement non-stationnaire des processu de vaporisation et de combustion du combustible.

La méthode permet d'effectuer des calculs de haute précision et peut être utilisée, par exemple, pour les études d'optimisation de la loi d'injection du combustible.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D .621.316:621.3.02:621.39:518.5

A. Carabulea

Contribution à l'étude de l'influence des réseaux éléctriques sur les circuits des télécommunications.

On présente les modèles mathématiques et le schéma logique général pour l'étude de l'influence des réseaux électriques à l'aide des calculateurs numériques.

Les relations de calcul des grandeurs induites dans les circuits de télécommunications sont générales et renferment les cas particuliers traités dans la littérature.

Le schéma logique construit facilite d'une part la détermination des impédances et des admittances mutuelles pour les divers modèles de rapprochements, et d'autre part, il nous donne la possibilité de calculer tant les courants de court-circuits du réseau d'influence que des courants et des tensions induites dans les circuits de courants faibles.

L'algorithme conçu a été mis à l'épreuve par le calculateur numérique ODRA-1013 à base d'un programme MOST-1 et d'un exemple numérique réalisé avec les données fournies par le projet d'une ligne électrique de 400 kV.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

C.D. 656.2:625.1/.2:656.04

P. Frincu, S. Raicu

Etude de la, sollicitation des intersection de chemins de fer.

On établit en ce travail des relations originales concernant la sollicitation des croisements de chemins de fer, en utilisant la théorie de la probabilité.

On démontre que les relations qui existent dans la littérature de spécialité représentent des cas spéciaux. Les relation proposées correspondent à tous les cas possibles de solicitation des croisements de chemins de fer pour n trajets incompatibles.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 621.431:621.43-4:621.436:62.001.24

N. Apostolescu

Berechnung der Wärmeentwicklungsgeschwindigkeit im Dieselmotor mit direkter Einspritzung.

In vorliegender Arbeit wird eine neue Berechnunsmethode des Wärmeentwicklungsgesetzes im Dieselmotor mit direkter Einspritzung und die Eigenarten der Gemischentstehung angegeben. Die Methode umreisst die zwei Grundvorgänge der Verbrennung in diesem Motor : Verbrennung der vorgebildeten Gemische und die turbulent verbreitende Verbrennung .Das physikalische, für die verbreitende Verbrennung angenommene Modell, drückt den wesentlich unkonstanten Charakter de ans Verdampfung-und Verbrennungsvorgänge des Kraftstoffs ans.

Die Methode ermöglicht, mit hoher Genauigkeit durchgeführte Berechnungen und kann als Beispiel bei den Optimisierungsstudien des Kraftstoff-Einspritzgesetzes verwendet werden.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 621.316:621.3.02:621.39:518.5

A. Carabulea

Beiträge zum Einfluss der elektrischen Netze auf die Fernmeldenetze.

Es werden mathematische Modelle und das allgemeine logische Schema für das Studium der Beeinflussung der elektrischen Netze mit Hilfe der Digitalrechenmaschinen angegeben.

Die Berechnungsrelationen der in die Fernmeldenetze induzierten Grössen sind allgemein und umfassen die in der Literatur behandelten Sonderfälle. Das aufgestellte logische Schema erleichtert einerseits die Bestimmung der Impedanzen und Admittanzen und erlaubt anderseit sowohl die Berechnung der Kurzschlussströme aus dem einflussenden Netz, als auch die Berechnung der in die Schwachstrom kreise induzierten Ströme und Spannungen.

Der entworfene Algorithmus wurde auf dem Digitalrechner ODRA-1013, auf Grund des MOST-1-Programms und eines Digital-Beispiels, ausgeführt mit den Daten der Plannung einer elektrischen Leitung von 400 kV, getestet.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

D.K. 656.2:625.1/.2:656.04

P. Frîncu, S. Raicu

Studium der Eisenbahnkreuzungen

In vorliegender Arbeit werden originell Relationen betreffend die Beanspruchung von Eisenbahnkreuzungen, unter Benützung der Wahrscheinlichkeitstheorie, bestimmt.

Es wird bewiesen, dass die in der Fachliteratur bestehenden Relationen Sonderfälle vorstellen. Die vorgeschlagenen Relationen enstprechen allen möglichen Beanspruchungsfällen der Eisenbahnkreuzungen für n unvereinbare Strecken.

Bulet. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr.5/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

MATEMATICĂ

C. Z. : 513.5/.8

ASUPRA UNUI MOD DE GENERARE A CONOIDULUI PLÜCKER *

MIHAIL ȘT. BOTEZ

Fie două drepte disjuncte D și D_1, iar MN perpendiculara comună.

Mulțimea dreptelor din spațiu care întîlnesc D și D_1 formează o congruență liniară de genul întîi pentru care D și D_1 sînt drepte focale.

Dacă pe una din aceste drepte se ia un punct fix P și se consideră fascicolul plan de drepte (ρ), care are ca suport punctul P și sînt incidente cu cea de a doua focală, dreptele acestui fascicol în afară de două excepții sînt disjuncte cu perpendiculara comună MN.

Locul geometric al perpendicularelor comune între MN și razele ρ_t ale fascicolului (ρ), constituie o serie de drepte care dă naștere unei suprafețe riglate a cărei natură ne propunem să o găsim pe cale elementară folosind o epură Monge.

1. Considerăm planul $[H]$ paralel cu dreptele focale ale congruenței.

În acest caz planul $[V]$ al reperului Monge este paralel cu MN.

În raport cu acest reper, dreptele focale D și D_1 sînt orizontalele (d, d') și (d_1, d_1'), iar MN este verticala proectată orizontal în punctul $m = d \cap d_1$, iar m' și n' sînt proecțiile verticale ale punctelor în care perpendiculara comună intersectează dreptele focale (fig. 1).

Dacă $P(p, p') \in D$ este punctul fix, atunci perpendiculara (σ_t, σ_t') între (ϱ_t, ϱ_t') și $MN(mn, m'n')$ cu $m \equiv n$, care sînt generatoarele suprafeței, sînt paralele cu $[H]$ deoarece sînt perpendiculare pe verticala MN.

De aici rezultă că proecțiile σ_t formează un fascicol al cărui suport este $m \equiv n$, iar proecțiile ϱ_t un al doilea fascicol al cărui suport este p. Cum razele acestor două fascicole univoc corespondente sînt perpendiculare, una din laturile unghiului drept fiind paralelă cu $[H]$, rezultă că locul geometric al proecțiilor orizontale ale vîrfurilor acestor unghiuri este cercul (Γ) cu diametrul mp.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 1—3 noiembrie 1968

Deoarece punctele $\mu_i = (\sigma_i, \sigma_i') \bigcap (\varrho_i, \varrho_i')$, se găsesc în planul $[P, D_1]$ al fascicolului (ρ), curba (E) descrisă de aceste puncte este plană, avînd ca proiecţie pe planul orizontal cercul (Γ). Deci (E) este elipsa rezultată din secţionarea cu planul $[P, D_1]$ a cilindrului circular drept a cărui una din generatoare este MN.

Prin urmare : *suprafaţa generată de dreptele* (σ_i, σ_i') *este un conoid* (ψ) *Plücker ale cărui directoare sînt* MN *şi elipsa* (E) *iar ca plan director, planul* $[H]$, [1].

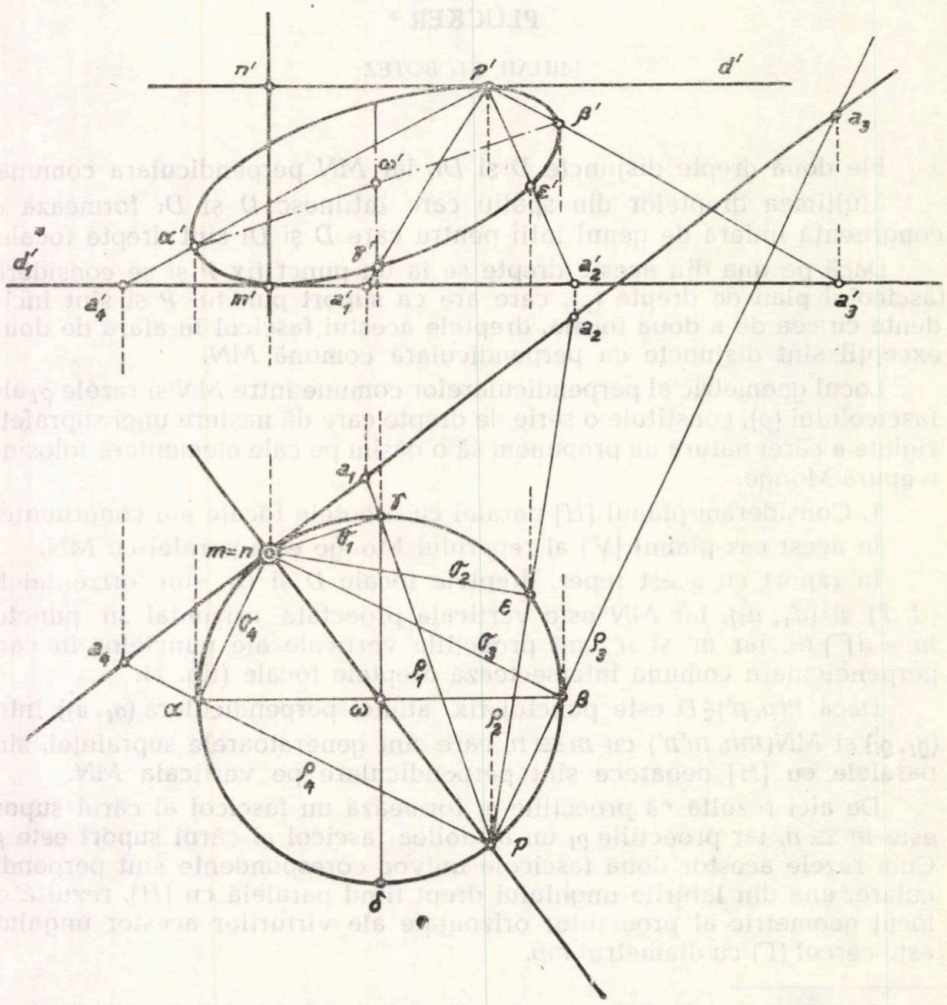


Fig. 1.

2. *Construcția proecției directoarei curbilinii*

Fie ϱ_1' proecția verticală a unei raze a fascicolului (ρ) care se sprijină în $A(a, a')$ pe focala $D_1(d_1, d_1')$. Proecția sa orizontală este $\varrho_1 \equiv pa$ pe care se duce din n, dreapta $\sigma_1 = n\mu_1$; $n\mu_1 \perp ap$. Aceasta este proecția orizontală a unei generatoare a conoidului (ψ). Proecția verticală se obține construind punctul $\mu_1' \in p'a'$ din care se duce $\sigma' \perp m'n'$, (fig. 1).

În acest mod se construesc generatoarele : (σ_2, σ'_2), (σ_3, σ_3') ... ale căror puncte de intersecție cu razele corespondente ale fascicolului (ρ) sînt : (μ_2, μ_2'), (μ_3, μ_3')... care aparțin elipsei (E).

Pentru construcția vîrfurilor ε' și ε_1' ale proecției verticale a elipsei (E), se observă că axului mare ε' ε_1' îi corespunde diametrul $\alpha\beta$ al cercului (Γ). Proecțiile orizontale ϱ_i ale razelor fascicolului (ρ) sînt $p\alpha$ și $p\beta$ care se sprijină pe D_1 (d_1, d_1') în punctele (f, f') și (e, e').

Intersecțiile dintre $p'e'$ și $p'f'$ cu liniile de ordine corespunzătoare punctelor α și β sînt vîrfurile ε' și ε' ale proiecției verticale a elipsei directoare (E).

3. Dintre cuadricele congruenței folosite, care trec prin dreptele focale D și D_1, acelea care au ca plan director planul [H], care în cazul de față este paralel cu dreptele focale, sînt parabolizi hiperbolici.

Deci se poate enunța :

TEOREMA 1. *Conoizii Plücker a căror dreaptă dublă este perpendiculara comună a dreptelor focale a unei congruențe liniare și paraboloizii hiperbolici ai congruenței au plan director comun.*

Să considerăm paraboloizii echilateri ai congruenței, ale căror plane directoare, după cum se știe, sînt perpendiculare. Deoarece MN este

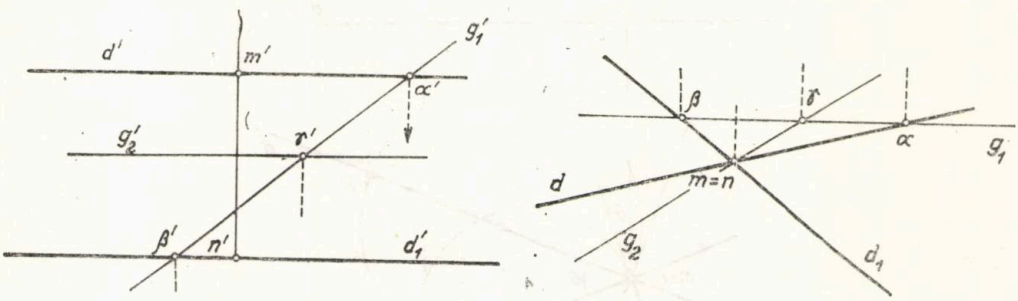


Fig. 2 a și b.

paralelă cu planul [V] al reperului MONGE ,rezultă că paraboloizii echilateri ai congruenței trec prin această dreaptă care este generatoare de strictiune și în același timp locul vîrfurilor acestor paraboloizi ale căror sisteme de generatoare fac parte din mulțimea dreptelor orizontale, respectiv frontale.

Astfel în epura 2, sînt figurate generatoarele (g_1, g_1') din sistemul întîi şi (g_2, g_2') din sistemul al doilea. De unde rezultă :

TEOREMA 2. *Conoizii Plücker şi paraboloizii echilateri ai unei congruenţe liniare trec prin dreptele focale şi prin perpendiculara lor comună.*

4. a) Unei translaţii a punctului P în lungul dreptei focale D îi corespunde ∞^1 de conoizi care trec prin cea de a doua focală şi prin perpendiculara comună, iar proecţiile pe planul $[H]$ ale elipselor directoare formează un fascicol de cercuri tangente în punctul de concurenţă al perpendicularei comune cu planul de proecţie.

Elipsele directoare ale acestei ∞^1 de conoizi sînt conţinute în fascicolul de plane determinat de punctele P şi cea de a doua focală care este suportul fascicolului de plane.

Dacă se consideră punctul $Q(q, q')$, mobil pe cea de a doua focală $D_2(d_2, d_2')$ a congruenţei, atunci *proecţiile orizontale ale elipselor directoare ale celor două* ∞^1 *de conoizi sînt două fascicole tangenţiale de cercuri care se intersectează în punctul de tangenţă* $m \equiv n$ *sub un unghiu constant şi egal cu unghiul* θ *după care se proectează dreptele focale ale congruenţei,* (fig. 3).

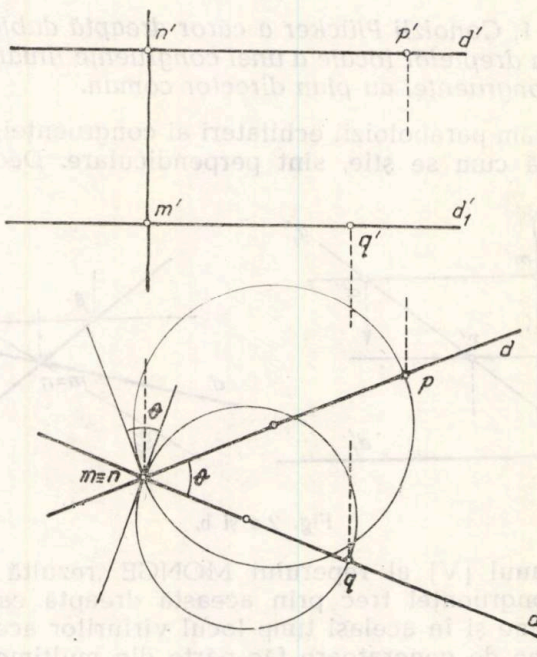


Fig. 3.

Din cele expuse mai înainte rezultă :

TEOREMA 3. *Două fascicole tangențiale de cercuri, al căror punct comun este punctul de tangență, pot fi considerate întotdeauna ca proecțiile elipselor directoare a două fascicole de conoizi care au directoare rectilinie unică și trec prin cîte o dreaptă D și D_1 cu $D \cap D_1 = \emptyset$, ale căror proecții pe planul cercurilor sînt axele celor două fascicole de cercuri.*

OBSERVARE. Dacă dreptele focale D și D_1 se proectează pe planul cercurilor după unghiul $\theta = \pi/2$, atunci cele două fascicole tangențiale de cercuri sînt ortogonale.

b) Dacă se aplică uneia dintre dreptele focale o translație după direcția perpendicularei comune, oricare ar fi intensitatea vectorului de translație, proecția pe planul $[H]$ a elipsei directoare rămîne aceiași.

Translația perpendicularei comune în lungul uneia dintre dreptele focale conduce la translația celei de a doua focale după direcția celei dintîi, (fig. 4).

Dacă se rotește cu un unghiu α dreapta focală D pe care este situat punctul fix P, în jurul dreptei duble MN, atunci elipsa directoare (E) conținută în planul determinat de focala fixă și de punctul rotit, se proectează pe planul $[H]$ după cercul (Γ_1) care are aceeași rază ca cercul inițial (Γ), (fig. 5).

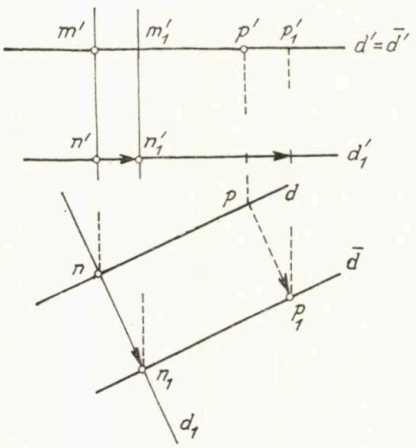


Fig. 4.

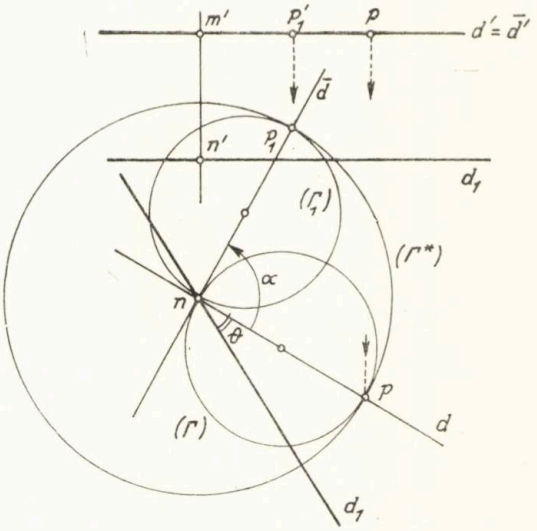


Fig. 5.

Prin urmare se poate enunța proprietatea :

Elipsele directoare ale conoizilor care corespund diferitelor unghiuri de rotație α_1 a punctului P în jurul dreptei duble, se proecteaează pe un plan perpendicular pe dreapta dublă, după un fascicol de cercuri cu dia-

metrul constant ce trec printr-un punct fix, care este intersecția dreptei duble cu planul de proecție.

5. Dacă congruența liniară considerată este de genul al doilea, atunci ea este formată de tangentele în lungul aceleiași generatoare G a unei cuadrice (Q) ce aparține congruenței.

Pentru ca un parabolid echilateral (π_e) să aparțină acestei congruențe, trebuie să se racordeze cu cuadrica (Q) în lungul generatoarei G. Dacă $G = Oz$ din reperul cartezian $Oxyz$, atunci planul $[yz]$ este plan asimptot iar $[zx]$, plan central ce corespund generatoarei prin care trece cuadrica (Q).

Racordarea paraboidului (π_e) cu cuadrica (Q) se face prin urmare în lungul axei Oz. Planul tangent la (π_e) într-un punct oarecare $(0, 0, \gamma)$ al axei Oz se confundă cu planul tangent în același punct la cuadrica (Q).

Catedra de matematici III
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Mihail Șt. Botez* — Sur les surfaces conoïdes (Monographie) 1928.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

TEHNOLOGIA CHIMICĂ

C. Z.: 66.074: 661.3:622.3:631.83/.84

ADSORBȚIA AMONIULUI ȘI FIXAREA POTASIULUI IN BENTONITE *

T. IONESCU,I. GH. CONSTANTINESCU

Menținerea și sporirea gradului de fertilitate al solului, sînt strîns legate de utilizarea îngrășămintelor, deoarece prin acestea se asigură readucerea în sol a substanțelor nutritive pe care le-a pierdut o dată cu ridicarea recoltelor și prin procesul continuu de levigare.

Printre elementele nutritive principale de care planta are nevoie, se numără azotul și potasiul. Echilibrul azotului în sol este mereu dereglat din cauza marii labilități a nitraților, care fiind foarte solubili, pe lîngă faptul că sînt absorbiți rapid de plante, se pierd ușor și prin levigare. Din această cauză, eficiența cea mai mare la administrarea îngrășămintelor azotoase, se obține atunci cînd doza anuală se repartizează just atît înainte cît și după însămînțare, pe fenofaze și în mai multe reprize. Totuși și în condiții de respectare riguroasă a dozelor și perioadelor de administrare a îngrășămintelor azotoase în zonele umede acestea pot fi spălate și antrenate la mare adîncime.

Pentru diminuarea pierderilor de elemente nutritive s-au preparat îngrășămnte azotoase și potasice ionitice, a căror introducere în sol permite modelarea complexului adsorbant al solului. Prin procedeele de schimb ionic care au loc în sol între îngrășămintele ionice și ionii eliberați de plante, sînt puse la dispoziția acestora, elementele nutritive deficitare : azotul și potasiul.

În acest fel există posibilitatea de a preveni levigarea ionilor de azot și potasiu, precum și existența unei cantități excesive, dăunătoare recoltelor.

Mecanismul de adsorbție al amoniacului anhidru pe argile a fost studiat pentru prima dată de Cornet. Studii asemănătoare au mai făcut Buswel, Dudenbastel, Jakson și Chang, folosind argile-hidrogen. Ei au stabilit că procesul de adsorbție pe argilă are loc în suprafața interplanară. Totuși ei nu au stabilit exact mecanismul de adsorbție și numai au menționat cîteva căi posibile de reținere a amoniacului în sol.

Mecanismele propuse au fost : reacția ionului amoniu cu solul umed sau reacția amoniacului cu hidrogenul schimbabil pentru a forma ionul amoniu și adsorbția fizică a acestuia pe suprafața particulelor de sol.

În lucrarea de față vor fi expuse rezultatele experimentale obținute în studiul adsorbției, desorbției și schimbului ionic pe bentonită.

*) Manuscris predat la redacție la 20 octombrie 1968.

Determinări experimentale

În determinări au fost folosite bentonite de Valea Chioarului și de Răzoare, minerale de tip montmorilonitic din grupa micaceelor.

Au fost determinate capacitățile de schimb cationic și ionii schimbabili la cele două tipuri de bentonite (tabelul 1).

Tabelul 1

Tipul de bentonită	Capacitatea de schimb cationică mval/100 g	Ioni schimbabili		
		Na^+ %	Ca^{2+} %	K^+ %
Bentonită din Valea Chioarului	95	50	33,5	16,5
Bentonită de răzoare	124	0,4	71,5	28,1

Tratarea bentonitei cu acizi dă posibilitatea introducerii ionilor de hidrogen în centrii activi și în acest fel capacitatea de schimb se mărește (tabelul 2).

Tabelul 2

Tipul de bentonită	Capacitatea de schimb mval/100 g
Bentonită de Valea Chioarului	126
Bentonită de Răzoare	165

Compoziția chimică determinată este (tabelul 3) :

Tabelul 3

Bentonită de Valea Chioarului	$Si\ O_2$	75% ;	Al_2O_3	14% ;	Fe_2O_3	1,5% ;
	Ca O	1,2% ;	Mg O	2,5% ;	Na_2O	1,5% ;
	K_2 O	0,3% ;				
Bentonită de Răzoare	$Si\ O_2$	50,19% ;	Al_2O_3	25 % ;	Fe_2O_3	0,4%
	Ca O	8,82% ;	Mg O	1% ;	Na_2O	0,3% ;
	K_2 O	1,75% ;				

O caracteristică esențială a acestor bentonite este structura stratificată alcătuită din pachete de straturi formate din oxid de siliciu și oxid de aluminiu, legate prin cationi de : Na^+, K^+, Ca^{2+}, Mg^{2+} cationi care-i conferă bentonitei și proprietățile de schimbător de ioni.

Pregătirea bentonitei homoionice

Bentonita brută provenită din zăcământ este măcinată și introdusă într-un reactor prevăzut cu agitator, încărcat în prealabil cu apă.

Introducerea bentonitei se face sub o agitare puternică pentru obținerea unei argile apoase omogene.

Pentru stabilirea omogenității suspensiei s-au făcut încercări hidrodinamice care au arătat că aceasta se realizează la o densitate de 1,17—1,18 g/cc. În vasul de reacție se întrerupe introducerea bentonitei cînd s-a obținut densitatea optimă. Odată suspensia obținută s-a trecut la operația de activare a bentonitei.

Pentru saturarea argilei cu hidrogen și pentru îndepărtarea urmelor de cationi străini (Ca^{2+}, Mg^{2+}, Na^{+}, K^{+}) în vederea obținerii bentonitei hidrogen homoionice activate, suspensia a fost trecută peste o rășină schimbătoare de ioni Amberlit IR-120 în forma H.

Saturarea completă cu hidrogen a argilei s-a realizat la un timp de contact de 2 ore.

Suspensia este adusă pe un filtru chamberland unde este spălată cu apă distilată.

Bentonita ionică de pe filtru este introdusă într-o etuvă la 105°C pentru uscare.

În final s-a efectuat mărunțirea materialului la dimensiuni de 1—4 mm.

Adsorbția amoniacului gazos pe bentonită

Pentru studierea procesului de adsorbție a amoniacului pe bentonită s-a determinat suprafața sa specifică. Pentru bentonitele neuscate (51% umiditate) suprafața specifică este de 280 m^2/g, iar pentru cele uscate de 353 m^2/g.

Experimentările s-au realizat într-o aparatură simplă — gravimetrică (fig. 1).

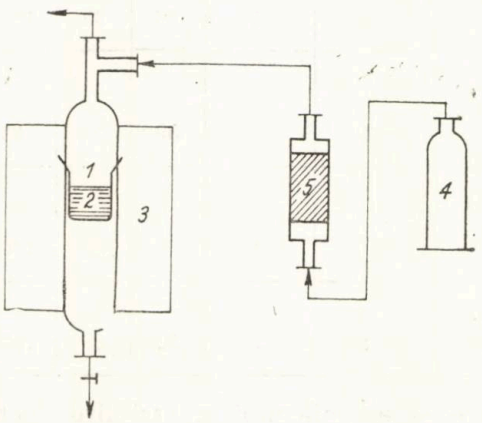


Fig. 1.

Probele de bentonită au fost introduse în nacela (1) de sticlă prinsă mobil în coloana (2) care este pusă în legătură cu o instalație de vid și cu sursa de amoniac (4). Întregul sistem este termostatat (3). Presiunea amoniacului în sistem a fost măsurată cu un manometru cu mercur. Introducerea amoniacului în sistem a fost efectuată după o purificare prealabilă (5) cu ajutorul unei soluții de sodă.

Determinările au fost efectuate la temperatura de 0°C.

Tabelul 4

Proba	Tipul argilei	Greutatea probei gr	Timp de contact ore	Volumul NH_3(cm^3) adsorbit la diferite raporturi P/P_0					
				0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1	Bentonită Valea Chioarului naturală 51% umiditate	1	1	60	90	115	125	130	160
2	Bentonită Valea Chioarului naturală uscată	1	1	50	80	90	105	110	125
3	Bentonită — H Valea Chioarului 51% umiditate	1	1	70	120	135	165	205	260
4	Bentonită — H Valea Chioarului uscată	1	1	60	105	125	135	155	195
5	Bentonită Răzoare naturală 51% umiditate	1	1	50	80	108	120	135	175
6	Bentonită Răzoare naturală uscată	1	1	50	75	95	105	115	140
7	Bentonită — H Răzoare 51% umiditate	1	1	60	100	120	150	180	245
8	Bentonită — H Răzoare uscată	1	1	50	85	115	125	150	195

După introducerea amoniacului și stabilirea echilibrului (în timp de 1 oră) se cîntărește proba de bentonită.

Rezultatele determinărilor de adsorbție sînt expuse în tabelul 4.

Din fig. 2 și 3 se observă că toate izotermele au o configurație de S și reținerea se face cel mai bine pe bentonita hidrogen umedă.

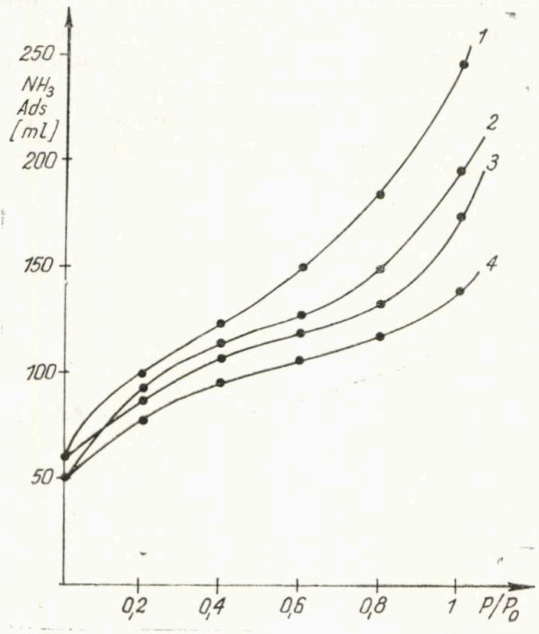


Fig. 2.

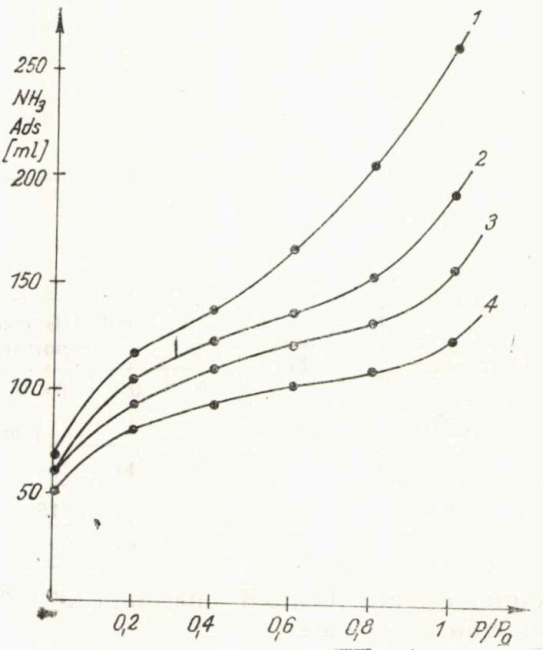


Fig. 3.

Aceasta se poate explica prin faptul că bentonita hidrogen avînd un caracter acid, poate lega mai bine amoniacul bazic.

La presiunea atmosferică diferențele între cantitățile de amoniac adsorbite pe diferite tipuri de bentonite sînt sesizabile. Aceste diferențe sînt cu atît mai mici cu cît presiunea este mai mică.

A fost studiată și influența temperaturii asupra modului cum se face adsorbția amoniacului gazos pe bentonită.

Izotermele din fig. 2 și 3 sînt pentru temperatura de 0°C. Au fost efectuate determinări și pentru temperaturile de —7° și 100°C (tabel 5) (fig. 4) pe bentonită H de Răzoare.

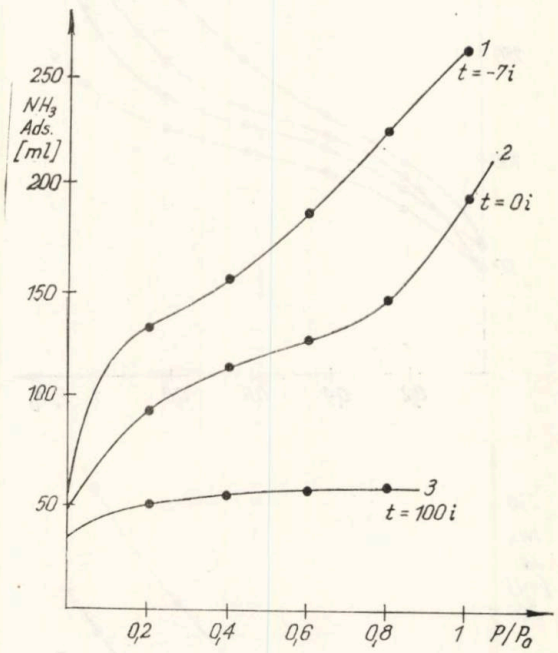


Fig. 4.

Tabelul 5

Proba	Temperatura	Timp de contact	Greutatea probei	Volumul NH_3 adsorbit la diferite raporturi P/Po					
				0	0,2	0,4	0,6	0.8	1
	°C	ore	gr	(cm^3)					
1	—7	1	1	60	130	155	175	225	265
2	0	1	1	50	85	115	125	150	195
3	100	1	1	40	50	55	60	60	—

Aspectul izotermei pentru bentonita naturală la —7°C poate fi atribuit unei adsorbții multimoleculare.

Reacții de schimb cationic

Experiențele pentru studiul reacțiilor de schimb ionic au fost efectuate în cadrul unui proces static pe bentonită de Răzoare.

Volume cunoscute de suspensie bentonitică naturală sau activată au fost introduse în flacoane erlemayer peste care s-au adăugat soluții de clorură de potasiu, respectiv clorură de amoniu în cantități variabile.

Concentrația suspensiei bentonitice a fost de 1,5%. S-au efectuat și experiențe în care bentonita folosită a fost în prealabil uscată.

Flacoanele au fost agitate continuu timp de 48 h, după care au fost centrifugate.

Porțiunea rămasă limpede a fost utilizată pentru analiza cationilor implicați în reacție.

În cazul reacțiilor de schimb ionic pe bentonită sodică :

$$B - Na_{(suspensie)} + K^+ \xrightarrow{K_1} Na^+ + B - K \quad \text{(tabel 6)}$$

$$B - K + Na^+ \xrightarrow{K_2} K^+ + B - Na \quad \text{(tabel 7)}$$

Constantele de schimb au fost calculate pe baza „legii acțiunii maselor", admițînd că schimbul ionic în acest caz este stoechiometric și că reacțiile sînt complet reversibile.

Tabelul 6

KCl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	K^+ în KCl	K în 2,5 g B — K	k_1
mval/l	mval	mval	mval	mval/l	
20	3,545	0,435	16,368	3,532	1,758
8	3,010	0,970	5,093	2,891	1,760
4	2,375	1,605	1,826	2,160	1,748
2	1,685	2,295	0,582	1,400	1,767
1	1,579	2,401	0,274	0,724	1,736

Tabelul 7

NH_4Cl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	K^+	K în 2,5 g B — K	K_2
mval/l	mval	mval	mval	mval	
20	17,44	2,560	2,895	0,637	0,563
8	6,110	1,890	2,325	1,207	0,563
4	2,490	1,510	1,720	1,812	0,579
2	0,960	1,040	1,177	2,355	0,575
1	0,357	0,643	0,545	2,987	0,562

Au fost efectuate determinări și pentru reacțiile :

$$B - Na^{(suspensie)} + NH_4^+ \xrightarrow{K_1} Na^+ + B - NH_4 \quad \text{(tabel 8)}$$

$$B - NH_4 + Na^+ \xrightarrow{K_2} NH_4^+ + B - Na \quad \text{(tabel 9)}$$

Tabelul 8

NH_4Cl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	NH_4^+ în Cl NH_4	NH_4 în 2,5 g B — NH_4	K_1
mval/l	mval	mval	mval/l	mval	
20	3,455	0,525	16,121	3,879	1,576
8	2,975	1,005	5,113	2,887	1,671
4	2,245	1,735	1,712	2,288	1,729
2	1,665	2,315	0,609	1,391	1,645
1	1,529	2,451	0,293	0,707	1,505

Tabelul 9

Na cl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	NH_4^+	NH_4 în 2,5 g B — NH_4	K_2
mval/l	mval	mval	mval	mval	
20	17,480	2,520	3,168	0,711	0,632
8	6,510	1,490	2,809	1,070	0,601
4	2,703	1,297	2,125	1,754	1,729
2	1,050	0,950	1,559	2,318	0,606
1	0,401	0,599	1,189	2,690	0,661

Determinările cu bentonită-hidrogen au fost efectuate pentru schimbul cu ionii de potasiu și pentru schimbul cu ionii de amoniu. Reacțiile de schimb ionic pe bentonita-hidrogen decurg similar cu reacțiile pe bentonita-sodică, numai că cantitățile de ioni de potasiu și amoniu reținuți și eliminați de bentonita-hidrogen sînt mai mari.

Reacțiile de schimb ionic într-un ciclu complet apreciate prin constantele de schimb sînt foarte satisfăcătoare, în toate aceste cazuri ele fiind reversibile fapt confirmat de produsul dintre k_1 și k_2 care este egal cu unitatea :

$$k_1 \cdot k_2 = 1$$

Se poate trage concluzia pentru reacțiile de schimb ionic ale suspensiilor de bentonită că fenomenul de histerezis lipsește cu desăvîrșire, fapt care permite ca ionii nutritivi, fixați prin schimb ionic pe argile, la administrarea în sol să fie puși la dispoziția plantelor, printr-un proces reversibil.

Dacă reținerea ionilor de potasiu și amoniu pe bentonitele uscate se face la fel de bine ca în cazul suspensiilor de bentonită (capacitatea de schimb rămîne identică) (tabelul 6 și 8), punerea în libertate a ionilor fixați decurge mult mai lent și numai parțial.

În tabelele 10 și 11 sînt prezentate datele pentru reacțiile de eliminare a ionilor de potasiu și amoniu fixați pe bentonite uscate.

Tabelul 10

Na Cl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	K^+	K în 2,5 g B — K	K_2
mval/l	mval	mval	mval	mval	
20	17,765	2,235	2,591	0,941	0,346
8	6,325	1,675	1,982	1,550	0,338
4	2,836	1,164	1,001	2,531	0,162
2	1,375	0,625	0,503	3,029	0,075
1	0,770	0,230	0,214	3,318	0,019

Tabelul 11

Na Cl	Na^+	Na în 2,5 g B — Na	NH_4^+	NH_4, în 2,5 g B-NH_4	K_2'
mval/l	mval	mval	mval	mval	
20	16,921	3,179	2,825	1,054	0,503
8	5,835	2,165	2,050	1,829	0,415
4	2,728	1,272	1,325	2,554	0,234
2	1,405	0,595	0,834	3,045	0,115
1	0,802	0,192	0,463	3,416	0,032

În acest caz reversibilitatea reacțiilor nu se mai confirmă, produsul constantelor de reacție variind și fiind diferit de 1 :

$$k_1 \cdot k_2 \neq 1$$

Se poate trage concluzia că uscarea influențează proprietățile de schimb ale bentonitei, conducînd la un fenomen clasic de histerezis (fig. 5).

Acest fenomen îl atribuim faptului că prin uscare se intensifică acțiunea forțelor Van der Waals cu care sînt reținuți ionii de schimb.

Bentonitele amonizate și cele pe care a fost fixat potasiul, au fost verificate în cadrul unor probe biologice care au scos în evidență utilitatea lor ca îngrășăminte.

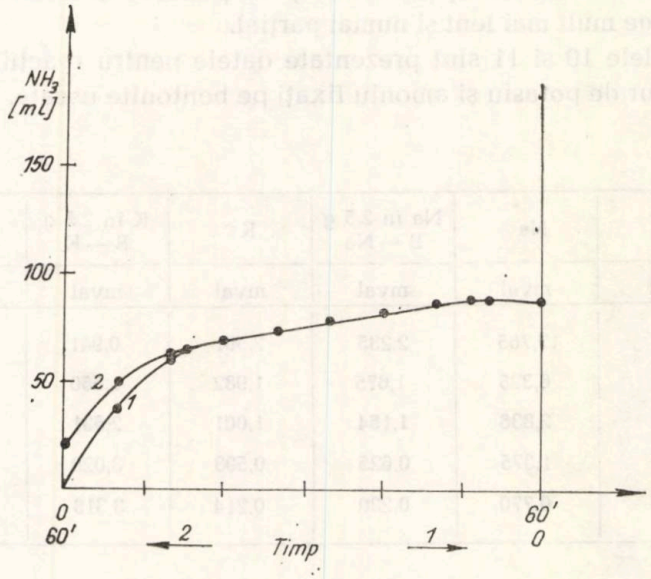


Fig. 5.

Concluzii

Determinările experimentale arată că amoniul și potasiul sînt reținuți bine pe bentonită.

Un rol deosebit îl are în aceste procese modul de prelucrare a bentonitei.

În scopul obținerii unei bentonite încărcate cu amoniu și potasiu, bentonită care să poată elibera integral în cadrul unui proces de schimb ionic, ionii fixați, trebuiesc folosite suspensii bentonitice.

Bentonita uscată folosită în procese de schimb ionic prezintă un fenomen de histerezis, nedorit în cazul utilizării acesteia ca îngrășămînt ionitic.

Catedra de tehnologie chimică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Amphlett C. B.* — Inorganic ion exchangers — Elzevier Publishing London ; 1964.
2. *Barer R. M.* — Trans. Faraday Soc., Vol. 57 ; 1961.
3. *Barshad I.* — Soil Sci., Vol. 72 ; 1951.
4. *Buswell A. M.* — J. Am. Chem. Soc., Vol. 63 ; 1941.
5. *Call F.* — Nature, Vol. 172 ; 1953.
6. *Cornet I.* — J. Chem. Phys., Nr. 2 ; 1943
7. *Davidescu D.* — Agrochimia, Ed. Agrosilvică București ; 1963.
8. *Dudenbastel M.* — J. Am. Chem. Soc., Vol. 66 ; 1944.
9. *Ionescu T., Constantinescu I.* — Buletinul I.P.B. nr. 2 ; 1969.
19. *Ionescu T.* — Schimbători de ioni, Ed. Tehnică București ; 1866.
11. *Jakson M. L.* — Chang S. C., J. Am. Soc. Agron., Vol. 38 ; 1647.
12. *Mortland M.* — „Soil Sci", Vol. 79 ; 1955.
13. *Samarendra Kumar* — „Soil Sci", Vol. 91 ; 1960.
14. *Sato C.* — „J. Chem. Soc. Japan", Vol. 74 ; "950.
15. *Weiden P.* — „Koloid", Vol. 127 ; 1952.
16. *Werner G.* — „Tonindustrie Ztg. and Keramische Rundschau" Nr. 5—6 ; 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

C. Z. : 66.061.5:661.731:662.753.21

INFLUENŢA CONCENTRAŢIEI SUBSTANŢELOR CAPILAR ACTIVE ASUPRA EXTRACŢIEI LICHID-LICHID *

CORNELIA BEJAN

Istoric. Studiile experimentale asupra extracţiei lichid-lichid din ultimii ani, relevă importanţa mare care trebuie acordată schimbărilor proprietăţilor interfaciale produse de urme de substanţe tensioactive. Aceste schimbări influenţează considerabil transferul solutului prin interfeţe (3, 6, 7, 15, 19, 49).

Moleculele superficial active prin polaritatea lor pot mări sau micşora forţele de orientare a moleculelor de solvent care deja acţionează la interfaţă sau chiar să le inverseze. Acest lucru reiese clar din unele cercetări experimentale, ca de ex. cele a lui Johnstone (29) care în studiile sale asupra extracţiei acidului acetic din eterul izopropilic prin picături de apă, constată că adiţia unei mici cantităţi de Tergitol micşorează fracţiunea de acid acetic extras la circa o treime. Aceiaşi scădere a cantităţii de solut extras în prezenţa substanţelor tensioactive este constatată şi în lucrările lui Terjesen şi colaboratorii (9, 10, 27, 33, 34, 48) a lui Garner şi colaboratori (20, 21, 22) ale lui Cullen şi Davidson (12), ale lui Emmert şi Pigford (16) şi alţii (19).

Dimpotrivă alţi cercetători semnalează o creştere a randamentului extracţiei în prezenţa substanţelor tensioactive, ca de ex. : Chu, Taylor şi Levy (11) efectuînd extracţii într-o coloană cu umplutură constată o creştere lineară a extracţiei paralel cu descreşterea tensiunii interfaciale datorate adiţiei unor cantităţi mici de agenţi puternic capilar activi. Aceiaşi constatare este făcută şi de Farmer (17) care a obţinut o creştere a randamentului extracţiei acidului acetic din picături de tetraclorură de carbon de către apă prin adiţie de cantităţi mici de Tergitol şi foarte recent, de Francis şi Berg (18) la distilarea extractivă.

Alţi cercetători, în studiile lor, găsesc fie creşteri, fie scăderi a vitezei de transfer de masă în prezenţa substanţelor superficial active, aceasta depinzînd de aditivul folosit şi de sistemul studiat. De ex. : West şi Co (50) adăugînd diferiţi alcooli (C_1—C_{16}) la faza benzenică a găsit o îmbunătăţire substanţială în extracţia acidului acetic din picăturile de

*) Manuscris predat la redacţie la 11 decembrie 1968.

benzen de către apă, produsă de prezența alcoolilor inferiori (C_1 la C_8). și o descreștere simțitoare a extracției în prezența alcoolilor superiori (C_8 la C_{16}).

Uneori literatura prezintă pentru unul și același sistem de extracție lichid-lichid, date foarte diferite și chiar contradictorii. De ex. pentru sistemul de extracție a acidului acetic din picături de benzen, de către apă, Sherwood și Co (45) au obținut viteze de transfer de masă mult mai mari în comparație cu cele obținute de West și Co (51) pentru același sistem. Discrepanța dintre aceste rezultate a fost explicată mai tîrziu de însăși West și Co (50) în funcție de contaminarea cu substanțe superficiale active a soluției benzenice prin trecerea ei prin tubul de alimentare confecționat din Tygon (polivinilclorură).

Studii sistematice pentru a explica mecanismul transferului de masă în prezența substanțelor superficial active au fost elaborate de Hutchinson (28), Terjesen și Co (9, 34, 48), Garrner și Co (21, 23, 25), Levici (32), Chișinevski și Co (8), Ruckenstein (41, 42, 43) Duda și Vrentas (15), Davis și Acrivos (13), Boyadjev (5), Balarew (2) etc. — conturîndu-se în principal două teorii : teoria stratului barieră avînd ca susținători principali pe Hutchinson și Terjesen și teoria hidrodinamică adoptată într-o mai mare sau mai mică măsură de ceilalți cercetători.

Rezultatele experimentale prezentate anterior par totuși să sprijine în mai mare măsură un efect barier, deși efectele hidrodinamice nu pot fi nici ele neglijate.

Dat fiind aceste considerații, precum și faptul că ambele teorii se ocupă numai de aspectul micșorării transferului de masă în prezența substanțelor superficial active neglijîndu-se aproape total aspectul creșterii transferului de masă obținut în anumite condiții în prezența substanțelor superficial active, fac ca aceste teorii să nu fie atotcuprinzătoare și întrutotul satisfăcătoare.

În lucrarea de față se prezintă o serie de date experimentale obținute în extracția acidului acetic din picături de benzen de către apa ce conține mici cantități de substanțe superficial active și din discutarea rezultatelor obținute se trag concluzii asupra mecanismului transferului de masă.

Acest sistem deși mult cercetat (19, 30, 37, 39, 43, 49, 50, 51) cu și fără adaus de substanțe superficial active, a prezentat datele cele mai contradictorii în privința transferului de masă.

Substanțe utilizate : Acid acetic p.a. utilizat a fost produs de firma E. Merck A.G. Darmstadt și avînd caracteristicile fizico-chimice conform celor indicate în literatură a fost utilizat ca atare.

Benzenul utilizat a fost *pour la cromatographie* produs de firma Union Chimique Belge S.A. și verificîndu-i-se caracteristicile a fost utilizat ca atare.

Apa tridistilată a fost distilată mai întîi în distilor din metal inoxidabil și apoi dublu distilată într-un distilor Jena în prezența permanganatului de potasiu și a oxidului de calciu, păstrîndu-se în vase de polietilenă.

Substanțe superficial active: a) *Anionice*: dodecil sulfat de sodiu și hexadecil sulfat de sodiu au fost sintetizați din alcool laurilic și cetilic p.a. conform procedeului indicat de Dreger (14) și purificați prin extragere de 2 ori cu eter într-un aparat Soxhlet, puritatea fiindu-le, controlată final cromatografic.

b) *Cationice*: clorura de N-cetil-pirimidină p.a. produs de firma Chem. Fabr. Buchs S.G.-Olanda a fost utilizată, după controlul purității ca atare.

Clorura de N-cetil γ picolină a fost sintetizată după metoda descrisă de Angelescu și Co (1) și după purificare prin recristalizare a fost utilizată.

c) *neionici*: alcool hexadecilic (cetilic) p.a. produs de firma Chem. Fabr. Wich Mickel-Heidelberg a fost utilizat ca atare.

Aparatura folosită. Pentru a avea un debit constant la alimentarea coloanei de extracție cu soluție de acid acetic în benzen, s-au folosit sistemele de alimentare cu debit constant de tip Mariotte (în primele serii de determinări) sau sistemul cu supapă de dozare a debibitului tip Pinkav (38). Acest ultim sistem care permite menținerea unui debit riguros constant în tot timpul unei determinări se compune (v. Fig. 1) din vasul de alimentare *(A)* de la care printr-un sifon de sticlă *(B)* soluția de acid acetic în benzen era condusă la dozatorul de debit (C) unde cu ajutorul plutitorului (D) terminat cu supapa conică din sticlă bine șlefuită și prin presiune de argon debitul soluției putea fi reglat cu mare precizie. Gazul argon din butelia *(E)* era condus la vasele uscătoare *(F)*, *(G)*, *(H)* umplute respectiv cu clorură de calciu anhidră, hidroxid de potasiu și pentaoxid de fosfor pentru a fi purificat de vaporii de apă conținuți și apoi prin bifurcația *(I)* era condus parte în dozator parte în barbotorul *(J)* de unde excesul era evacuat în atmosferă. Debitul argonului era controlat prin flowmetrul *(K)*. Din dozatorul de debit *(C)* soluția este condusă prin intermediul unui tub cu robinet *(L)* la baza coloanei de extracție *(M)* unde pătrundea sub formă de picături formate la capătul capilarului de sticlă *(N)*. S-au utilizat coloane de extracție din sticlă de diametru cca. 5 cm. și cu diferite înălțimi 35 cm, 90 cm și 170 cm. Coloana de extracție era umplută după caz, fie cu apă pură (în determinările făcute în absența substanțelor superficial active) sau cu soluții având o anumită concentrație de substanță superficial activă. După ce picăturile de acid acetic în benzen parcurgeau de jos în sus întreaga coloană, erau colectate în vîrful coloanei care se îngusta la cca 0,5 cm și prin colectorul *(O)* erau conduse la balonul cotat *(P)* de 25 cc. Pentru a avea același „efect de capăt inferior" toate probele unei serii au fost efectuate pentru același timp de formare al picăturei și în condițiile unui raport între suprafețe și volume picăturit cît mai constant, deoarece conform formulei lui Heertjes (26) eficiența extracției E în perioada de formare a picăturei:

$$E = \left(2\frac{A_r}{V_{dr}} + \frac{4}{3}B\right)\left(D\frac{t_f}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

depinde de timpul de formare al picăturei, t_f, de raportul dintre suprafață și volumul picăturei, B, precum și de raportul dintre suprafața restului de picătură, A_r, și volumul picăturei în momentul desprinderii ei, V_{dr}. Coeficientul, D, din formulă este, coeficientul de difuzie ce poate fi calculat prin formula lui Wilke-Chang (40).

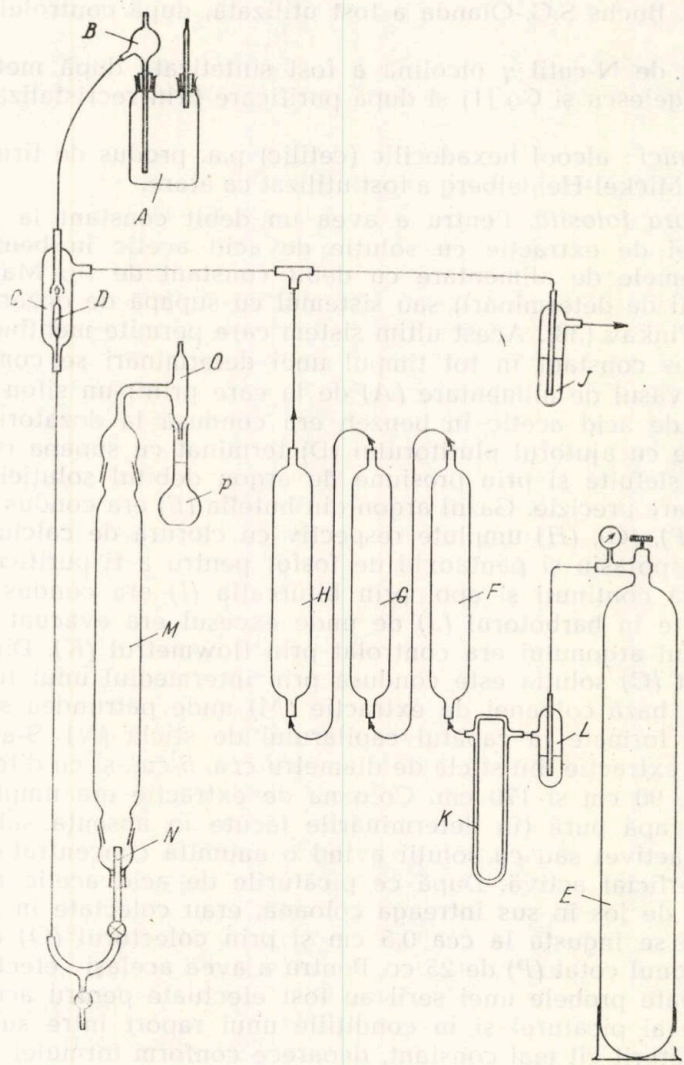


Fig. 1.

Acest efect de capăt s-a calculat și s-a ținut seama de el în calculele de transfer de masă.

Toate legăturile dintre diversele dispozitive ale aparaturei erau făcute prin tuburi de polietilenă, materialul cel mai puțin atacat de solvenții folosiți în lucrare.

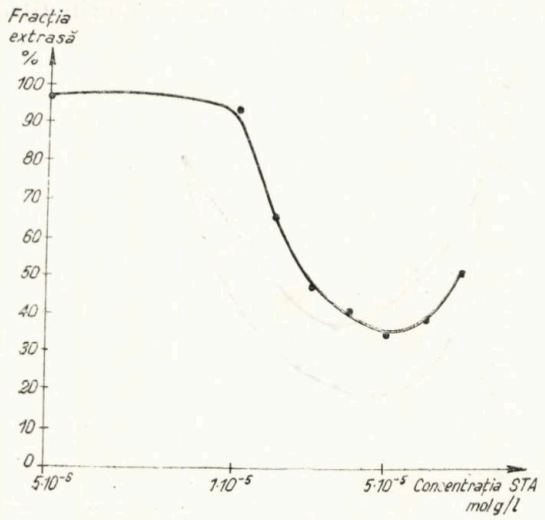


Fig. 2.

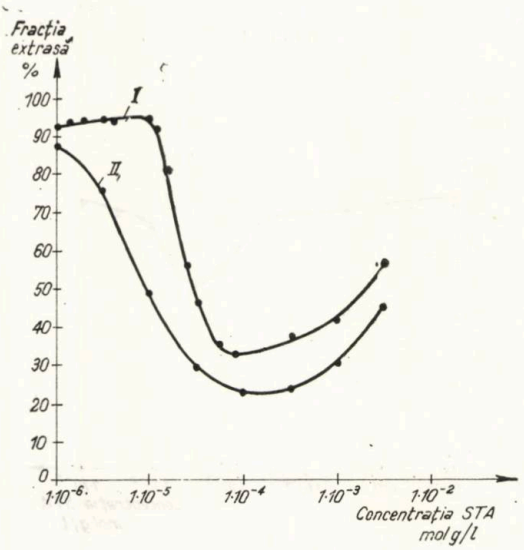


Fig. 3.

În toate seriile de determinări s-a lucrat cu același capilar avînd un diametru interior de 0,092 cm. Timpul de formare al unei picături precum și timpul de parcurgere al coloanei de către o picătură au fost stabilite prin cronometrare .Idem și frecvența picăturilor pe minut.

Într-o singură determinare s-au folosit 25 cc. soluţie acid acetic în benzen avînd o concentraţie iniţială de cca 1 mol/l. Concentraţia iniţială a acestei soluţii precum şi concentraţia soluţiei finale (după trecerea ei prin coloana de extracţie) s-a stabilit prin titrare cu sol. KOH

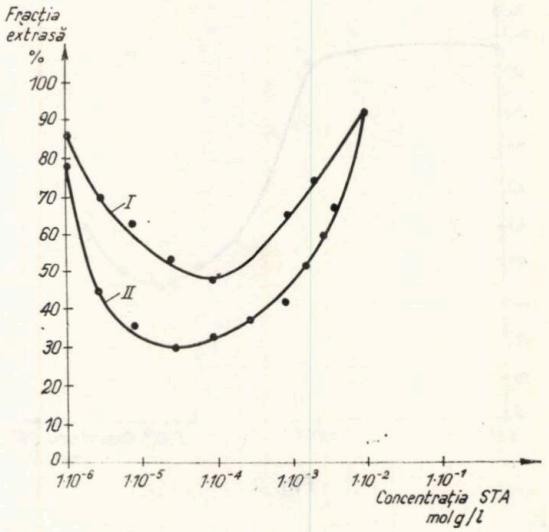


Fig. 4.

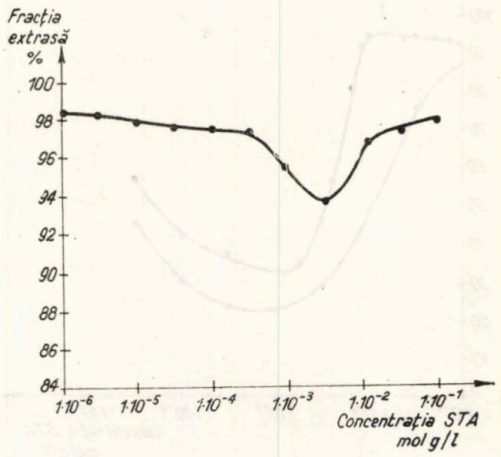


Fig. 5.

alcoolic de titru cunoscut utilizînd ca indicator fenolftaleina şi adăugînd suficient alcool etilic pentru a menţine o singură fază.

Temperatura de lucru a fost menţinută pentru toate determinările la 25 $\pm$ 1°C.

Mărimea unei picături s-a determinat din volumul fazei disperse necesar să formeze un număr determinat de picături. Concentrația substanței superficial active în apoasă a fost variată între $1,10^{-6}$—$1,10^{-2}$ mol/l.

Calculele de transfer de masă au fost făcute numai asupra concentrației de acid acetic în faza benzenică. Concentrația acidului acetic în faza apoasă s-au determinat numai pentru calculele de bilanț de materiale.

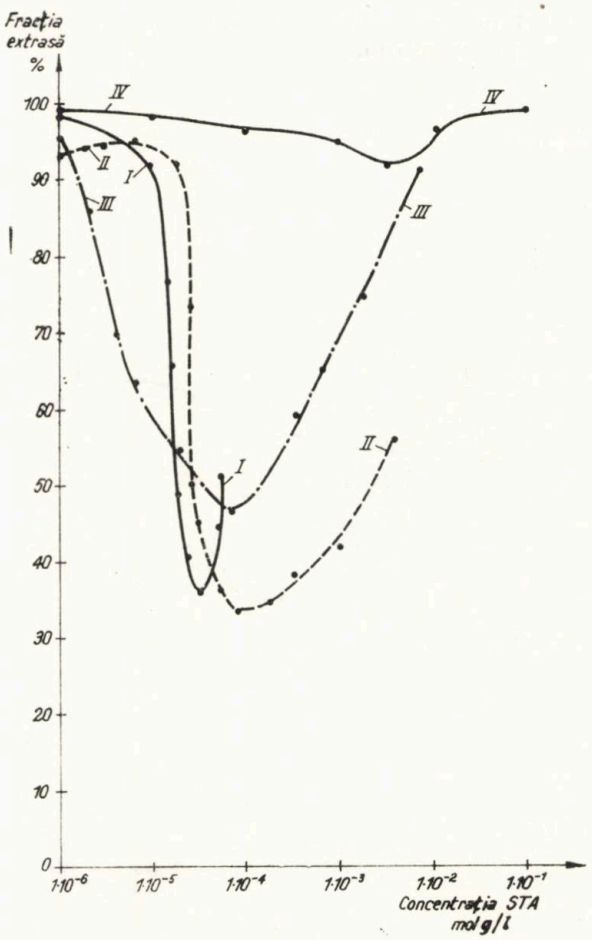


Fig. 6.

Rezultate experimentale. Pentru toate determinările efectuate s-a calculat fracția de acid acetic extrasă de faza apoasă din picăturile de soluție benzenică ca raport între diferența concentrației inițiale a acidului acetic în soluția benzenică și concentrația finală a acestei so-

luţii după trecerea prin coloană spre colectare faţă de concentraţia iniţială.

În funcţie de concentraţia substanţei superficial active prezente în faza apoasă, au fost obţinute diverse valori pentru fracţia de acid acetic extras, care sînt reprezentate grafic în diagramele din figurile 2—5. Toate determinările s-au făcut în aceleaşi condiţii şi anume utilizînd acelaşi capilar ($d=0{,}092$ cm) pentru formarea picăturilor, lucrînd cu aceeaşi înălţime a coloanei de extracţie (II $h=35$ cm; I $h=90$ cm) şi cu aceiaşi concentraţie iniţială a soluţiei de acid acetic în benzen ($c=1$ M). De remarcat este faptul că toate curbele au în general aceiaşi formă, prezentînd un minim.

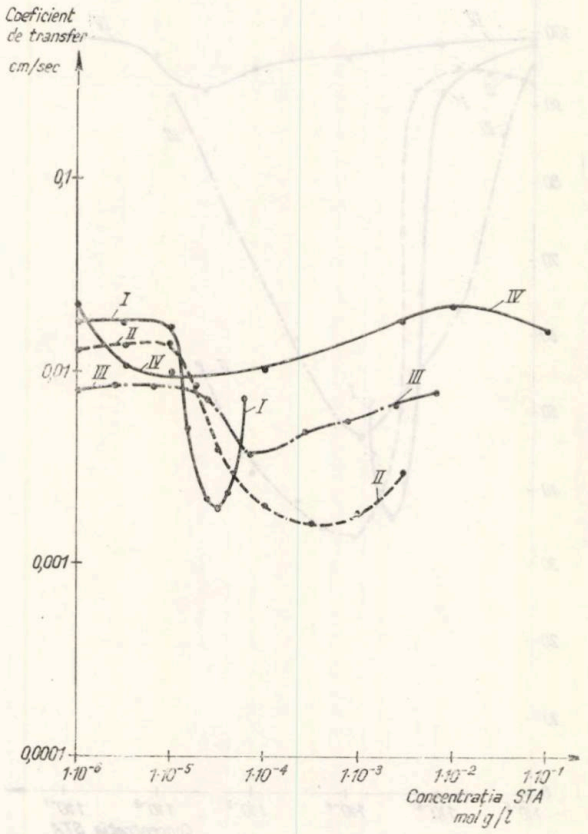


Fig. 7.

În scop comparativ curbele trasate pentru fracţia extrasă faţă de concentraţia celor 4 substanţe superficial active folosite sînt reprezentate grafic împreună în fig. 6, pentru motive de comparaţie.

Fig. 7 reprezintă curba variaţiei coeficientului total de transfer de masă faţă de concentraţia apoasă a celor 4 substanţe superficial active

folosite. Acest coeficient total de transfer de masă a fost calculat conform formulei dată de Garner și Skelland (25) dintr-un bilanț de materiale asupra unei picături de diametru d, a cărei concentrație variază de la C_0 la C_f în timpul t :

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 (c_0 - c_f) = K.\, t.\, 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{c_0 - c_f}{ln\ \frac{c_0}{c_f}} \qquad (1)$$

de unde în urma simplificărilor se ajunge la ec. (2) :

$$K = \frac{d}{6\,t}\, ln\, \frac{C_0}{C_f} \qquad (2)$$

În această formulă :

C_0 = concentrația solutului în faza dispersă la baza coloanei (după scăderea efectului de capăt) — mol/cc ;
C_f = concentrația solutului în faza dispersă la partea superioară a coloanei — mol/cc ;
t = timpul de parcurgere al coloanei de către o picătură — sec.
d = diametrul picăturei — cm.

Acțiunea agenților anionici

Hexadecil sulfatul de sodiu. Curba variației fracției de acid acetic extras din soluția benzenică, Fig. 2, în funcție de concentrația hexadecil sulfatului de sodiu în faza apoasă, prezintă un minim pronunțat pentru o concentrație de 5.10^{-5} mol/l. Pentru concentrații mai mari de aditiv, curba prezintă o creștere a fracției extrase. Deoarece solubilitatea maximă la temperatura de 25°C a hexadecil sulfatului de sodiu este de cca 7.10^{-5} mol/l nu s-au putut obține soluții mai concentrate decît această valoare și în consecință determinările s-au oprit la acest punct.

Dodecil sulfatul de sodiu. Curba variației fracție extrase (fig. 3), prezintă deasemeni un minim pentru concentrația de cca 9.10^{-5} dodecil sulfat de sodiu. În continuare crescînd concentrația aditivului peste 9.10^{-5} mol/l, are loc o creștere a fracției de acid acetic extras și dacă solubilitatea dodecil sulfat de sodiu ne-ar fi permis desigur că valorile fracției extrase ar fi tins către cele obținute în absența aditivului. Cum solubilitatea dodecil sulfatului de sodiu la temperatura de 25°C este de 5.10^{-3} mol/l, determinările fracției extrase peste această concentrație nu s-au mai putut continua.

Acțiunea agenților cationici

Clorura de N-cetil pirimidină căreia îi corespunde graficul din figura 4 prezintă o curbă a variației fracției extrase în funcție de concentrația aditivului asemănătoare cu precedentele, minimul curbei corespunzînd concentrației de $0{,}84.10^{-4}$ mol/l aditiv. Cum acest

aditiv prezintă o mai mare solubilitate în apă, s-a putut lucra cu o gamă mai variată de concentrații obținîndu-se pentru concentrații mai mari de 5.10^{-3} mol/l valori ale fracției extrase apropiate de cele obținute în absența aditivului.

Clorura de N-cetil γ picolină are o acțiune întru totul asemănătoare clorurei de N-cetil pirimidină.

Acțiunea agenților neionici

Alcoolii cetilic se comportă asemănător sulfaților de alchil cu singura deosebire că fiind insolubil în apă, a fost dizolvat în faza benzenică.

Discuții asupra mecanismului transferului de masă în prezența substanțelor superficial active

Curbe asemănătoare (cu un minim) pentru variația fracției de solut extras în funcție de concentrația aditivului au fost obținute de Garrner și Skelland în extracția prin picături (25), de către Cullen și Davidson (12) în procesele de absorbție, de către Emmert și Pigford (16) și de Ternovskaia și Belopolski (47) în coloane cu pereți udați și de către Mirev, Elenkov și Balarev (35) într-un film lichid orizontal.

După cum reiese din datele de literatură precum și din rezultatele prezentei lucrări, fenomenul este mult mai general, aplicîndu-se pentru foarte multe sisteme și foarte mulți aditivi. Foarte probabil că cercetătorii care au semnalat doar aspectul reducerii vitezei de transfer cu creșterea concentrației substanței superficial active, au experimentat doar domeniul de concentrații corespunzător porțiunii din stînga acestui minim iar cei care au remarcat doar aspectul creșterii vitezei de transfer cu creșterea concentrației substanței superficial active, au cercetat doar domeniul corespunzător concentrațiilor din dreapta minimului.

Explicației efectului substanțelor superficial active asupra transferului de masă bazat pe mecanismul stratului barier propus de Hutchinson (28) și Terjesen (9, 10, 48) în lumina datelor experimentale obținute, i se poate aduce următoarele obiecții: a) Dacă am admite acest mecanism conform căruia stratul moleculelor substanței superficial active adsorbit la suprafața picăturei se comportă ca o adevărată barieră la trecerea solutului prin interfață (rezistența adițională la transfer datorită acestui strat barier fiind direct proporțională cu fracția suprafeței picăturei acoperite de moleculele superficial active adsorbite) ar trebui să avem pentru minimul curbei, o concentrație de substanță superficial activă corespunzător saturației interfeței. Ori aplicînd ecuația de adsorbție a lui Gibbs:

$$-S = \frac{C}{RT} \cdot \frac{d\gamma}{dc}$$

unde

C = concentrația substanței superficial active în soluție ;

γ = tensiunea interfacială ;

S = cantitatea de substanță superficial activă adsorbită la interfață.

oricăruia dintre sistemele cercetate se constată că interfața este departe de saturare pentru concentrația substanței superficial active în faza apoasă corespunzătoare minimului.

b) De asemenea, dacă am admite că interfața este saturată în substanță superficial activă pentru concentrația ei în soluție corespunzătoare minimului, nu ne-am putea explica de ce adausurile în continuare de aditiv în soluție nu numai că nu măresc rezistența la transfer sau după cum ar fi mai logic să nu aibă nici-o influență asupra transferului, din contră măresc viteza de transfer și chiar pentru unii aditivi această mărire este foarte mare.

Acest lucru este în contradicție și cu variația tensiunii interfaciale în funcție de concentrația substanței superficial active deoarece pentru concentrația de saturație a interfeței curba acestei variații, ar trebui să devină orizontală ceea ce nu se obține decît pentru concentrații ale soluției de substanță superficial activă mult mai înalte decît cea corespunzătoare minimului.

Mecanismul hidrodinamic, în forma propusă de Garrner și Skelland (25) conform căruia rezistența adițională la transferul de masă exercitată de prezența substanțelor superficial active absorbite la interfață s-ar datora schimbării condițiilor hidrodinamice la interfață, limitînd aceste condiții hidrodinamice la circulația internă din picături, de asemenea, nu poate fi admis. În teoria lui Garrner, reducerea transferului de masă în prezența substanțelor capilar active este explicată prin inhibarea treptată a circulației interne din picături conform cu acumularea treptată a moleculelor substanțelor superficial active începînd cu partea posterioară a picăturii și continuînd apoi cu restul suprafeței spre partea frontală a picăturei. Cînd toată suprafața picăturii este acoperită de moleculele substanței superficial active, picătura se comportă ca o sferă rigidă, stagnantă în interior.

Creșterea în continuare a vitezei transferului de masă prin creșterea concentrației substanței superficial active peste concentrația corespunzătoare minimului, este atribuită de Garrner deformațiilor de alungire și turtire pe care le suferă picătura și care îi măresc mult suprafața de contact cu cealaltă fază.

Aceste explicații sînt nesatisfăcătoare și chiar Garrner (20) și-a dat seama de acest lucru cercetînd cazul picăturilor mici ar căror interior era stagnant chiar în lipsa substanțelor superficial active și care totuși prezentau o reducere a vitezei de transfer de masă în prezența acestor substanțe superficial active. De asemenea, nici explicația dată de Garrner creșterii vitezei de transfer peste concentrația critică de substanță superficial activă prin deformările de turtire-alungire ale pică-

turei nu este satisfăcătoare deoarece chiar în determinările prezentei lucrări s-au obţinut creşteri ale vitezei de transfer peste o anumită concentraţie a substanţei superficial active fără a fi observate deformării apreciabile ale picăturei. Nici fenomenul general observat al creşterii apreciabile a suprafeţei totale a picăturilor în raport cu volumul lor total datorită micşorării diametrului picăturei ce se produce concomitent cu creşterea concentraţiei substanţei superficial active peste o anumită limită, vezi fig. 8 nu poate să dea o explicaţie satisfăcătoare creşterilor mari a vitezei transferului de masă obţinută pentru unele sisteme şi unii aditivi.

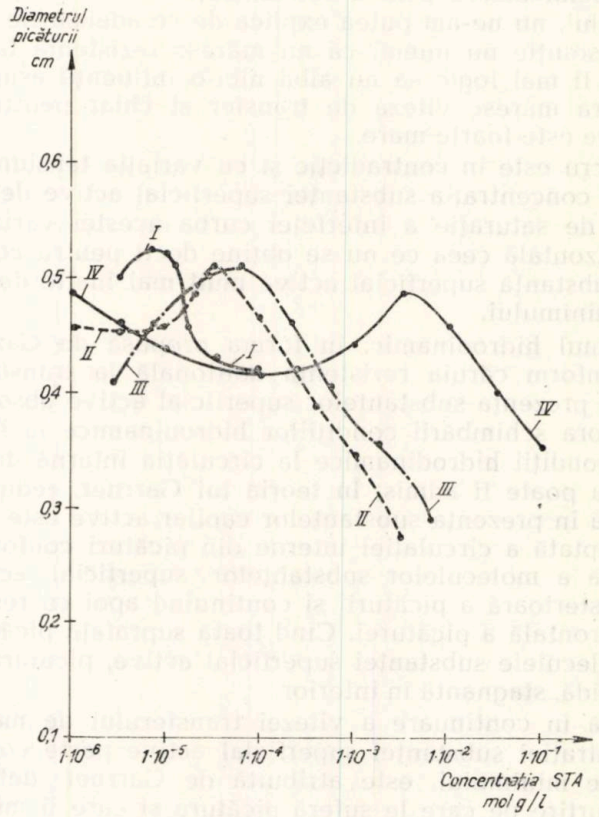


Fig. 8.

Levici care a fundamentat teoria hidrodinamică printr-un calcul teoretic al mişcării lichidelor în prezenţa substanţelor superficial active (32) nu reuşeşte totuşi să rezolve problema decît pentru cazul numerelor Reynolds foarte mici : $Re \ll 1$, neîntîlnite în practica extracţiei şi de asemenea, în calculele sale nu se ocupă decît de aspectul reducerii vitezei superficiale sub influenţa substanţelor superficial active.

Ruckenstein (52) făcînd uz de o metodă integrală ajunge la aceleaşi rezultate ca şi Levici (32) în cazul mişcării unei picături în prezenţa substanţelor capilar active pentru un domeniu mai vast a valorilor componentei tangenţiale a vitezei la interfaţă. De asemenea, folosind o metodă de interpolare rezolvă şi calcul coeficientului de transfer de masă în cazul numerelor $Re \gg 1$.

După cît vedem din această succintă prezentare, pînă astăzi nu a fost dată o teorie generală asupra mecanismului transferului de masă în prezenţa substanţelor superficial active, problemă foarte complexă fiind legată de schimbarea tuturor condiţiilor interfaciale şi anume schimbarea tensiunii interfaciale a componentelor vitezei de mişcare a interfeţei, a procesului de difuzie, adsorbţie şi desorbţie la interfaţă a forţelor de interacţiune dintre solut solvent, şi acelor dintre substanţă superficial activă şi solvent etc.

O explicaţie relativ simplă a fenomenelor observate la extracţia prin picături în prezenţa substanţelor capilar active, susţinută în una din lucrările lui Ruckenstein (53) este următoarea : Conform teoriilor moderne ale proceselor bazate pe difuzie se admite că difuzia solutului dintr-o fază în cealaltă este facilitat de mişcările continui ale interfeţei aşa-zisul „efect Marangoni" descris pe larg în lucrările lui Sterling şi Scriven (46), Olander şi Reddy (36) Bond şi Newton (4), Lewis Pratt (31) etc. În cazul picăturilor, aceste mişcări (oricare ar fi forma lor) provoacă o circulaţie continuă a interfeţei de la partea frontală a picăturei către cea posterioară. Dacă în faza continuă prin care se mişcă picăturile este prezentă o substanţă superficial activă, aceasta se va adsorbi la suprafaţa picăturei şi din cauza mişcării generale a interfeţei se vor acumula mai întîi la partea posterioară a picăturei, extinzîndu-se treptat către partea frontală. Datorită acestei concentraţii neuniforme a moleculelor substanţei superficial active adsorbite la interfaţă, va apare un gradient corespunzător al tensiunii interfaciale $\frac{d\gamma}{dc}$ care va da naştere unei forţe tangenţiale tinzînd să deplaseze moleculele adsorbite din punctele cu tensiune interfacială scăzută (partea posterioară a picăturei) către punctele cu tensiune interfacială ridicată (partea frontală a picăturei), deci în sens invers circulaţiei normale a interfeţei. Apariţia acestei forţe tangenţiale datorată gradientului tensiunii interfaciale care se opune mişcării de circulaţie normale a interfeţei provoacă reducerea vitezei de mişcare a interfeţei şi corespunzător are loc o reducere a vitezei de transfer de masă. O dată cu creşterea concentraţiei de molecule superficial active adsorbite la interfaţă crescînd gradientul tensiunii interfaciale, creşte şi forţa tangenţială şi respectiv se reduc viteza superficială şi viteza de transfer de masă. Cînd $\frac{d\gamma}{dC}$ a atins valoarea sa maximă şi care corespunde unei anumite fracţiuni din interfaţă acoperită de molecule superficial active, viteza superficială şi viteza de transfer ating valoarea lor minimă. Acu-

mulările în continuare a moleculelor superficial active la interfață face să scadă valoarea lui $\frac{d\gamma}{dC}$ și deci și valoarea forței tangențiale ce se opune mișcării interfeței și deci să crească viteza superficială și viteza de transfer de masă. Cînd interfața picăturei a devenit saturată în molecule superficial active, gradientul tensiunei interfaciale $\frac{d\gamma}{dC}$ a devenit zero și deci forța tangențială se anulează interfața refăcîndu-și integral mobilitatea. Adaosurile în continuare de substanță superficial activă în faza continuă nu mai au nici o influență asupra mișcării interfeței saturată cu molecule superficial active. Aceasta explică forma curbelor obținute de Garrner (25) cu agenți superficiali activi puternici cum este bromura de dodecil piridină și care prezintă după minim o porțiune orizontală corespunzătoare saturației interfeței.

Tratarea problemei efectului substanțelor superficial active asupra transferului de masă bazat pe modelul hidrodinamic prezentat mai sus, nu elimină problema comportării specifice a substanțelor superficial active, existînd o influență esențială din partea proprietăților stratului de molecule superficial active adsorbit și anume difuzivitatea, adsorbția acestor molecule vor influența în mod diferențiat acest mecanism.

Laboratorul de chimie anorganică
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Angelescu E., Nicolaescu A., Bărbulescu Em.* — Studii și cercetări Chim. Acad. București, 2, 357 (1961).
2. *Balarew C.* — Dokladei Bolgarskoi Acad. Nauk 16, 157 (1963).
3. *Bakker C. A. P., van Buytenen P. M., Beck W. J.* — Chem. Eng. Sci. 21, 1039 (1966).
4. *Bond W. N., Newton D. A.* — Phil. Mag. 5, 794 (1950).
5. *Boyadjev L.* — Dokladei Bolgarskoi Acad. Nauk — 16, 145 (1963).
6. *Brown A. H.* — Britsh. Chem. Engng. — 10, 3 (1965).
7. *Byron E., Ashus și Andreas Acrivos* — Chem. Eng. Sci. — 22, 389 (1967).
8. *Chișinevski M. H., Kornienko T. C.* — J. prikl. him. 36, 2681 (1963).
9. *Christensen G. B., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. 7, 222 (1958).
10. *Christensen G. B., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. 9, 225 (1959).
11. *Chu C. J., Taylor C. C., Levy D. J.* — Chem. Ind. Eng. J. 6, 119 (1949).
12. *Cullen E. J., Davidson J. F.* — Chem. Eng. Sci. 6, 49 (1956).
13. *Davis R. E., Acrivos A.* — Chem. Eng. Sci. 21, 681 (1966).
14. *Dreger E. E., Keim G. I., Miles G. D., Shedlovsky L., Ross J.* — Ind. Eng. Chem. 36, 610 (1949).
15. *Duda J. L., Vrentas J. S.* — Chem. Eng. Sci. 22, 27 (1967).
16. *Emmert R. F., Pigford R. I.* — Chem. Engng. Progress 50, 87 (1954).
17. *Farmer W. S.* — Duk Ridge National Laboratory unclassified report ORNL 635 (1950).

18. *Francisc R. C., Berg J. G.* — Chem. Eng. Sci. — 22, 389 (1967).
19. *Fujinawa K., Nakaike J., Kurihara T.* — Kagaku Kogaku 22, 420 (1958)(.
20. *Garrner F. H., Hale A. E.* — Chem. Eng. Sci. — 2, 157 (1953).
21. *Garrner F. H., Hamertonn D.* — Chem. Eng. Sci. — 3, 1 (1954).
22. *Garrner F. H., Skelland A. H. P.* — Chem. Eng. Sci. — 4, 1 (1955).
23. *Garrner F. H.* — *Trans. Inst.* Chem. Engrs. 28, 88 (1950).
24. *Garrner F. H., Skelland A. H. P.* — Ind. Eng. Chem. — 46, 1255 (1954).
25. *Garrner F. A., Skelland A. H. P.* — Ind. Eng. Chem. — 48, 56 (1956).
26. *Hertjes P. M., De Nil L. H.* — Chem. Eng. Sci. 21, 755 (1966).
27. *Holm A., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. 3, 265 (1954).
28. *Hutchinson E. Y.* — J. Phip. Chem. 52, 897 (1948).
29. *Johnstone H. F.* — Trans. Faraday Soc. 50, 413 (1954).
30. *Kasatkin A. G., Kagan C. E., Pruhanov V. G.* — Him. prom. 6, 488 (1960).
31. *Lewis J. B., Pratt H. R.* — Nature 171, 1155, (1953).
32. *Levici V. G.* — Hidrodinamica fizico-chimică — Fiz. mat. ghiz. Moscova 1959 cap. V, p. 255.
33. *Lindland C. P., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. — 5, (1956).
34. *Melhus B. I., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. — 7, 83 (1957).
35. *Mirev D., Elenkov D., Balarev H.* — Izv. him. Inst. Blg A.N.8, 73 (1961).
36. *Olander R., Reddy B.* — Chem. Eng. Sci. 19, 67 (1964).
37. *Passino R., Giona A. R.* — Chemica e Industria 42, 1077 (1966).
38. *Pinkev E.* — Tehnica de laborator a proceselor chimice continui, Moscova, Izdtv Akad. Nauk, SSSR, 1953.
39. *Prince R. G., Hunter T. G. H.* — Chem. Eng. Sci. 6, 245 (1957).
40. *Reid C. R., Sherwood T. K.* — Proprietățile gazelor și lichidelor. Estimarea și corelarea lor, Mc. Graw—Hill Series.
41. *Ruckenstein E.* — Rev. Chimie — 9, 500 (1959).
42. *Ruckenstein E.* — Rev. Chimie — 11, 1427 (1967).
43. *Ruckenstein E.* — Rev. Chimie — 15, 39 1967).
44. *Seidell A.* — Solubilitățile compușilor organici. Ed. III, vol. II, p. 108 Distribuția acidului acetic între benzen și apă la 25°C după Brown și Bury.
44. *Sherwood T. K., Evans J. E., Longen J. V. A.* — Ind. Eng. Chem. 31, 1146 (1939).
46. *Sterling C. V., Scriven L. E.* — A. I. Ch. E. J. 5, 514 (1959).
47. *Ternovskaia A., Belopolski A.* — J. fiz. him. 24, 981 (1950); 26, 1040 (1952).
48. *Thorsen G., Terjesen S. G.* — Chem. Eng. Sci. — 17, 137 (1962).
49. *Volpicelli G., Massimilla L.* — La chemica e l'industria 45, 405 (1963).
59. *West F. B., Herrman A. J., Chong A. T., Thomas L. E. K.* — Ind. Eng. Chem. 44, 625 (1952).
51. *West F. B., Robinson P. A., Morgenthaler A. C., Beck Jr, Mc. Gregor* — Ind. Eng. Chem. 43, 235 (1951).
52. *Ruckenstein E.* — Chem. Eng. Sci. 19, 131 (1964).
53. *Ruckenstein E.* — Chem. Eng. Sci. 19, 504 (1964).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

C. Z. : 66.022:621.928:541.01

NOU CRITERIU DE OPTIMIZARE A PROCESELOR DE SEPARARE *

FLORIN EM. DANEȘ

Procesele de separare au o importanță deosebită atît pentru industria chimică sau extractivă cît și pentru analizele chimice, granulometrice, mineralogice etc. În cele ce urmează folosim nomenclatura chimică, respectiv termenii de „component" și „fază". În acest sens, obiectul oricărui proces de separare constă în realizarea unei repartiții cît mai disproporționate a componenților în fazele sistemului, astfel încît separarea mecanică a fazelor să ducă la obținerea mai multor fracțiuni (în număr egal cu numărul de faze), fiecare dintre ele fiind îmbogățită în unul dintre componenți. În cazul unei separări totale (caz care de altfel nu este realizabil în practică) fiecare fază conține la sfîrșitul separării numai unul dintre componenții amestecului inițial.

Indiferent de numărul componenților și ai fazelor, orice proces de separare poate fi descompus într-o serie de procese simple cu două faze și doi componenți, de aceea se va discuta în continuare asupra sistemelor de două faze și doi componenți. Se va face distincția între procese elementare (monocelulare) de separare, P.E.S. și procese policelulare de separare, P.P.S., primele constînd într-o singură separare a fazelor, spre deosebire de celelalte.

Analiza critică a criteriilor, existente pentru optimizarea separării

În literatură s-au introdus, cu mai mult sau mai puțină justificare, o serie întreagă de criterii pentru optimizarea separării. Cu excepția criteriului lui Dirac și Cohen [1], toate aceste criterii au o lipsă esențială : ele țin cont doar de efectul de separare și nu de efortul întreprins pentru a realiza acest efect. Desigur, este de dorit un „efect" maxim al separării, prin efect înțelegînd gradul de disproporționare al concentrațiilor componenților în cele două faze ; dacă însă acest efect este obținut cu ajutorul unui „efort" mare (prin „efort" înțelegînd suma cheltuielilor de materiale, manoperă și echipament), separarea respectivă nu poate fi considerată optimă. Introducerea în criteriul de optimizare a ambilor factori „efect" și „efort" se impune deci cu necesitate.

*) Manuscris predat la redacție la 2 februarie 1969.

Chiar limitîndu-ne la criteriile aplicabile oricărui proces de separare, numărul de criterii existente este foarte mare, depăşind probabil 100. De aceea, vom analiza aici numai cîteva dintre criterii, considerate tipice, insistînd asupra deficienţelor lor.

După provenienţă, criteriile de separare cu aplicabilitate generală pot fi tehnologice, termodinamice, cinetice sau economice [2].

1. *Criteriile cinetice* nu ţin cont decît de timpul necesar separării şi nu de calitatea acesteia, de aceea nu permit alegerea condiţiilor optime de separare şi ies din cadrul discuţiei.

2. Dintre criteriile *tehnologice*, tipice sînt :

a) Gradul de recuperare al elementului valoros, $C_1 = G_1 \cdot x = \max$. În cele ce urmează se notează prin G_0, G_1, G_2 suma cantităţilor celor doi componenţi *A* şi *B* în amestecul iniţial, în faza 1 (bogată în *A*) şi în faza 2 (bogată în *B*) ; w, x, y sînt concentraţiile componentului *A* în amestecul iniţial, faza 1 şi respectiv faza 2 ($y<w<x$). Cînd este nevoie de indicarea concentraţiilor celor doi componenţi se utilizează notaţiile :

$$w_A = w \; ; \; w_B = 1 - w \; ; \; x_A = x \; ; \; x_B = 1 - x \; ; \; y_A = y \; ; \; y_B = 1.$$

Se consideră prin convenţie $G_0 = 1$.

Se poate observa că în criteriul C_1 se ţine cont numai de efectul de separare şi nu şi de efortul consumat (obiecţia 1). În afară de aceasta, criteriul C_1 i se poate aduce obiecţia că se limitează la cazul cînd componentul *B* nu are nici o valoare (obiecţia 2) ; de cele mai multe ori însă interesează recuperarea ambilor componenţi în amestec. O altă lipsă a acestui criteriu este evidentă dacă se remarcă că valoarea maximă $C_{1,\max} = W$ este atinsă atunci cînd nu are loc nici un fel de separare (obiecţia 3).

b) Calitatea „concentratului" (faza 1), $C_2 = x = \max$. Afară de faptul că nu ţine cont de efort (obiecţia 1) şi de valoarea componentului *B* (obiecţia 2 de mai sus), criteriul C_2 are şi dezavantajul că un proces de separare la care cantitatea de fază 1 este infinit mică este considerat ca foarte eficient dacă $x = \max$ (obiecţia 4) ; or, totdeauna scăderea lui G_1 va duce la creşterea lui x.

c) Criteriul lui Kuzkin [3], $C_3 = x - y = \max$. Se poate ridica obiecţia 4 de mai sus — nu se ţine cont de cantitatea G_1 a concentratului — şi obiecţia 1.

d) Criteriul selectivităţii, $C_4 = \dfrac{x_A \cdot y_B}{y_A \cdot x_B} = \dfrac{x(1-y)}{y(1-x)} = \max$. În afară de obiecţiile 1 şi 4 se remarcă aici că la majoritatea proceselor de separare cîtul respectiv are o valoare ce nu depinde de proporţia $\dfrac{G_1}{G_2}$ (obiecţia 5), valoare constantă notată în continuare prin *S* (coeficient de selectivitate) :

$$S = \frac{x(1-y)}{y(1-x)} > 1 \qquad (1)$$

e) Criteriul lui Hancock [4], $C_5 = G_1(x\text{-}w) = \max.$, cel mai utilizat actualmente dintre criteriile de selectivitate [5, 6]. Acest criteriu ține cont atît de cantitatea concentratului, prin factorul G_1, cît și de calitatea sa, prin factorul $(x\text{-}w)$, înlăturînd obiecțiile 3 și 4. În plus, criteriul are aceeași valoare pentru ambii componenți deoarece $G_1(x_A - w_A) = G_2(y_B - w_B)$ ceea ce înlătură și obiecția 2. Criteriul Hancock nu ține însă cont de efort (obiecția 1) și nici de faptul că dificultatea separării crește odată cu puritatea fazelor (obiecția 6). Astfel la $w = 0{,}8$ acest criteriu are valori foarte apropiate pentru valorile $x = 0{,}99$ și 0,999, deși a doua separare este evident mult mai dificilă decît prima.

De remarcat că în formulările obișnuite ale criteriului Hancock apare la numitor factorul $w(1 - w)$ sau $w\left(1 - \frac{w}{x_T}\right)$ unde x_T este valoarea maximă teoretică a lui x. Factori de acest tip sînt omiși sistematic în această discuție, deoarece calitatea w a materiei prime este o dată a problemei, ca și x_T.

3. *Criterii termodinamice*

a) Criteriul entropic, egal cu valoarea absolută a entropiei de separare [7, 8], $C_6 = G_1(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B) + G_2(y_A \ln y_A + y_B \ln y_B) - G_0(w_A \ln w_A + w_A + w_B \ln w_B) = \max.$ Și acestui criteriu i se pot aduce obiecția 1 ca și obiecția 6 de mai sus — aceea că valorile C sînt prea înghesuite în domeniul purităților mari ($x_B \ll 1$ respectiv $y_A \ll 1$).

b) Criteriul potențialului de separare, al lui Dirac și Cohen [1]:

$$C_7 = G_1(x_A - x_B) \cdot \ln \frac{x_A}{x_B} + G_2(y_A - y_B) \ln \frac{y_A}{y_B} -$$

$$- G_0(w_A - w_B) \ln \frac{w_A}{w_B} = \max.$$

a fost dedus pentru cascade de separare a izotopilor, avînd semnificația lucrului mecanic necesar (proporțional cu cantitatea de lichid pompată în total) în cazul cascadei ideale — cascada în care lucrul mecanic este minimizat prin distribuția optimă a celulelor de separare [9]. Acest criteriu ține deci cont de efortul de separare, înlăturînd obiecția 1, ceea ce îl deosebește de toate celelalte criterii discutate. De altfel criteriul Dirac și Cohen înlătură și obiecțiile 2÷6. În schimb criteriul C_7 nu ia în considerare efectul separării (obiecția 7). O altă deficiență a sa este forma matematică greoaie (obiecția 8).

4. *Criterii economice*

Tipic este criteriul lui Razumov [10], $C_8 = G_1P_1 - P_{pr} = \max.$, unde P_1 este valoarea pe unitate de masă a concentratului iar P_{pr} este costul separării și al materiei prime pentru unitatea de masă de amestec inițial.

Criteriile economice țin cont atît de efectul cît și de efortul separării (ceea ce înlătură obiecțiile 6 și 7), exprimîndu-le cantitativ cu o justi-

ficare logică — de exemplu C_8 reprezintă valoarea nou creată la prelucrarea unității de masă a amestecului inițial. Desigur, ar fi mai corect ca valoarea nou creată să fie raportată nu la unitatea de masă de amestec inițial ci la valoarea efortului (obiecția 9). Corectarea s-ar putea face ușor introducînd un criteriu economic modificat de formă

$$C_9 = \frac{G_1 P_1 - P_{pr}}{P_{pr}} = \max.$$

Totuși, chiar la forma C_9 rămîne o deficiență a tuturor criteriilor economice : dificultatea de a fixa prețul P_1 în funcție de calitatea x a concentratului (obiecția 10). Această dificultate se face și mai mult simțită în cazul aprecierii valorii „cozii" (fracției G_2) și face procedeele economice total inaplicabile atunci cînd separarea nu dă direct un produs finit comercializabil ; de exemplu acesta este cazul la optimizarea P.E.S.

Plecînd de la obiecțiile ridicate la analiza acestor exemple tipice de criterii pentru optimizarea separării, ne propunem să găsim un criteriu care să poată înlătura toate obiecțiile și să fie aplicabil în condiții cît mai generale.

Criteriul de optimizare propus

Propunem drept criteriu :

$$C = \frac{\text{Efect}}{\text{Efort}} = \max. \qquad (2)$$

Semnificația calitativă a funcțiilor „efect" și „efort" este cea discutată în paragraful precedent. Luăm cîtul și nu diferența acestor mărimi, deoarece între cele două situații din tabelul 1 este evident că a doua este mai avantajoasă, cu toate că diferența este mai mică :

Tabelul 1

	situația 1	situația 2
Efect (unități arbitrare)	12	2
Efort (unități arbitrare)	10	1
Diferența	2	2
Cîtul	1,2	1
Avantajos din punct de vedere al diferenței :	situația 1	
Avantajos din punct de vedere al cîtului :	situația 2	

Drept efort se consideră — ca și la deducerea criteriului C_7 al potențialului de separare — suma tuturor debitelor din instalație (sau, pentru instalații discontinue, suma tuturor cantităților intrate și ieșite din fie-

care celulă). Această mărime este — cu o bună aproximare — proporțională cu cheltuielile de exploatare și cu investițiile (căci suma volumelor aparatajului este egală cu jumătate din suma debitelor). Factorul de proporționalitate este desigur diferit, dar pentru un amestec inițial dat și o metodă de separare dată el va avea o valoare constantă. Deci :

$$\text{Efort} = \sum_{i=0}^{n} G_i . \tag{3}$$

Pentru efectul separării nu se pot adopta criterii economice deoarece prețul produselor finite — ele însele amestecuri de A și B — nu este ușor de definit. Totuși vom folosi ca efect „valoarea" nou creată, adică :

$$\text{Efect} = V = G_1 V_1 + G_2 V_2 - G_0 V_0 = V_f - V_0 \tag{4}$$

unde V_1, V_2, V_0 sînt valorile unităților de masă ale fazelor 1 și 2, respectiv a amestecului inițial. „Valorile" V_1, V_2, V_0... nu sînt însă valorile în unități comerciale, ci măsuri ale dificultății de trecere de la o compoziție la alta. Drept o astfel de măsură vom adopta tocmai valoarea „potențialului de separare" :

$$V_i = (x_{Ai} - x_{Bi}) \ln \frac{x_{Ai}}{x_{Bi}} \tag{5}$$

deoarece V_i astfel definit dă valoarea efortului ce ar fi fost necesar în cazul separării cu ajutorul unei cascade ideale. Curba V_i în funcție de compoziție este prezentată în fig. 1 Luarea ca funcție V a expresiei (5) înlătură inconvenientele semnalate la punctul precedent. Astfel :

a) $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$, ceea ce implică că valoarea V_f după separare este totdeauna mai mică decît valoarea inițială V_0 ($V_f = G_1 V_1 + G_2 V_2$).

b) $\lim_{x_A \to 0} V = \infty$ și $\lim_{x_B \to 0} V = \infty$, ceea ce implică o dificultate crescîndă a separării, pe măsura creșterii purității.

c) criteriul C dat de relațiile (2÷5) ține cont de purificarea ambilor componenți : $C(A), B) = C (B, A)$.

d) criteriul C ține cont atît de cantitatea cît și de calitatea produselor, atît pentru faza A cît și pentru faza B.

e) criteriul C ține cont de valoarea produselor — cu cît produsul este mai pur V este mai mare — fără a implica valori bănești care sînt greu de aflat, variabile, oarecum arbitrare și imposibil de cunoscut pentru produsele intermediare.

Deci sistemul de optimizare discutat înlătură toate inconvenientele criteriilor C_1—C_{10} menționate anterior. Unul singur dintre aceste inconveniente — forma nu prea simplă a expresiei — pare să rămînă, dar forma expresiei „efect" de la numărătorul relației (2), formă dată de relațiile (4) și (5), poate fi simplificată, după cum se va vedea în următoarele două paragrafe unde tratăm două exemple concrete.

Optimizarea în cazul unui proces elementar de separare

Prin P.E.S. înțelegem procesul de separare compus dintr-o singură operație de separare a fazelor, conform fig. 2; y și x sînt legate prin relația de selectivitate (2) $\frac{x}{1-x} = S\frac{y}{1-y}$, cu $S > 1$,

deci $x > w > y$. Relațiile de bilanț de materiale sînt :
$G_0 = C_1 + G_2$; $G_0 W = G_1 x + G_2 y$; conform relației (3) : Efort $= G_0 + G_1 + G_2 = 2G_0$; combinînd relația (4) cu relația (5) :

$$\text{Efect} = G_1(2x-1)\ln\frac{x}{1-x} + G_2(2y-1)\ln\frac{y}{1-y} - G_0(2w-1)\ln\frac{w}{1-w}\cdot$$

Înlocuind G_1 și G_2 în funcție de G_0 $\left(G_1 = \frac{w-y}{x-y}G_0\ ;\ G_2 = \frac{x-w}{x-y}G_0\right)$ și raportînd la efort, se ajunge la :

$$C = \frac{(w-y)(2x-1)\ln\frac{x}{1-x} + (x-w)(2y-1)\ln\frac{y}{1-y} - (x-y)(2w-1)\ln\frac{w}{1-w}}{2(x-y)} \qquad (6\,a)$$

Descompunînd în serie după puterile lui (x-w) și (y-w), se obține :

$$C = \frac{(x-w)(w-y)}{w(1-w)}\left[1 + \frac{(2w-1)^2}{4w(1-w)} + \frac{(2w\,1)(x+y-2w)}{2w^2(1-w)^2}\right] \qquad (6\,b)$$

sau, păstrînd doar termenii de ordinul 1 și ținînd cont că pentru problema dată w = cst., criteriul devine :

$$C' = (x-w)(w-y) = \max. \qquad (7\,a)$$

Criteriul C' indică deci că separarea în P.E.S. este cu atît mai bună cu cît produsul diferențelor de concentrație între amestecul inițial și faze este mai mare. Doar aparent C' nu depinde de cantitățile fazelor ; el se poate ușor pune sub forma :

$$C' = (x-y)^2\frac{G_1 G_2}{G_0^2}, \qquad (7\,b)$$

de unde se vede că separarea este cu atît mai bună cu cît diferența de concentrație a fazelor este mai mare și cu cît produsul cantităților din fiecare fază este mai mare (adică cu cît $\frac{G_1}{G_2}$ și $\frac{G_2}{G_0}$ sînt mai apropiate de $\frac{1}{2}$). Se poate însă arăta că cele două cerințe sînt contradictorii : la valori w, G_0, S date, cînd (x-y) crește, produsul G_1G_2 scade.

1) Pentru cazul cel mai simplu, $S=$cst. (S nu depinde de x), se poate deduce o expresie simplă pentru raportul optim al fazelor. Înlocuind în (7 a) valoarea $x=\frac{Sy}{1+(S-1)y}$ dată de relația (1) și derivînd pe C' în funcție de y, după egalarea cu zero a derivatei se obține :

$$y_{optim}=\frac{1}{S-1}\left[-1+\sqrt{\frac{S(1-w-wS}{S+w-wS}}\right],$$

$$(C')_{max}=\left[1-\sqrt{\frac{S}{(Sw+1-w)(S+w-Sw)}}\right]^2$$

și :

$$\left(\frac{G_1}{G_2}\right)_{optim}=\frac{\frac{1}{S-1}+w}{\frac{S}{S-1}-w}=\frac{1+RS}{1+S}. \tag{8}$$

Se vede că raportul $\left(\frac{G_1}{G_2}\right)_{optim}$ depinde de compoziția inițială (exprimată aici prin raportul $\frac{w}{1-w}=R$) și de coeficientul de separare S: pentru $R>1, \left(\frac{G_1}{G_2}\right)_{optim}>1$, iar la $R>1, \left(\frac{G_1}{G_2}\right)_{optim}<1$.

În plus, odată cu scăderea selectivității ($S\to 1$), $\left(\frac{G_1}{G_2}\right)$ va tinde către 1 (cazul separării izotopilor).

2) În cazul cînd S este variabil, de disting următoarele situații :

a) $y=Kx\,(K<1)$: $C=(x-w)(w-Kx)=\max$;

$\frac{dc}{dx}=-2Kx+w(K+1)$; $C=\max$, pentru $x=w\frac{1+K}{2K}$.

Introducînd în bilanțul de materiale : $G_1\cdot w\frac{1+K}{2K}+(1-G_1)\,wK\cdot$ $\cdot\frac{1+K}{2K}=w$, rezultă $\frac{G_1}{G_2}=K$.

b) $y=ax^2+bx+c$: $c=(x-w)(w-c-bx-ax^2)=\max$;

$$\frac{dc}{dx}\sim -30x^2+2(aw-b)x+(w-c+wb)$$

şi

$$x = \frac{a\,w - b + \sqrt{a^2 w^2 + a\,w\,(b+3) + (b^2 - 3\,a\,c)}}{3\,a}$$

c) Alte cazuri : interesează doar porţiunea de izotermă cuprinsă între x=w şi y=w. Se introduc variabilele : z=x—w, u=w—y. Se reprezintă *z(u)* pentru porţiunea de izotermă respectivă (în care $z>0$ şi $u>0$). Criteriul *C* corespunde dreptunghiului de suprafaţa maximă din fig. 3 a. Valorile optime se pot afla şi din reprezentarea *zu(u)*, ca în fig. 3 b, în care punctul optim corespunde maximului lui *zu*.

Optimizarea pentru un proces bicelular de separare

Procesul constă în etape de separare ; în cazul general se introduce amestecul iniţial în ambele celule de separare (fig. 2 b). Se poate arăta că dacă componentul *A* este mai valoros decît *B*, este mai rentabil ca intrarea amestecului să se facă doar în celula din dreapta, conform schemei din fig. 2 c, în care $G_0 = 1$ iar

$$\frac{x}{1-x} = S\,\frac{t}{1-t} \qquad (9\,a)$$

şi

$$\frac{z}{1-z} = S\,\frac{y}{1-y} \qquad (9\,b)$$

Ecuaţiile de bilanţ de materiale sînt :

$$G_3 - G_4 = G_1 = G_0 - G_2 \quad \text{şi} \quad G_3 \cdot z - G_4 \cdot t = G_1 x = G_0 w - G_2 y .$$

Pentru procesul bicelular reprezentat în fig. 2 b efortul $\left(\sum_{i=0}^{4} G_i\right)$ devine egal cu $2G_0 + G_3 + G_4$, deoarece $G_1 + G_2 = G_0$. În consecinţă pentru un x impus (care însă nu poate depăşi $\frac{S^2 w}{1 + (S^2 \quad 1)\,w}$, adică valoarea concentraţiei componentului *A* în faza II dacă concentraţia în faza I este w iar coeficientul de selectivitate este S^2), criteriul devine :

$$C = \frac{(x-w)\,(w-y)}{2\,G_0 + G_3 + G_4} \qquad (10)$$

Cum însă : $G_4 = G_3 - G_1$; $\frac{G_3 x - t}{G_1 z - t}$; $\frac{G_1}{G_0} = \frac{w-x}{x-y}$ şi $G_0 = 1$, rezultă :

$$C = \frac{(x-w)\,(w-y)}{2 + \frac{w-x}{x-y}\left(2\,\frac{x-t}{z-t} - 1\right)}$$ şi, derivînd în raport cu w, la x, y = cst.,

(deci și t, z = cst., fiind funcție de x respectiv y), se obține :

$$\frac{dc}{dw} = -\left(\frac{w-y}{dw}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-t}{z-t} - \frac{1}{2}\right) - 2\frac{w-y}{x-y} + 1 = 0 \cdot \qquad (11)$$

Se arată că C este maxim pentru rădăcina w pozitivă a ecuației (11). Înlocuind în ecuația (11) pe $t=f(x)$ și $z=f(y)$ din relațiile (9), se obține o ecuație de gradul trei în y, din care se află y la un x impus. Cu ajutorul relațiilor indicate se pot afla apoi t, z, G_1, G_2, G_3 și G_4.

Discuție

Criteriul de optimizare propus pentru procesul de separare are, după cum s-a văzut, sensul unui raport între *„efectul"* separării (considerat ca egal cu *efortul minim* necesar separării, în cazul separării optime în cascadă ideală și *efortul* efectuat. Evitînd expresiile complicate și valorile comerciale, criteriul propus introduce însăși prin aceasta o serie de simplificări, care îi limitează exactitatea de aplicare.

Astfel, la deducerea expresiei (x-w) (w-y) din relația 7 a, pentru efort s-au neglijat termenii superiori ai descompunerii în puteri ale lui (x-y). De aceea expresia este cu atît mai exactă cu cît raportul $\frac{2(x+y-2w)(2w-1)}{w(1-w)}$ are o valoare mai mică, adică este cu atît mai exactă cu cît coeficientul de selectivitate este mai mare sau procesul este compus din mai multe operații de separare. De aceea, un calcul exact dar mai laborios al optimizării utilizează pentru efect expresia (6 b) sau (4) în loc de (7). Ca efort se poate lua suma cantităților de fluid ce circulă prin instalație de exemplu $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4} Gi + \frac{1}{2}(G_1 + G_0 + G_2)$ în fig. 2 c. De altfel suma cheltuielilor, pe kg de amestec supus separării, variază linear (dar nu proporțional) cu suma debitelor ; din ambele motive, pentru „efort" în locul expresiei (3) este mai corect o expresie de tipul : $\text{Efort} = A + \sum_{i=1}^{n} G_i$, unde A este probabil pozitiv din cauza scăderii investițiilor specifice cu mărimea investiției. Valoarea constantei A depinde de cantitățile concrete de separare și natura procesului și se poate determina din datele economice avute la dispoziție.

Laboratorul de chimie fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

NOTĂ

C. Z.: 547.497.1:543/545:546

METODA DE DETERMINARE A BICARBONATULUI DE AMINO-GUANIDINĂ *

GRIGORE TEODORESCU

Bicarbonatul de amino-guanidină (A.G.B.) este un intermediar folosit, între altele, în sinteza 3-amino-1,2,4-triazolului sau a acidului 3-amino-1,2,4-triazol-carboxilic.

În lucrarea de față se prezintă metoda de determinare a A.G.B. 100% conținut în AGB tehnic, deoarece, este necesară cunoașterea conținutului în AGB 100% pentru a se preciza cifrele de randament și puritatea produsului finit în fabricația A.G.B.

Dat fiind că metodele cunoscute de determinare a aminelor sînt dificile de aplicat, în acest caz, s-a aplicat metoda de determinare prin complexare cu rainecatul de amoniu $NH_4[Cr(CSN)_4(NH_3)_2]$ (tetratiocianato diamino cromat (III) de amoniu = sarea lui Reinecke, prescurtat RA, reactiv folosit de noi și la determinarea altor substanțe [1...10], conform reacției :

$$\left[H_2N-\underset{\underset{NH}{\|}}{C}-NH-NH_3\right]^+ CO_3H^- \xrightarrow[-CO_2,\,-H_2O]{+\,H_2SO_4}$$

$$\left[H_2N-\underset{\underset{NH}{\|}}{C}-NH-NH_3\right]^+ SO_4H^- \xrightarrow[-NH_4^+,\,-SO_4H^-]{\left[Cr(SCN)_4(NH_3)_2\right]^-\,NH_4^+}$$

$$\left[H_2N-\underset{\underset{NH}{\|}}{C}-NH-NH_3\right]^+ \left[Cr(SCN)_4(NH_3)_2\right]^-$$

Principiul metodei

S-a dizolvat A.G.B. în soluție apoasă de 25% acid sulfuric. Se precipită sub formă de complex cu RA de 3% concentrație. Precipitatul format de culoare roz violet, se filtrează, se spală cu eter și se dizolvă în acetonă.

*) Manuscris predat la redacție la 25 februarie 1969.

Soluția rezultată de la dizolvarea complexului în acetonă se tratează cu exces de soluție de azotat de argint, 0,1 n cînd precipită rainecatul de argint conform reacției :

$$\left[Cr(SCN)_4(NH_3)_2\right]^- + Ag^+ \longrightarrow \left[Cr(SCN)_4(NH_3)_2\right] Ag$$

Precipitatul de rainecat de argint se filtrează, se spală cu apă distilată. Excesul de azotat de argint din filtrat și apele de spălare ale acestui precipitat, se titrează în modul cunoscut cu tiocianat de amoniu 0,1 n în prezența alaunului feriamoniacal.

S-au făcut încercări de precipitare a complexului A.G.B.+RA la diverse concentrații de acid sulfuric (5% ; 10% ;15% ; 20% și 25%) în apă.

Rezultatele obținute au fost aceleași, atît în ceea ce privește raportul molar AGB : RA, care s-a menținut 1 : 1, cît și în ceea ce privește eroarea metodei, numai că precipitarea a început după ce s-au adăugat 3,6 ; 2,8 ; 2 și respectiv 1,5 cm^3 RA 3% și nu de la prima picătură ca în cazul dizolvării AGB în acid sulfuric de 25% în apă.

Precipitatul de complex RA+AGB este roz-violet. El este destul de solubil în apă distilată pentru a da erori. Pentru acest motiv, se face precipitarea cu exces de RA și pentru același motiv, se spală complexul cu eter.

Modul de lucru

Se cîntăresc 2,25 g AGB (de 45...50% concentrație) și se dizolvă treptat (spumează) în pahar cu circa 100 cm^3 acid sulfuric 25% concentrație și s-a adus cantitativ în balon cotat de 250 cm^3, cu acid de aceeași concentrație, completîndu-se la semn.

S-au luat probe între 10...20 cm^3 soluție A.G.B. și s-au precipitat cu 10...20 cm^3 soluție apoasă RA de 3% concentrație, proaspăt preparată, adăugată treptat, sub continuă agitare, cînd soluția de deasupra complexului format este intens colorată, în roș-violet.

S-a lăsat să se depună complexul de RA+A.G.B. format și apoi s-a filtrat pe creuzet G_4, prinzînd filtratul în flacon curat. S-a antrenat cantitativ precipitatul rămas pe pahar pe creuzet, cu soluția de la filtrarea precipitatului și se spală cu 10...15 cm^3 eter pînă cînd soluția trece incoloră.

Complexul spălat, se dizolvă direct pe creuzetul filtrant cu 20... 25 cm^3 cu acetonă, se spală final creuzetul cu 10...15 cm^3 apă distilată și se prind, soluția și apele de spălare, într-un pahar de 250 cm^3. Se adaugă 30 cm^3 azotat de argint 0,1 n și 3...4 picături acid azotic 2 n. Se filtrează precipitatul de rainecat de argint pe filtru cantitativ prin pîlnie Hirsch se spală cu apă distilată și se prinde filtratul și apele de spălare într-un flacon de titrare de 750 cm^3. Se diluează la 500...600 cm^3 cu apă distilată se adaugă 0,5...1 cm^3 soluție alaun feriamoniacal (saturată la rece) (circa 40%) la care se adaugă și acid azotic pînă la limpezirea soluției de alaun), 3...4 picături acid azotic 2 n și se titrează exce-

sul de azotat de argint cu tiocianat de amoniu 0,1 n cu factor cunoscut.

La 1 cm³ $AgNO_3$ 0,1 n corespund 0,0136 g AGB. Rezultatele sînt redate în tabela următoare.

Tabelă

Metoda de determinare a bicarbonatului de amino-guanidină cu rainecat de amoniu

Nr. crt.	Soluție de analizat	AGB 100% substanță în probă	$AgNO_3$ 0,1n adăugat F. = 1,0000	NH_4SCN 0,1n la titrare F. = 0,9900	$AgNO_3$ 0,1n reacționat	AGB 100% în probă	AGB 100% în AGB tehnic prin determinare cu RA	AGB 100% în AGB tehnic prin determinare kjeldahl
	cc	g	cc	cc	cc	g	%	%
1	10	0,0900	30	26,90	3,10	0,04226	46,95	47
2	10	0,0900	30	26,90	3,10	0,04226	46,95	47
3	12	0,1080	30	26,30	3,70	0,05032	46,59	47
4	14	0,1260	30	25,65	4,35	0,05916	46,95	47
5	16	0,1440	30	24,95	5,05	0,06868	47,00	47
6	18	0,1620	30	24,40	5,60	0,07616	47,00	47
7	20	0,1800	30	23,80	6,20	0,08432	46,84	47
8	15	0,1350	30	25,30	4,70	0,06392	47,00	47
9	17	0,1530	30	24,70	5,30	0,07208	47,00	47
10	19	0,1710	30	24,05	5,95	0,08092	47,00	47

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu P., Teodorescu Gr.* — Rev. de chimie, nr. 1, pg. 41 (1957).
2. *Teodorescu Gr., Dinescu A.* — Bul. Institutului Politehnic București, vol. XXVI, nr. 1, pg. 49 (1964).
3. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Institutului Politehnic, vol. XXIX, nr. 1 pg. 43 (1967).
4. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXIX, nr. 4, pg. 43 (1967).
5. *Teodorescu Gr.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXIX, nr. 5, pg. 83 (1967).
6. *Teodorescu Gr.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXIX, nr. 6, pg. 45 (1967).
7. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXX, nr. 1, pg. 17 (1968).
8. *Teodorescu Gr., Lupu A. M.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXX, nr. 5 pg. 59 (1968).
9. *Teodorescu Gr.* — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXXI, nr. 3, pg. 51 (1969).
10. Teodorescu Gr. — Bul. Inst. Politehnic București, vol. XXXI, nr. 4, pg. 45 (1969)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

ORGANE DE MAŞINI

C. Z. :621.822.5:621.891:621.824:620.178.1

ASUPRA TEORIEI, CALCULULUI ŞI ÎNCERCĂRII LAGĂRELOR PENTRU VÎRFURI *)

TRAIAN DEMIAN

Realizarea unor momente de frecare foarte mici, pentru a asigura o precizie cît mai ridicată a măsurării sau transmiterii semnalului în aparatele de mecanică fină, a determinat apariţia sprijinirilor pe vîrfuri. Sub o anumită limită a valorilor momentului de frecare, lagărele cilindrice de alunecare, nu pot fi utilizate, nu numai pentru că nu realizează filmul şi presiunea hidrodinamică din lubrifiant dar şi pentru că execuţia lor este — la dimensiunile necesare — practic imposibilă. Se înţelege, că nici în lagărul pentru vîrf, unde presiunea pe suprafaţă este foarte mare (contactul este redus la un punct matematic), iar viteza foarte mică, nu se poate forma un film de lubrifiant. Momentul datorat frecării uscate sau semiuscate este însă foarte mic, iar ansamblul vîrf-piatră poate fi utilizat cu succes pentru sarcini şi turaţii mici.

Valorificînd ceea ce a fost mai însemnat de luat în considerare în cercetările efectuate de-a lungul timpului — în *teza de doctorat* elaborată de autor — se prezintă *o teorie şi un calcul unitar* ale lagărelor pentru vîrfuri în particular, ale lagărelor de alunecare cu suprafeţe de contact sferice în general. Totodată, lucrarea duce mai departe încercările experimentale, utilizîndu-se o soluţie modernă, mai eficientă pentru determinarea momentului de frecare din lagărele pentru vîrfuri.

1. Problemele care alcătuiesc obiectul primei părţi — cea a *cercetărilor teoretice* — care merită să fie subliniate în concret din cuprinsul lucrării sînt :

1.1. *Punerea distinctă în evidenţă a componentelor frecării complexe din lagărele verticale, particularităţile de situaţie, influenţa izolată a factorilor şi studiul de ansamblu al momentului de frecare pentru cazul general al suprafeţei excentrice de presiune.*

Antecalculul momentului de frecare se bazează pe ipoteza *pivotării pure, specifică suprafeţelor sferice.* Această situaţie corespunde unei forţe concentrate P acţionînd axial (fig. 1). Suprafaţa herţiană de con-

*) Articolul prezintă principalele concluzii ale lucrării de doctorat a autorului intitulată : „Contribuţii la studiul şi încercarea lagărelor pentru vîrfuri".

tact, se menţine în aceeaşi poziţie în tot timpul mişcării. Distribuţia tensiunilor se face, în secţiune, după o elipsă avînd semiaxa mare egală cu raza a a cercului de presiune. După efectuarea calculelor, momentul de frecare M are valoarea :

$$M = \frac{3}{16}\pi.\mu.P\sqrt{\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{P}{p_{max}}} = \frac{0{,}407\,\mu P^{1{,}5}}{\sqrt{p_{max}}}\,. \qquad (1)$$

Relaţia (1) introduce erori nu numai în legătură cu exactitatea suprafeţei circulare de contact şi constanţa coeficientului de frecare ci şi din punct de vedere al condiţiilor de exploatare.

Există întotdeauna o forţă laterală S, constantă sau variabilă, de care trebuie ţinut seama.

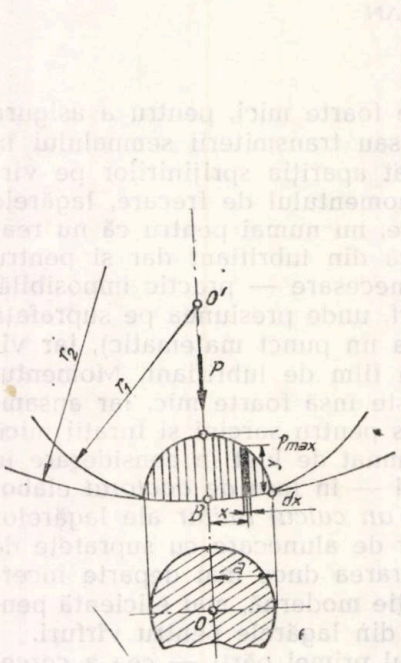


Fig. 1.

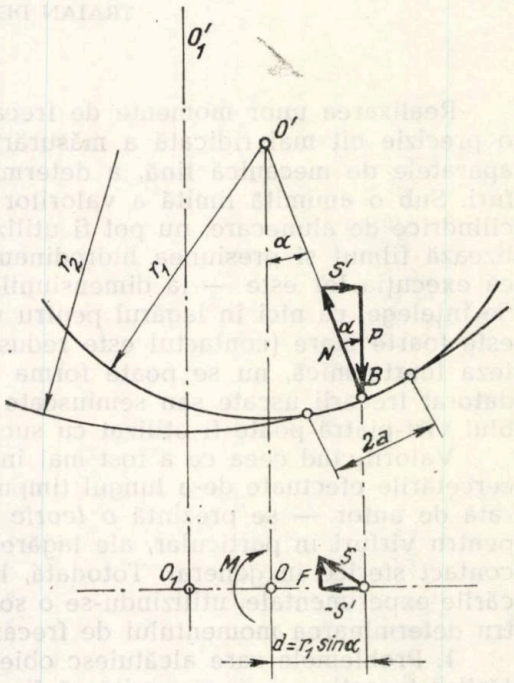


Fig. 2.

Dacă se consideră — într-un prim caz — *forţa laterală S de direcţie constantă* (fig. 2), suprafaţa de contact se deplasează în poziţia cu centrul în B, axa vîrfului $00'$ se poate considera paralelă cu poziţia iniţială. Momentul de frecare este :

$$M = r_1\sqrt{\frac{S^2 - P^2\cdot\mu^2}{1+\frac{1}{\mu^2}}} \qquad (2)$$

sau, pentru o presiune uniform distribuită şi μ constant relaţia (2) devine :

$$M = \mu\, dN\,, \tag{3}$$

unde

$$d = r_1 \sin\alpha\,.$$

Dacă se studiază variaţia momentului de frecare în interiorul suprafeţei de contact (fig. 3), şi pentru domeniul $0 \leqslant d \leqslant a$, momentul de frecare va fi dat de relaţia :

$$M = \frac{4}{3\pi}\,\mu.a.N.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{d^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(4\frac{d^2}{a^2}\cos^2\varphi + 1 - \frac{d^2}{a^2}\right)}\,d\varphi\,, \tag{4}$$

integrală eliptică ce se rezolvă folosind tabelele de funcţiuni.

Punînd ecuaţia (4) sub forma :

$$M = k.a.N.\mu \tag{5}$$

şi reprezentînd-o grafic alături de (3) se observă că (fig. 4), exactitatea rezultatelor date de (3) şi implicit de (2) scade pe măsură ce d/a se micşorează (S scade cu α deci cu d/a).

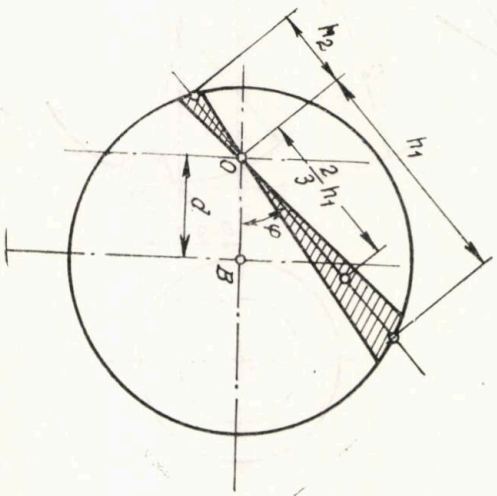


Fig. 3.

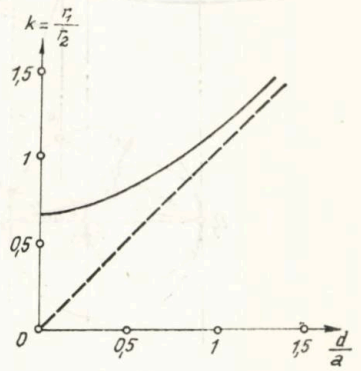


Fig. 4.

Se pot spune următoarele :

— pentru $S=0$ apare frecarea de pivotare ;

— pentru $S>P\mu$ apare frecarea de *alunecare* (a se vedea numărătorul fracţiei de sub radical) ;

— pentru $S<P\mu$ se poate spune că apare o frecare de *pivotare cu rostogolire.*

Ultimul caz se poate considera că se datorește tendinței vîrfului de a se „fixa" în lagăr într-o anumită poziție (fig. 5). Această tendință se manifestă odată cu apariția forței laterale S cînd începe rostogolirea (frecarea de pivotare se micșorează automat), centrul vîrfului se deplasează pe cercul mic de diametru $0_1 0$ iar centrul suprafeței pe cercul mare de diametru $0_1 B$. Momentul rezistent — ca sumă a momentului corespunzător pivotării și a momentului corespunzător rostogolirii — este dependent de α care își schimbă valoarea în timpul mișcării.

Concluzia importantă care se desprinde de aici este că la aparatele de precizie unde se cere un moment de frecare constant în lagăr, nu este recomandabilă folosirea vîrfurilor pentru domeniul $S<\mu P$.

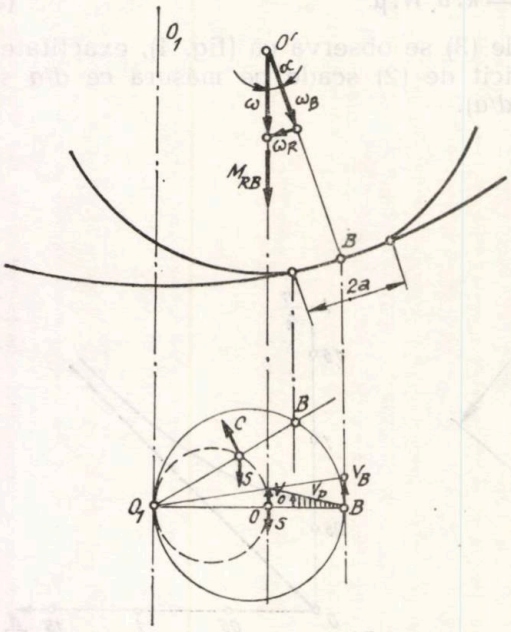


Fig. 5.

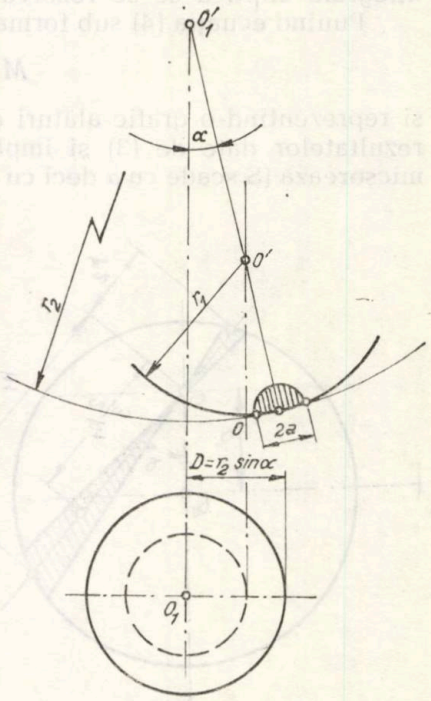


Fig. 6.

Într-un al doilea caz se consideră *forța laterală S de direcție variabilă.* Întrucît S împinge vîrful în exterior, acesta se va roti în jurul axei sistemului $0'_1 0_1$ (fig. 6). Suprafața de contact de pe vîrf rămîne aceeași modificîndu-se numai suprafața de pe calota lagărului (cu viteza vîrfului).

Situația va fi similară celei de la forța laterală constantă cu deosebirea că în locul lui r_1, în expresia *momentului frecării de alunecare* trebuie introdus r_2 :

$$M = r_2 \sqrt{\frac{S^2 - \mu^2 . P^2}{1 - \frac{1}{\mu^2}}} \tag{6}$$

În toate ipotezele de studiu privind lagărele verticale au fost respectate următoarele două condiții : forța laterală este mică în raport cu cea axială (altfel studiul este la fel ca la lagărele orizontale) ; lagărul vertical are un joc axial suficient de mare care să-i asigure un grad de libertate după această direcție.

1.2. *Identificarea tipurilor de frecări care apar în lagărele orizontale, studiul separat al fiecărui fenomen cu influențele sale, legătura dintre momentul de frecare și eroarea de citire și înregistrare la indicatorul aparatului.*

Soluționarea problemei trebuie precedată aici de studiul jocurilor deoarece calculul acestor lagăre este influențat în mare măsură de *poziția punctului de contact* dintre elemente. Pentru a preîntîmpina o suprasolicitare a lagărului este necesar să se evite contactul pe suprafața conică a vîrfului și lagărului.

Antecalculul momentului de frecare corespunde *alunecării pure* care rezultă dintr-o similitudine imaginată între lagărele cilindrice și cele pentru vîrfuri. Pentru arborele încărcat simetric, după efectuarea calculelor se obține :

$$M = \mu . r_1 . P \tag{7}$$

iar pentru arborele încărcat nesimetric conform schemei din fig. 7 rezultă :

$$M = \mu . r_1 (P_1 + P_1') . \tag{8}$$

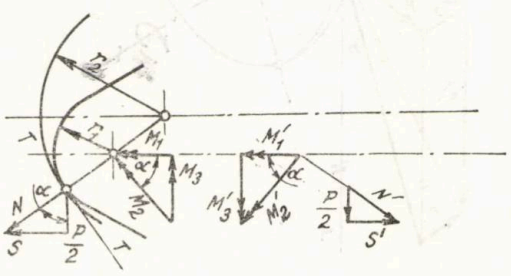


Fig. 7.

În ambele situații, din formule, vîrful apare ca un fus cilindric de raza r_1. Valorile momentului de frecare real nu corespund calculului bazat pe relațiile (7) și (8) deoarece singura mărime cunoscută riguros este încărcarea lagărului. Apar însemnate erori atît la măsurarea razei cît și, mai ales, la aprecierea (cu totul incertă) a coeficientului de frecare.

Într-o situație mai apropiată de realitate s-a considerat vîrful ca o *bilă care se rostogolește* în interiorul calotei lagărului (fig. 8). Frecarea de rostogolire durează de la începutul mișcării pînă la atingerea unghiului maxim β_g, respectiv β'_g cînd — este firesc — se consideră și forța laterală. Momentul de frecare calculat este :

$$M = \frac{P \cdot r_1 \cdot \mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\cos^2 \alpha} + 1}}, \qquad (9)$$

unde s-a notat, $\mu = \operatorname{tg} \beta'_g$.

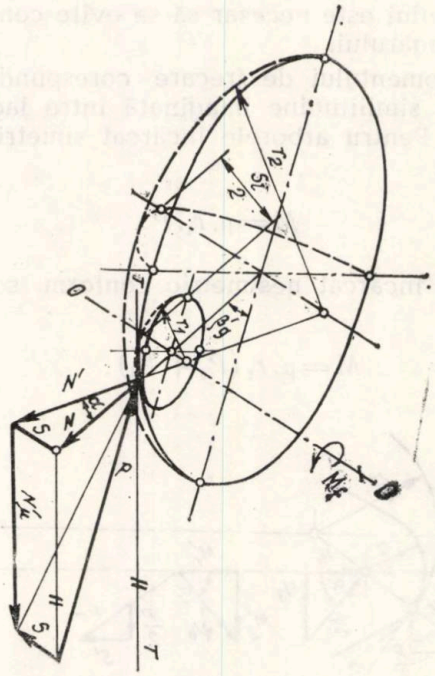


Fig. 8

Variația momentului de frecare de la valoarea corespunzătoare rostogolirii la cea corespunzătoare alunecării are o mare importanță la calculul erorii de indicație a aparatului, cauzată de deplasarea vîrfului. Din fig. 9 se observă că dacă arborele (cu indicatorul) se rotește din φ_0

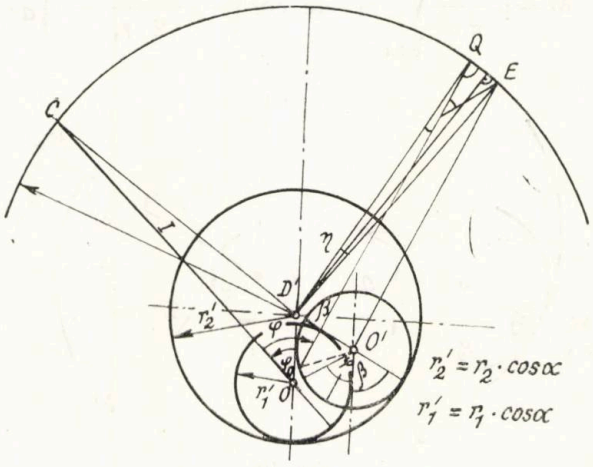


Fig. 9.

în φ, extremitatea indicatorului descrie arcul CE. La readucerea vîrfului în poziția cea mai de jos (păstrînd pe φ) rezultă eroarea care se calculează din relația finală :

$$\eta^3 + 4\frac{r_2' - r_1'}{I}\sin(\varphi + \varphi_0)\eta^2 + 4\left[\frac{r_2' - r_1'}{I^2}\sin^2(\varphi + \varphi_0) - 2\right]\eta + \tag{10}$$

$$+ 8\frac{r_2' - r_1'}{I}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{1 - \frac{r_2}{r_1}} + \varphi_0\right) - \sin(\varphi - \varphi_0)\right] = 0,$$

unde prin I s-a notat lungimea acului indicator.

Eroarea de indicație se micșorează cu scăderea lui k, a încărcării și mărirea sau micșorarea jocului longitudinal S_e.

Eroarea geometrică de indicație E_g (linia de pe cadran) este dată de relația :

$$E_g = \frac{\pi}{180} I.\eta.$$

În lagărul orizontal apare deasemenea *frecarea de pivotare* după ce s-a atins valoarea limită a unghiului de rostogolire. Dacă se consideră vîrful în repaus și calota în mișcare, pentru un joc longitudinal

foarte mic, suprafața circulară de contact se poate aprecia că este perpendiculară pe axa vîrfului 00; geometria ansamblului apare ca în fig. 10, b iar momentul de frecare va fi :

$$M = \mu \frac{2N}{\pi . a^2} \int_{c+a}^{c-a} r_1^2 \cdot \text{arc cos} \left(\frac{r_1^2 + c^2 - a^2}{2 c r_1} \right) dr_1 . \tag{11}$$

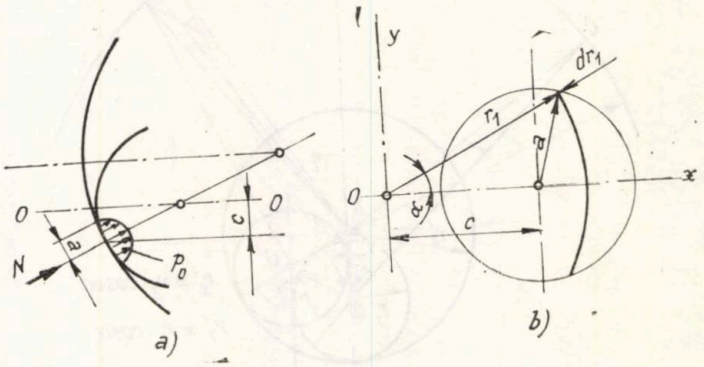


Fig. 10.

Pentru $c = a$ apare frecare de pivotare pură și momentul va fi :

$$M = \frac{32}{9\pi} P.a.$$

Pivotarea trebuie considerată la evaluarea momentului final deoarece momentul dat de ea crește cu scăderea jocului transversal și implicit cu a celui longitudinal.

O delimitare riguroasă între fenomenele de frecare care apar în lagărele orizontale evident că nu se poate face. Cercetările mai recente fac o similitudine între mișcarea vîrfului în lagăr cu mișcarea unor roți de raze diferite rigid legate între ele, pe o suprafață în trepte. Momentul de frecare este :

$$M = \left(r_1 . \sin \alpha . \sin \frac{\varphi}{k} + f \cdot \cos \frac{\varphi}{k} \right) P + 0{,}33\, \mu . P^{1,3} \frac{\cos \alpha}{b^{1,3} . \sin^{1,33} \alpha} \cdot \frac{r_1^{0,33}}{E_1} \cdot \left(\frac{k}{k-1} \right)^{0,33} \left(\frac{m+1}{m} \right)^{0,33}, \tag{12}$$

unde :

$b = 1 + \mu . \text{ctg}\, \alpha$; $m = \frac{E_1}{E_2}$; f — coeficientul frecării de rostogolire.

Se vede că momentul de frecare minim se obține nu pentru un joc longitudinal minim (sin $\alpha=0$) ci pentru o valoare intermediară a jocului longitudinal.

1.3. *Elaborarea unui procedeu de calcul al lagărelor pentru vîrfuri din punct de vedere dinamic care să evite distrugerea rapidă a suprafețelor de lucru, modificările introduse de condițiile dinamice în relațiile ce se utilizează pentru calculul la rezistență (în condiții statice), evaluarea momentului de frecare maxim la solicitarea prin șoc.*

Solicitarea dinamică se poate considera că apare în următoarea succesiune de fenomene :

— apăsarea vîrfului asupra cuzinetului pînă la transformarea energiei cinetice de șoc în deformație elastică (la sfîrșitul acestei etape viteza vîrfului e nulă, apropierea suprafețelor și energia potențială sînt maxime) ;

— revenirea suprafeței sferice la forma inițială (energia potențială se transformă din nou în energie cinetică).

Eforturile maxime de șoc apar la mijlocul primei etape. Pe baza fig. 11 (0_1 și 0_2 sînt pozițiile centrului de curbură a vîrfului la începutul respectiv sfîrșitul primei etape a ciocnirii), folosindu-se cazul cel mai defavorabil al vîrfului orizontal, ecuația bilanțului energetic va fi :

$$dA = N.dz + \mu\, N.dz.\, \mathrm{ctg}\,\delta\,,$$

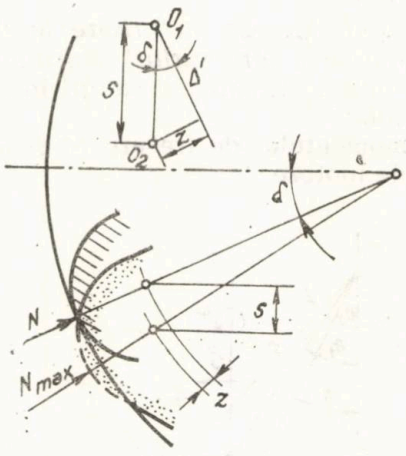


Fig. 11.

unde : z — pătrunderea vîrfului în lagăr (în funcție de z s-a exprimat și drumul vertical s).

Utilizînd teoria lui Hertz și integrînd de la zero la N_{max} rezultă valoarea lucrului mecanic A din relația :

$$A = 0{,}3\,(1 + \mu.\,\mathrm{ctg}\,\delta)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)^{2/3} N_{max}^{5/3}$$

iar pentru tensiunea maximă din condiţii dinamice $\sigma_{max.\,din}$ se obţine:

$$\sigma_{max.\,din} = 0{,}779 \sqrt[5]{\frac{A\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^3}{(1+\mu.\,\mathrm{ctg}\,\delta)\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)^4}}. \tag{13}$$

Termenul $1 + \mu.\ \mathrm{ctg}\ \delta$ care însoţeşte lucrul de frecare, dispare la fusul vertical întrucît aici — se poate considera — că şocul este centric.

În continuare, în lucrare, pe baza unor ipoteze şi calcule laborioase se stabileşte raportul dintre tensiunile dinamice, la sistemele mobile înzestrate cu masă legată elastic respectiv rigid cu vîrful. În final rezultă :

$$\sigma_{max.\,elastic} = \sin^{1/2}\delta.\ \sigma_{max.\,rigid}, \tag{14}$$

în cazul ciocnirilor centrice.

Se efectuează apoi calculele pentru toate variantele ce pot apare în cele două cazuri mai importante de solicitări dinamice :

— funcţionarea prin şoc cînd vîrful este supus la o succesiune de lovituri (vibraţiile dintre două ciocniri consecutive dispar) ;

— funcţionarea la vibraţii cînd nu se realizează o amortizare între două ciocniri consecutive.

1.4. *Prezentarea unor ipoteze cu privire la fenomenele de uzură care pot apare în lagărele pentru vîrfuri, calculul momentului de frecare pentru aceste ipoteze ; concluzii şi soluţii în cazul cel mai defavorabil, al vîrfului vertical.*

Pentru calculul momentului de frecare M şi a volumului uzurii V s-au admis următoarele ipoteze :

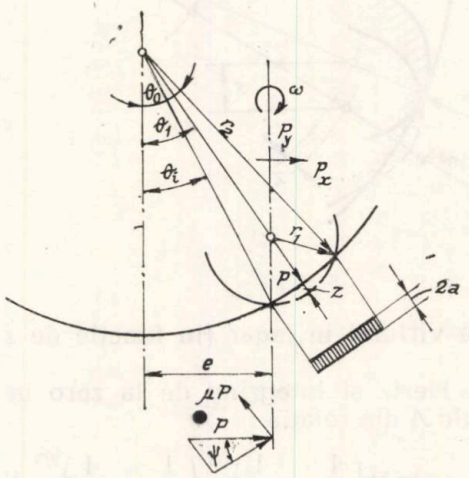


Fig. 12.

— vîrful se deplasează paralel cu poziția inițială ;

— lagărul este încărcat axial și lateral (radial) ;

— contactul are loc pe o suprafață dreptunghiulară de lățime 2a, foarte mică în raport cu lungimea ;

— se utilizează relațiile lui Hertz pentru contactul a două suprafețe sferice.

Cu notațiile din fig. 12, după efectuarea calculelor, momentul de frecare M va fi :

$$M = 2\mu . r_2 . P \frac{\cos . \theta_1 . \sin \Delta\theta}{\ln \frac{k \cdot \sin (\theta_1 + \Delta\theta) - (k-1) \sin \theta_1}{k . \sin (\theta_1 - \Delta\theta) - (k-1) \sin \theta_1}}, \qquad (15)$$

unde :

θ_1 — unghiul dintre axa vîrfului și forța P ;

ψ — unghiul dintre forța laterală și rezultanta forței de frecare cu forța laterală ;

$P = \sqrt{P_y^2 + P_x^2} \cdot \cos \psi$;

$\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$.

Volumul materialului care se uzează este dat de relația aproximativă :

$$V = 2\pi . r_2 \sin \theta \, (r_2^2 \cdot \Delta\theta - r_1^2 \cdot \cos^{-1} \sqrt{1 - k^2 . \sin^2 \Delta\theta}).$$

Dintr-o reprezentare grafică reese influența mare exercitată de k asupra funcționării ansamblului. La o mărire a lui k (la unele construcții este necesară aceasta prin mărirea lui r_2) se menține în lagăr un moment de frecare de valoare scăzută.

*

Studiul teoretic dă o imagine cuprinzătoare asupra fenomenelor de frecare, rezistență și uzură. Alături de interesul practic, legat de îmbunătățirea calității funcționării aparatelor și construcției lagărelor acestora potrivit cu utilizarea lor, problemele noi prezentate în acest studiu, cu soluțiile posibile arată interesul științific pe care îl oferă încă lagărele pentru vîrfuri.

*

2. Problemele care alcătuiesc obiectul celei de a doua părți — cea a *cercetărilor experimentale* — care vor fi subliniate din cuprinsul lucrării, sînt :

2.1. *Realizarea unei metode originale pentru determinarea experimentală a momentului de frecare, după o prealabilă analiză critică a metodelor de măsurare aflate încă astăzi în uz ; metoda poate fi extinsă*

asupra oricărui tip de lagăr pentru vîrf precum și a altor forme de lagăre din mecanică fină.

Ca *principiu,* metoda urmărește stabilirea cît mai exactă a pierderilor prin frecare din lagăr, a mărimii absolute a momentului de frecare, astfel ca să se elimine orice „contact" care ar putea falsifica rezultatele prin introducerea unor eventuale momente, străine de cel care interesează.

Sistemul mobil sprijinit pe lagăre pentru vîrfuri este antrenat pînă la o turație convenabilă, după care este lăsat să-și revină în poziție de repaus. Ca soluție, pentru poziția teoretică de bază, este utilizată ecuația rotației rigidului în jurul unei axe fixe :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m - M_r = M_m - (M + M_a + M_b), \tag{16}$$

unde :

M_m — momentul de acționare ;
M — momentul de frecare din lagăr ;
M_a — momentul de frecare a sistemului mobil cu aerul (se poate determina efectuînd măsurători în vid) ;
M_b — momentul rezistent provocat de curenții remanenți (se determină înlocuind acționarea electrică printr-o acționare mecanică).

Relația (16) permite calculul lui M_r dacă M_m și $I \frac{d\omega}{dt}$ sînt cunoscuți :

$$M_r = M_m - I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m - I \frac{d\omega}{dt} = M_m - I.\varepsilon$$

iar după decuplarea sistemului la atingerea turației dorite,

$$M_r = -I \frac{d\omega}{dt}.$$

Momentul de inerție al masei sistemului mobil I, din cauza formei sale complicate, se determină cu pendulul de torsiune, utilizînd o suspensie monofilară.

Cunoscîndu-se constanta elastică a firului K, plecînd de la ecuația echilibrului dinamic al sistemului mobil :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{K}{I}\varphi = 0$$

și utilizînd un subansamblu cu moment de inerție al masei I_0 cunoscut, măsurînd perioada de oscilație T_0 corespunzătoare, se obține :

$$I = \frac{T^2}{T_0} I_0. \tag{17}$$

Acceleraţia unghiulară ε se stabileşte determinînd în prealabil variaţia vitezei unghiulare.

Procedeele curente cunoscute pentru determinarea funcţiei ω — înregistrarea fotografică şi metoda stroboscopică — dau rezultate la turaţii mari sau atît de mari încît depăşesc domeniul de utilizare al lagărelor pentru vîrfuri.

Metoda concepută permite obţinerea unor rezultate corespunzătoare tocmai în domeniul de turaţie la care se folosesc lagărele pentru vîrfuri.

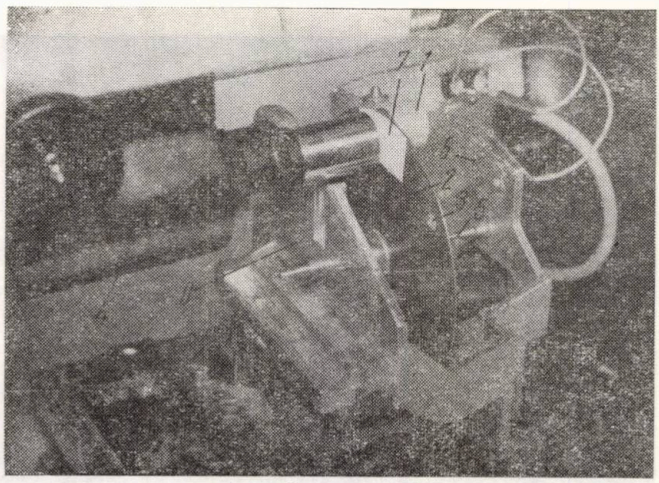


Fig. 13.

După cum se vede din fig. 13 la trecerea orificiului 3 de pe discul 2 prin dreptul traductorului inductiv 1 (fixat pe suportul standului) se modifică inductanţa acestuia. Impulsul electric astfel apărut este transmis la aparatul de înregistrare, prin sistemul de măsură adoptat, al cărui montaj complet este arătat în fig. 14. Puntea tensometrică 3 cu amplificatorul 4 alimentează traductorul. Dezechilibrarea punţii apărută la trecerea orificiului prin dreptul traductorului este transmisă ca semnal la aparatul de înregistrare 5.

Măsurîndu-se deplasarea $\Delta S'$ dintre un număr p de intervale de impulsuri (viteza constantă v de avans a benzii se cunoaşte) se poate scrie :

$$\Delta S = p.\Delta S$$

şi prin urmare :

$$\omega = \frac{2\pi.p}{m} \cdot \frac{v}{\Delta S'}, \quad n = \frac{60\,p}{m} \cdot \frac{v}{\Delta S'}, \tag{18}$$

unde :

m — numărul orificiilor de pe periferia discului ;
ΔS — distanţa dintre două bucle consecutive.

2.2. *Construcţia unui stand de încercare original care asigură o înaltă precizie pentru reglarea şi determinarea jocurilor, precum şi pentru transmiterea semnalului la aparatul înregistrator.*

Sistemul mobil, alcătuit din arbore, bucşele în care sînt fixate prin sertizare vîrfurile şi discul, se sprijină pe două lagăre cu cuzineţi din piatră.

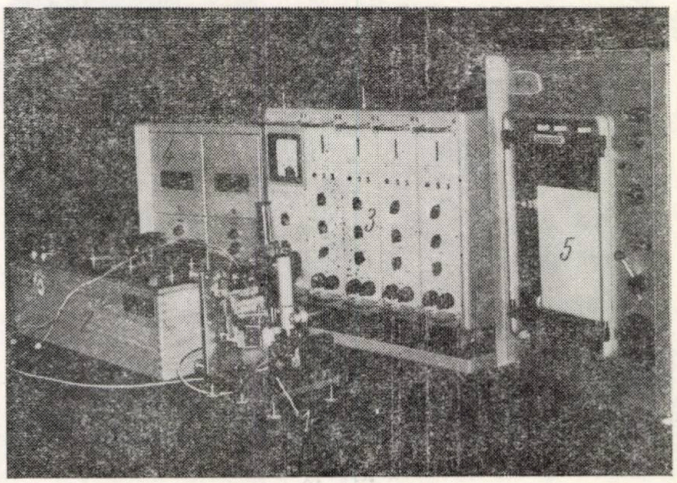


Fig. 14.

Antrenarea sistemului mobil este similară celei de la un contor electric de inducţie pentru curentul alternativ. Calitatea unei astfel de antrenări este că nu are nici o înfăşurare pe sistemul mobil deci se evită utilizarea colectorului, a periilor, formarea de scîntei în colector.

Prin forma adoptată pentru suport, folosind şuruburi de reglaj şi un dispozitiv cu bulă de aer, standul permite atît studiul lagărelor orizontale cît şi a celor verticale.

Variaţia încărcării lagărelor s-a realizat utilizînd discuri de forme şi materiale diferite.

Reglarea şi determinarea jocurilor se face în poziţie orizontală printr-o aducere prealabilă la „zero" a sistemului mobil, înlăturînd orice joc, cu ajutorul unuia din cele două lagăre care este reglabil. Folosind microscopul cu ocular gradat cu care a fost prevăzut standul se măsoară „căderea" e a sistemului mobil, după care din geometria figurii 15 se poate scrie relaţia :

$$e = \sqrt{s_l \left[2 \left(r_2 - r_1\right) - s_l\right]}$$

din care se determină jocul longitudinal $S_l = 2s_l$ atît pentru poziția orizontală cît și pentru cea verticală.

Întrucît „căderea" e este sensibil mai mare ca s_l, metoda este avantajoasă deoarece permite o înaltă precizie de determinare a jocului longitudinal, la o rigurozitate de microscop.

Ca aprecieri rezumative *asupra metodei și standului de încercare* se pot spune următoarele :

— nu se introduc în sistemul de măsură momente suplimentare ;
— precizie mai ridicată a măsurătorilor ;
— măsurătorile se pot executa în orice fază a mișcării ;

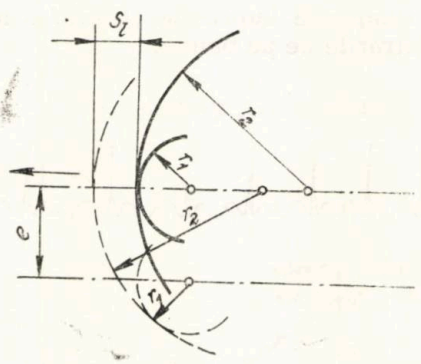


Fig. 15.

— metoda poate fi aplicată și altor tipuri de lagăre din mecanica fină.

Este însă necesară o atenție sporită pentru evitarea impreciziunilor de montaj și centrare care pot provoca importante solicitări dinamice în lagăre ; variația încărcării lagărelor nu se poate realiza prin greutăți adiționale din cauza pericolului de dezechilibrare, ci prin mai multe colecții disc-arbore. Întrucît o distribuție riguros egală a jocurilor pe cele două lagăre ale sprijinirii orizontale nu este posibilă, măsurătorile trebuie efectuate în două direcții decalate cu 180°.

2.3. *Stabilirea prin rezultatele practice obținute, a unor căi pentru îmbunătățirea funcționării lagărelor pentru vîrfuri în general, a celor încercate și utilizate în producția indigenă de aparate în special.*

Cercetările au fost efectuate cu vîrfurile și lagărele utilizate de Uzinele „Electromagnetica" în producția de contoare electrice monofazate pentru energie activă (de tip CAM 6). Vîrfurile confecționate din oțel de rulment cu o duritate mineralogică identică cu a cuarțului iar cuzinetii din safir sintetic cu o duritate identică cu a corindonului și foarte apropiată de cea a safirului natural.

În tot timpul măsurătorilor s-au păstrat neschimbați parametrii geometrici ai vîrfului și lagărului pentru a menține aceste elemente constructive așa cum se folosesc ele în producția indigenă. La sprijinirea

verticală s-a înlocuit doar lagărul cilindric superior printr-un lagăr pentru vîrf (efectul practic imediat a fost desigur reducerea sensibilă a momentului de frecare total). Măsurătorile s-au efectuat la aceeaşi temperatură (a mediului ambiant).

Au fost modificaţi succesiv şi concomitent următorii factori: greutatea sistemului mobil; jocul longitudinal (într-o gamă mare de valori dar cu contact pe suprafaţa sferică); poziţia arborelui (verticală, orizontală); acţionarea electrică sau mecanică; funcţionarea în aer sau în vid; viteza unghiulară a sistemului mobil.

Au fost făcute înregistrări pentru peste 70 de situaţii diferite din care au fost efectuate 22 de diagrame de sinteză. În fig. 16 este prezentată una din aceste diagrame împreună cu cîte o mică porţiune a unui singur caz din înregistrările de pe bandă.

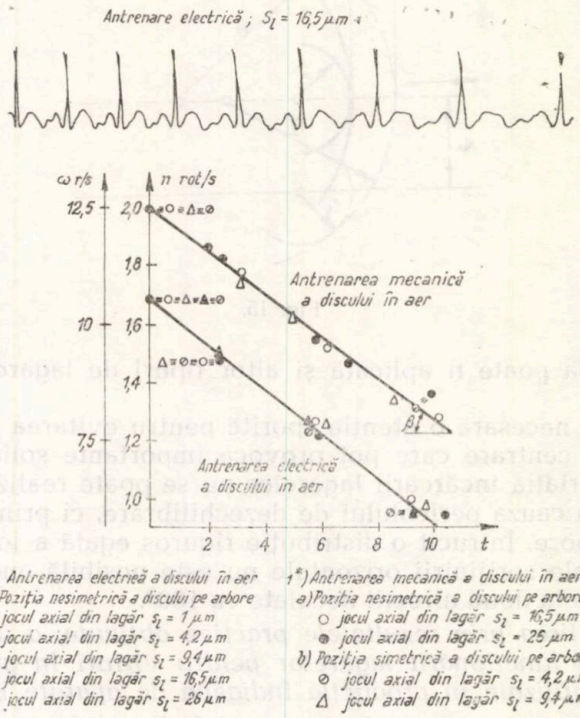


Fig. 16.

Din experienţele şi diagramele pentru lagărele orizontale rezultă:

— între limite strînse ale încărcării, momentul de frecare nu este influenţat de greutatea sistemului mobil;

— momentul de frecare scade cu reducerea momentului de inerţie al masei sistemului mobil;

— momentul de frecare crește cu mărirea accelerației unghiulare ;

— frecarea cu aerul și influența curenților remanenți (la sistemul de acționare adoptat), pot fi neglijate ;

Momentul și coeficientul de frecare determinați experimental, deși diferă încă substanțial față de valorile obținute prin calcul sînt de 20—30 ori mai apropiate de acestea decît la metodele utilizate pînă în prezent.

Din experiențele și diagramele pentru lagărele verticale (în fig. 17 este prezentată una din diagramele de sinteză cu o mică porțiune dintr-un caz de pe bandă), rezultă :

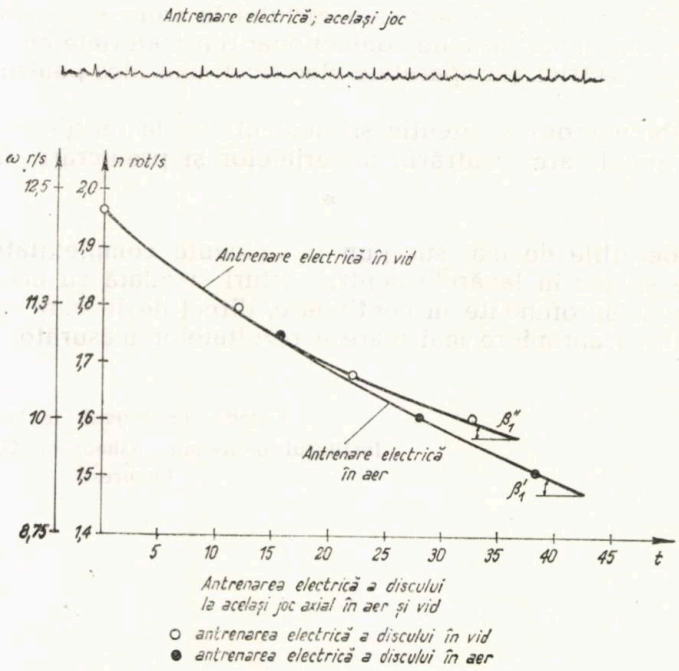


Fig. 17.

— momentele de frecare, la aceiași parametrii și în aceleași condiții, sînt mult mai mici decît la lagărele orizontale ;

— jocul longitudinal are un rol important la lagărele verticale ; momentul de frecare se reduce cu micșorarea lui (reducerea nu trebuie făcută sub limita unui ajustaj cu strîngere care ar produce uzura rapidă și eventual deformarea arborelui) ;

— frecarea se micșorează cu reducerea momentului de inerție al masei sistemului mobil și unghiului de înclinare a diagramei de sinteză, deci a accelerației unghiulare ;

— momentele rezistente datorate aerului și curenților remanenți (dependente de turație), din cauza frecării mai mici din aceste lagăre, trebuie să intre în calculul momentului rezistent total.

Și aici, prin rezultatele experimentale obținute cu metoda realizată, decalajul față de valorile calculate s-a micșorat cu aproape 50% față de metodele anterioare.

Cu privire la utilizarea lagărelor pentru vîrfuri în general, din experimentări a rezultat :

— recomandarea de a utiliza lagărele pentru vîrfuri verticale în toate cazurile ; numai dacă este impusă de construcție, să se utilizeze sprijinirea orizontală ;

— necesitatea unor jocuri mici la sistemul vertical ; jocuri care să asigure contactul în zona sferică a vîrfului la ambele sisteme ;

— sistemul mobil trebuie confecționat din materiale cu o bună conductibilitate electrică (la aparatele electrice), mai ales pentru sprijinirea verticală ;

— trebuie acordată atenție și momentului de inerție al masei, accelerației unghiulare, centrării, materialelor și prelucrării suprafețelor.

*

Considerațiile de mai sus pun în evidență complexitatea fenomenelor care au loc în lagărele pentru vîrfuri și odată cu aceasta aspectele ce pot fi aprofundate în continuare, direcțiile în care se poate acționa pentru o apropiere mai mare a rezultatelor măsurătorilor de realitate.

Catedra de organe de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

REZISTENȚA MATERIALELOR

C. Z. : 624.044:624.07:539.3/.4

CONTRIBUTIONS À LA DÉTERMINATION DES DÉFORMATIONS ET DES EFFORTS PAR LA MÉTHODE DES PARAMÈTRES INITIAUX À LA BARRE DROITE À SECTION CONSTANTE ET À SECTION VARIABLE EN DEGRÈS *

DUMITRU VOICULESCU

Si on considére un élément de construction dans lequel les déformations et les efforts sont fonctions d'une seule variable independante * (poutres droites, plaques planes circulaires, chargées symétriquement axialement, disques circulaires en mouvement de rotation etc.), les expressions de la flèche v. de la rotation ψ, du moment de flexion M et de l'effort tranchant I, s'écriront en forme générale ainsi :

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 F_{00}(x) + \varphi_0 F_{01}(x) + M_0 F_{02}(x) + T_0 F_{03}(x) \\ \varphi(x) &= v_0 F_{10}(x) + \varphi_0 F_{11}(x) + M_0 F_{12}(x) + T_0 F_{13}(x) \\ M(x) &= v_0 F_{20}(x) + \varphi_0 F_{21}(x) + M_0 F_{22}(x) + T_0 F_{23}(x) \\ T(x) &= v_0 F_{30}(x) + \varphi_0 F_{31}(x) + M_0 F_{32}(x) + T_0 F_{33}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

où par v_0, φ_0, M_0 et T_0 on a noté les valeurs initiales (pour $x=0$) des déformations et des efforts sectionnels. On a considéré plus haut, pour fixer les idées, le cas de deux déformations (v et φ) et de deux efforts sectionnels (M et T) qui se rencontre par exemple à la poutre droite. Dans le caz où ce nombre de déformations et d'efforts est plus grand (par exemple le cas des barres courbes planes et en espace), les résultats qui seront établis plus bas peuvent être développés aisement.

Dans la pluspart des problèmes mis en pratique, les conditions à la limite sont bilocales ou plurilocales, c'est-à-dire, par exemple on connaît seulement une partie des paramètres v_0, φ_0, M_0, T_0 et on connaît encore, toujours partielles, les valeurs des paramètres, v, φ, M, T pour une autre valeur du paramètres x (par exemple $x=l$). Selon qu'il est connu, dans ce cas, le problème est résolu en introduisant dans (1) les valeurs des inconnues du point $x=0$ et en écrivant après, pour la détermination de ces inconnues, les conditions pour $x=l$. On résout le sys-

*)Ouvrage reçu à la rédaction le 12 fevrier.

tème d'équations ainsi formé et on introduit les inconnues déterminées dans les expressions (1).

Par exemple si la poutre est simplement appuyée dans la section $x=0$, et encastrée dans la section $x=$, nous avons $v_0=0, M_0=0, v_l=0$ şi $\varphi_l=0$.

Les deux dernières relations servent à la détermination des inconnues φ_0 et T_0 de la section $x=0$. Pour l'écriture de ces deux équations il faudra tenir compte des charges de la poutre et des éventuelles discontinuités de déformations. Si nous supposons dans l'exemple ci dessus que dans une section quelconque $x=x_i$ existent des discontinuités Δv_i, $\Delta\varphi_i$, ΔM_i, ΔT_i respectivement de flèche, de rotation, du moment de flexion et d'effont tranchant *), alors les dernières relations $v_e=0$ et $\varphi_e=0$ s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned}\varphi_0 F_{01}(l)+T_0 F_{03}(l)+\Sigma[\Delta v_i F_{00}(l-x_i)+\Delta\varphi_i F_{01}(l-x_i)+\\ +\Delta M_i F_{02}(l-x_i)+\Delta T_i F_{03}(l-x_i)]=0\\ \varphi_0 F_{11}(l)+T_0 F_{13}(l)+\Sigma[\Delta v_i F_{10}(l-x_i)+\Delta\varphi_i F_{11}(l-x_i)+\\ +\Delta M_i F_{12}(l-x_i)+\Delta T_i F_{13}(l-x_i)]=0\end{aligned} \tag{2}$$

L'utilisation des paramètres initiaux conduit à des calculs qui sont assez laborieux, quoiqu'ils ne soient pas difficilles. On y ajoute la circonstance que les fonctions $F_{ji}(x)$ sont souvent établies pour le cas où la section transversale de l'élément de construction est constante, et le calcul doit être effectué pour des éléments de constructions de section variable en degrés ou qui peut-être considérée approximativement comme étant variable en degrés.

En ce qui suit nous nous proposons de systématiser ce calcul et de présenter une méthode générale qui permette l'écriture directe des expressions des déformations et des efforts dans une section quelconque de l'élément de construction considéré, sans qu'il soit nécessaire de développer des calculs élémentaires.

Dans ce but nous allons utiliser le calcul matriciel.

On sait que les expressions (1) peuvent être écrites sous forme matricielle, ainsi :

$$\begin{Vmatrix} v(x)\\ \varphi(x)\\ M(x)\\ T(x)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} F_{00}(x) & F_{01}(x) & F_{02}(x) & F_{03}(x)\\ F_{10}(x) & F_{11}(x) & F_{12}(x) & F_{13}(x)\\ F_{20}(x) & F_{21}(x) & F_{22}(x) & F_{23}(x)\\ F_{30}(x) & F_{31}(x) & F_{32}(x) & F_{33}(x)\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix} v_0\\ \varphi_0\\ M_0\\ T_0\end{Vmatrix} \tag{3}$$

Dans la relation (3) on met en évidence *la matrice colonne déformations — efforts* dans une section quelconque et dans la séction $x=0$ et *la matrice carrée des fonctions Krîlov* d'argument x.

*) La discontinuité de flèche correspond à une dénivellation, celle de rotation correspond à une articulation, celle du moment de flexion à un couple extérieur et celle de l'effort tranchant à une charge concentrée.

Les équations (3) peuvent être écrites d'une manière plus concentrée de la façon suivante :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \times \| V(0) \| \tag{4}$$

où on a noté avec $\| V(x) \|$ la matrice colonne déformations-efforts de la section x et avec $\| F(x) \|$ la matrice carrée des fonctions Krîlov.

Dans le cas où dans la section $x = x_i$ interviennent les discontinuités Δv_i, $\Delta \varphi_i$, ΔM_i, ΔT_i, considérant *la matrice colonne des discontinuités* $\| \Delta V_i \|$ qui peut être formée avec ces grandeurs et pour $x > x_i$ l'expression de la matrice déformations-efforts sera :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \times \| V(0) \| + \| F(x - x_i) \| \times \| \Delta V_i \| \tag{5}$$

Dans le cas où dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant l$ interviendront à gauche de la section considérée plusieurs discontinuités pareille, l'expression (5) peut être généralisé ainsi :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \times \| V(0) \| + \Sigma \| F(x - x_i) \| \times \| \Delta V_i \| \tag{6}$$

En écrivant les conditions à la limite pour $x = l$, nous obtenons :

$$\| F(l) \| \times \| V(0) \| + \Sigma \| F(l - x_i) \| \times \| \Delta V_i \| = \| V(l) \| \tag{7}$$

où par $\| V(l) \|$ nous avons noté la matrice déformations-efforts de la section $x = l$. Pour les cas courants d'appui (extrémité libre, simple appui encastrement), deux des grandeurs v, φ, M, T, sont nulles. Il résulte donc que de ces quatre équations linéaires du (7), deux, à savoir celles qui correspondent aux éléments nuls de la matrice $\| V(l) \|$ contiennent seulement deux inconnues-celles de la section $x = 0$, tandis que les autres contiennent en général 4 inconues : celles de la section $x = 0$ et celles de la section $x = l$.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une poutre simplement appuyée dans la section $x = 0$ et encastrée dans la section x I. En écrivant d'une façon développée l'équation (7), nous avons :

$$\begin{Vmatrix} F_{00}(l) & F_{01}(l) & F_{02}(l) & F_{03}(l) \\ F_{10}(l) & F_{11}(l) & F_{12}(l) & F_{13}(l) \\ F_{20}(l) & F_{21}(l) & F_{22}(l) & F_{23}(l) \\ F_{30}(l) & F_{31}(l) & F_{32}(l) & F_{33}(l) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ T_0 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \Sigma \begin{Vmatrix} F_{00}(l - x_i) & F_{01}(l - x_i) & F_{02}(l - x_i) & F_{03}(l - x_i) \\ F_{10}(l - x_i) & F_{11}(l - x_i) & F_{12}(l - x_i) & F_{13}(l - x_i) \\ F_{20}(l - x_i) & F_{21}(l - x_i) & F_{22}(l - x_i) & F_{23}(l - x_i) \\ F_{30}(l - x_i) & F_{31}(l - x_i) & F_{32}(l - x_i) & F_{33}(l - x_i) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \\ \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_l \\ T_l \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Pour la détermination des inconnues φ_0 et T_0 il suffit de retenir de l'équation (8) seulement les deux premières équations, parce-que pour $x = l$, les deux premières grandeurs, v et φ sont nulles. Considérant seu-

lement ces lignes et ces colonnes des matrices respectives l'équation (8) peut être écrite, ainsi :

$$\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\| + \Sigma \left\|\begin{matrix} F_{00}(l-x_i) & F_{01}(l-x_i) & F_{02}(l-x_i) & F_{03}(l-x_i) \\ F_{10}(l-x_i) & F_{11}(l-x_i) & F_{12}(l-x_i) & F_{13}(l-x_i) \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \\ \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \tag{9}$$

Pour les cas courants rencontrés en practique, lorsque sur la poutre n'interviennent pas de discontinuités de flèche et de rotation, l'équation (9) se simplifie davantage et nous obtenons :

$$\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\| + \Sigma \left\|\begin{matrix} F_{02}(l-x_i) & F_{03}(l-x_i) \\ F_{12}(l-x_i) & F_{13}(l-x_i) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

La solution du système (9) sera :

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\| = -\left(\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \end{matrix}\right\|\right)^{-1} \times$$

$$\times \Sigma \left\|\begin{matrix} F_{00}(l-x_i) & F_{01}(l-x_i) & F_{02}(l-x_i) & F_{03}(l-x_i) \\ F_{10}(l-x_i) & F_{11}(l-x_i) & F_{12}(l-x_i) & F_{13}(l-x_i) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \\ \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{matrix}\right\| \tag{11}$$

où par :

$$(\| F(l) \|)^{-1} = \left(\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \end{matrix}\right\|\right)^{-1}$$

nous avons noté la matrice inverse à la matrice du système (9). En introduisant la solution (11) dans (6) que nous écrivons d'une façon developpée, on trouve :

$$\left\|\begin{matrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{matrix}\right\| = -\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \\ F_{21}(l) & F_{23}(l) \\ F_{31}(l) & F_{33}(l) \end{matrix}\right\| \left(\left\|\begin{matrix} F_{01}(l) & F_{03}(l) \\ F_{11}(l) & F_{13}(l) \end{matrix}\right\|\right)^{-1} \times$$

$$\times \Sigma \left\|\begin{matrix} F_{00}(l-x_i) & F_{01}(l-x_i) & F_{02}(l-x_i) & F_{03}(l-x_i) \\ F_{10}(l-x_i) & F_{11}(l-x_i) & F_{12}(l-x_i) & F_{13}(l-x_i) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \\ \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{matrix}\right\| +$$

$$+ \Sigma \left\|\begin{matrix} F_{00}(x-x_i) & F_{01}(x-x_i) & F_{02}(x-x_i) & F_{03}(x-x_i) \\ F_{10}(x-x_i) & F_{11}(x-x_i) & F_{12}(x-x_i) & F_{13}(x-x_i) \\ F_{20}(x-x_i) & F_{21}(x-x_i) & F_{22}(x-x_i) & F_{23}(x-x_i) \\ F_{30}(x-x_i) & F_{31}(x-x_i) & F_{32}(x-x_i) & F_{33}(x-x_i) \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \Delta v_i \\ \Delta \varphi_i \\ \Delta M_i \\ \Delta T_i \end{matrix}\right\| \tag{12}$$

Nous allons écrire concentré cette rélation de la sorte :

$$\| V(x) \| = \| F(x) \| \times (\| F(l) \|)^{-1} \Sigma \| F(l - x_i) \| \times \| \Delta V_i \| + \\ + \Sigma \| F(x - x_i) \| \times \| \Delta V_i \| \qquad (13)$$

Nous observerons que dans l'expression (12) la première matrice rectangulaire s'obtient de la matrice des fonctions Krîlov, retenant les colonnes 2 et 4, c'est-à-dire ces colonnes qui correspondent aux grandeurs φ_0 et T_0 différentes de zéro de l'appui de gauche.

La deuxième matrice, une matrice carrée avec deux lignes et deux colonnes est l'inverse à la matrice qui s'obtient gardant de la matrice précédante seulement les lignes 1 et 2, c'est-à-dire celles qui correspondent aux grandeurs nulles à l'appui de droite. L'argument des fonctions de cette deuxième matrice est l. Dans la troisième matrice, aussi rectangulaire, on garde les lignes 1 et 2 (de même que dans la matrice précédente). La dernière matrice à 4 lignes et 4 colonnes, dans laquelle l'argument des fonctions est $(x—x_i)$ garde toutes les lignes et toutes les colonnes, parce qu'on a considéré le cas très général où dans les sections $x = x_i$ nous aurions toutes les sortes de discontinuités.

L'expression (12) se simplifie beaucoup pour les caz usuels des application, lorsque dans les sections $x = x_i$ existe une seule discontinuité (par exemple une charge concentrée, ou seulement un moment concentré etc.) et donc le vecteur des discontinuités $\| \Delta V_i \|$ a une seule ligne différente de zéro. Pour le cas général d'appui de la poutre aux extrémités, on donne dans la tableau ci-dessous la règle d'extraction des lignes et des colonnes pour la formation des matrices de l'expression (12).

		Extrémité $x = 0$			
		Libre	libre appuisimple	encastrament	appui simple encastrament
Extrémité $x = l$	appui simple encastrament	F_{00}	F_{01}	F_{02}	F_{03}
	encastrament	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
	libre appui simple	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}
	libre	F_{30}	F_{31}	F_{32}	F_{33}

(14)

L'expression (12) du vecteur déformations-efforts de la section x peut s'écrire facilement en observant l'analogie de cette expression avec celle du moment de flexion de la section x d'une poutre simplement appuyée aux extremités et actionnée des charges P_i dans les sections $x = x_i$ à droite de la séction x, et les charges P_j dans les sections $x = x_j$ à gauche de la section x (fig. 1).

L'expression du moment de flexion M est

$$M_x = xl^{-1} \Sigma P_i(l - x_i) - \Sigma P_j(x - x_j) \qquad (15)$$

Comparant les relations (13) et (15) on constate le parallélisme suivant :

$M_x \leftrightarrow \| V(x) \|$ le vecteur def.-efforts de la section x

$P_i, P_j \leftrightarrow \| \Delta V_i \|$ le vecteur des discontinuités des sections $x = x_i$ et $x = x_j$

$x \leftrightarrow \| F_{ji}(x) \|$ la matrice des fonctions F_{ji} d'argument x

$l^{-1} \leftrightarrow (\| F(l) \|)^{-1}$ la matrice inverse du système dans leguel l'argument des fonctions F_{ji} est l.

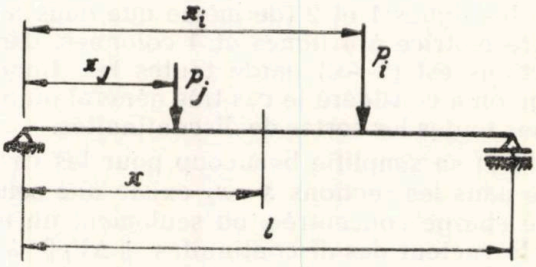


Fig. 1.

Cette observation ainsi que le tableau (14) permettent facilement d'écrire l'expression (12) pour le cas général d'appui de la poutre aux extrémités. On sait que dans le cas où la poutre présente des variations en degrés de la séction et les fonctions $F_{ji}(x)$ sont déterminées pour le cas de la séction constante, celles-ci n'influencent pas la formule (12). La variation de section en degrés intervient seulement dans le mod de calcul des matrices fonctions Krîlov, qui seront calculées comme le produit des matrices correspondantes aux diverses portions, dans laquelle la section est constante.

Application 1. Considérons la barre droite de la fig. (2) simplement appuyée à l'une des extrémités et encastré à l'autre extrémité avec une

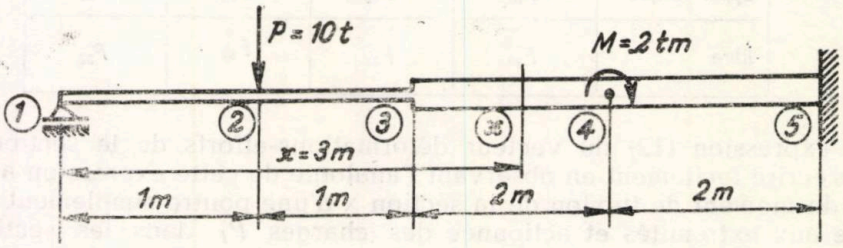


Fig. 2.

variation de section dans le point d'abscisse x=2 m tout en connaissant que $I_{II} = 2\, I_I$

Calculons par exemple le vecteur déformations-efforts dans la section x=3 m. On sait que le vecteur déformations-efforts pour le cas des barres droites à section constante, actionnées par charges transversales a l'expressions suivante :

$$\begin{Vmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2EI} & -\frac{x^3}{6EI} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{EI} & -\frac{x^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

Le vecteur déformations-efforts écrit dans la section x=3 m (la relation 13), a l'expression suivante :

$$\| V(x) \| = -\| F(x) \| \cdot (\| F(l) \|)^{-1} \{ \| F(l - x_3) \| \cdot \| \Delta V_2 \| + \| F(l - x_4) \| \cdot \cdot \| \Delta V_4 \| \} + \| F(x - x_2) \| \cdot \| \Delta V_2 \| \tag{17}$$

où par exemple, par $\| F(x) \|$ s'entend la matrice des fonctions Krîlov (rel. 16) dans laquelle on remplace x avec la longueur de l'intervalle se trouvant entre les sections 1 et x (c'est-à-dire 3 m). Dans le cas de cette matrice, l'intervalle comprend une variation de section dans le point x=2 m et la matrice $\| F(x) \|$ sera calculée par le produit des matrices qui correspondent aux deux portions d'intervalle dans lequel la section est constante, c'est-à-dire : $\| F(x) \| = \| F^{3,x} \| \times \| F^{1,3} \|$.

Si on fait la notation $\frac{I_I}{I_{II}} = \alpha$, le calcul des matrices de la relation (17) est le suivant :

$$\| F(x) \| = \| F^{3,x} \| \cdot \| F^{1,3} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2EI_2} & \frac{-1}{6EI_2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_2} & \frac{-1}{2EI_2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{-4}{2EI_1} & \frac{-8}{6EI_1} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{EI_1} & \frac{-4}{2EI_1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 3 & \frac{-1}{EI_1}\left(4 + \frac{\alpha}{2}\right) & \frac{-1}{3EI_1}\left(10 + 7\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_1}(2 + \alpha) & \frac{-1}{EI_1}\left(2 + 5\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\| F(l) \| = \| F^{3,5} \| \cdot \| F^{1,3} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 6 & \frac{-2}{EI_1}(5+4\alpha) & \frac{-14}{3EI_1}(2+5\alpha) \\ 0 & 1 & \frac{-2}{EI_1}(1+2\alpha) & \frac{-2}{EI_1}(1+8\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$(\| F(l) \|)^{-1} = \frac{1}{\frac{-2}{3EI_1}(4+109\alpha)} \begin{Vmatrix} \frac{-2}{EI_1}(1+8\alpha) & \frac{14}{3EI_1}(2+5\alpha) \\ -1 & 6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{3(1+8\alpha)}{4+109\alpha} & \frac{-7(2+5\alpha)}{4+109\alpha} \\ \frac{3EI_1}{2(4+109\alpha)} & \frac{-9EI_1}{4+109\alpha} \end{Vmatrix}$$

$$\| F(l-x_2) \| = \| F^{3,5} \| \times \| F^{2,3} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 5 & \frac{-1}{EI_1}\left(\frac{9}{2}+8\alpha\right) & \frac{-1}{3EI_1}\left(\frac{13}{2}+56\alpha\right) \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_1}(1+4\alpha) & \frac{-1}{EI_1}\left(\frac{9}{2}+8\alpha\right) \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\| F(x-x_2) \| = \| F^{3,x} \| \times \| F^{2,3} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2EI_1}(3+\alpha) & \frac{-2}{3EI_1}(1+\alpha) \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_1}(1+\alpha) & \frac{-1}{2EI_1}(1+3\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

En écrivant d'une façon dévelopée la relation (17) et en appliquant en même temps la règle d'extraction des lignes et des colonnes pour la

formation des matrices (tab. 14) en remplaçant $\alpha=\frac{1}{2}$ résulte le calcul suivant du vecteur déformations-efforts de la section x=3 m. :

$$\begin{Vmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} 3 & \frac{-1}{3EI_1}\left(10+7\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \frac{-1}{EI_1}\left(2+\frac{5\alpha}{2}\right) \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{3(1+8\alpha)}{4+109\alpha} & \frac{-7(2+5\alpha)}{4+109\alpha} \\ \frac{3EI_1}{2(4+109\alpha)} & \frac{-9EI_1}{4+109\alpha} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 5 & \frac{-1}{EI_1}\left(\frac{9}{2}+8\alpha\right) & \frac{-1}{3EI_1}\left(\frac{13}{2}+56\alpha\right) \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_1}(1+4\alpha) & \frac{-1}{EI_1}\left(\frac{9}{2}+8\alpha\right) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Vmatrix} \times \right.$$

$$\left. + \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{-2}{EI_2} & \frac{-4}{3EI_2} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{EI_2} & \frac{-2}{EI_2} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} \right\} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2EI_1}(3+\alpha) & \frac{-2}{3EI_1}(1+\alpha) \\ 0 & 1 & \frac{-1}{EI_1}(1+\alpha) & \frac{-1}{2EI_1}(1+3\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1,9}{EI_1} \\ \frac{-29,3}{EI_1} \\ 51,1 \\ 20,3 \end{Vmatrix}$$

Application 2. Considérons en ce qui suit le cas des disques circulaires homogènes, qui tournent en rond avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe de symétrie perpendiculaire sur le plan du disque. Les forces d'inertie qui prennent naissance peuvent avoir de grandes valeurs en fonction des valeurs du ω.

Considérons d'abord le cas des disques d'épaisseur constante et nous nous proposons de déterminer les expressions de déplacement u de la direction du rayon et l'effort unitaire radial σ_r.

On montre que l'équation différentialle des disques circulaires est :

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=-(1-\mu^2)\frac{\gamma\omega^2}{gE}r \tag{18}$$

où par γ on a noté le poids spécifique du matériel, tandis que le terme du côté droit de l'équation représente le chargement du disque. Effectuant le changement de variable $r=r_0\,e^x$ on obtient l'équation différentielle de l'ordre 2 aux coefficients constants.

$$u''-u=-(1-\mu^2)\frac{\gamma\omega^2}{gE}\,r_0^3\,e^{3x}=Ae^{3x} \tag{19}$$

où on a noté $A=(1-\mu^2)\,\dfrac{\gamma\omega^2}{gE}\,r_0^3$

En ce qui suit, pour le calcul des fonctions Krîlov, nous allons utiliser le calcul opérationnel.

L'équation différentielle homogène des disque est :

$$u''-u=0 \tag{20}$$

L'opérateur $\dfrac{1}{P(s)}$ et la fonction-image de cet opérateur sont :

$$\frac{1}{P(s)}=\frac{1}{s^2-1}\qquad \varphi(x)=\operatorname{sh}x\cdot H(x) \tag{21}$$

Les fonctions auxiliaires de Krîlov seront :

$$\begin{aligned} F_{01}(x)&=a_0\,\varphi(x)=\operatorname{sh}x & F_{11}(x)&=F'_{01}(x)=\operatorname{ch}x\\ F_{00}(x)&=F'_{01}(x)=\operatorname{ch}x & F_{10}(x)&=F'_{00}(x)=\operatorname{sh}x \end{aligned} \tag{22}$$

L'équation à matrices utilisant les grandeurs u et u' seront :

$$\begin{Vmatrix} u\\ u' \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} F_{00}(x) & F_{01}(x)\\ F_{10}(x) & F_{11}(x) \end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix} u_0\\ u'_0 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} \int_0^x F_{01}(t)\,A\,e^{3(x-t)}\,dt\\ \int_0^x F_{11}(t)\,A\,e^{3(x-t)}\,dt \end{Vmatrix} \tag{23}$$

où dans la dernière matrice colonne on a écrit les produits de convolution correspondantes aux terme qui représente le chargement.

Pour exprimer les grandeurs u et σ_r nous tiendrons compte de l'expression

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{e^{-x}}{r_0}\,u+\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{e^{-x}}{r_0}\,u'=\mu B e^{-x}\,u+B e^{-x}\,u' \tag{24}$$

où on a noté

$$B = \frac{E}{(1-\mu^2)\, r_0} \tag{25}$$

On obtient :

$$\left\| \begin{matrix} u \\ \sigma_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \mu\, Be^{-x} & Be^{-x} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u \\ u' \end{matrix} \right\| \tag{26}$$

Les conditions initiales : $r = r_0$: $u = u_0$, $u' = u'_0$ $\sigma_r = \sigma_0$ peuvent être écrites ainsi :

$$\left\| \begin{matrix} u_0 \\ u'_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\mu & B \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u_0 \\ u'_0 \end{matrix} \right\| \tag{27}$$

Tenant compte des relations 23, 26, 27, le vecteur déformation-effort unitaire sera :

$$\left\| \begin{matrix} u \\ \sigma_r \end{matrix} \right\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \mu\, Be^{-x} & Be^{-x} \end{matrix} \Bigg\| \times \Bigg\| \begin{matrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{matrix} \Bigg\| \times \Bigg\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\mu & B \end{matrix} \Bigg\| \begin{matrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{matrix} \Bigg\| + \left\| \begin{matrix} \int_0^x \operatorname{sh} t\, Ae^{3(x-t)}\, dt \\ \mu\, Be^{-x} \int_0^x \operatorname{sh} t \cdot Ae^{3(x-t)} + Be^{-x} \int_0^x \operatorname{ch} t \cdot Ae^{3(x-t)}\, dt \end{matrix} \right\| \tag{28}$$

En effectuant les calculs et avec la notation $\frac{r}{r_0} = \rho$, l'expression (28) s'écrira :

$$\left\| \begin{matrix} u \\ \sigma_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1-\mu}{2}\rho + \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{\rho} & \frac{1-\mu^2}{2E}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) r_0 \\ \frac{E}{2\, r_0}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) & \frac{1+\mu}{2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{1}{\rho^2} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \frac{1-\mu^2}{8} \frac{\gamma\omega^2}{gE} r_0^3 \left(2\rho - \frac{1}{\rho} - \rho^3\right) \\ \frac{\gamma\omega^2}{8g} r_0^2 \left[2(1+\mu) + (1-\mu)\frac{1}{\rho^2} - (3+\mu)\rho^2\right] \end{matrix} \right\| \tag{29}$$

Dans le cas où le disque a la section variable en degrés nous prendrons comme variables ces grandeurs-là qui ont une variation continue dans les points de discontinuité de la section.

Ainsi, à la place de l'effort unitaire radial σ_r, nous prendrons le produit $\sigma_r h$ (h étant l'épaisseur d'un tronçon de section constante), parce que pour deux tronçons d'épaisseur h_1 et h_2 on peut écrire : $\sigma_{r_1} \cdot h_1 = \sigma_{r_2} h_2$.

Puisque dans les points de discontinuité de la section ni le rayon r ne se modifie, nous pouvons prendre comme variable la grandeur :

$$N_r = \sigma_r \cdot r \cdot h \tag{30}$$

Dans ce cas, les relations (29) utilisant les grandeurs u et N_r seront :

$$\left\| \begin{matrix} u \\ N_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1-\mu}{2}\varrho + \frac{1+\mu}{2}\frac{1}{\varrho} & \frac{1-\mu^2}{2hE}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) \\ \frac{Eh}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) & \frac{1+\mu}{2}\varrho + \frac{1-\mu}{2}\frac{1}{\varrho} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u_0 \\ N_0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{1-\mu^2}{2}\frac{\gamma\omega^2}{gE} r_0^3 \left(2\varrho - \frac{1}{\varrho} - \varrho^3\right) \\ \frac{\gamma\omega^2}{8g} h r_0^3 \left[2(1+\mu)\varrho + (1-\mu)\frac{1}{\varrho} - (3+\mu)\varrho^3\right] \end{matrix} \right\| \tag{31}$$

où schématiquement sous la forme :

$$\left\| \begin{matrix} u \\ N_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_{11}\left(\frac{r}{r_0}\right) & F_{12}\left(\frac{r}{r_0}\right) \\ F_{21}\left(\frac{r}{r_0}\right) & F_{22}\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u_0 \\ N_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} C_1\left(\frac{r}{r_0}\right) \\ C_2\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{matrix} \right\| \tag{32}$$

ou ancore

$$\| V_r \| = \| F^{0,r} \| \times \| V_0 \| + \| C^{0,r} \| \tag{33}$$

Par exemple si nous prendrons le cas d'un disque à „n" variations en degrés de la section (fig. 3) dont les épaisseurs nous allons les noter par h_1, h_2,..., $h_n$et pour chaque tronçon de section constante, nous écrirons l'équation (33), résulte le système suivant :

$$\begin{aligned} \| V_1 \| &= \| F^{0,1} \| \times \| V_0 \| + \| C^{0,1} \| \\ \| V_2 \| &= \| F^{1,2} \| \times \| V_1 \| + \| C^{1,2} \| \\ &\vdots \\ \| V_n \| &= \| F^{n-1,n} \| \times \| V_{n-1} \| + \| C^{n-1,n} \| \end{aligned} \tag{34}$$

En solutionnant les deux premières équations du système (34), on obtient pour $\|V_2\|$ l'expression :

$$\begin{aligned} \| V_2 \| &= \| F^{1,2} \| \times \| F^{0,1} \| \times \| V_0 \| + \| F^{1,2} \| \times \| C^{0,1} \| = \\ &= \| F^{0,2} \| \times \| V_0 \| + \| C^{0,2} \| \end{aligned} \tag{35}$$

où

$$\begin{aligned} \| F^{0,2} \| &= \| F^{1,2} \| \times \| F^{0,1} \| \\ \| C^{0,2} \| &= \| F^{1,2} \| \times \| C^{0,1} \| + \| C^{1,2} \| \end{aligned} \tag{36}$$

Donc en général, le vecteur déformations-efforts correspondent à la variation de section $r = r_i$ s'écrira :

$$\| V_i \| = \| F^{0,i} \| \times \| V_0 \| + \| C^{0,i} \| \tag{37}$$

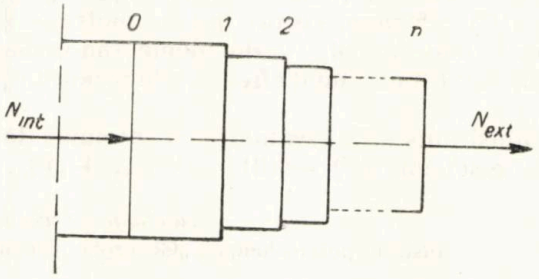


Fig. 3.

où

$$\| F^{0,i} \| = \| F^{i-1,i} \| \times \| F^{i-2,i-1} \| \times \ldots \times \| F^{1,2} \| \times \| F^{0,1} \|$$
$$\| C^{0,i} \| = \| F^{i-1,i} \| \times \| C^{0,i-1} \| + \| C^{i-1,i} \| \tag{38}$$

Ce calcul est présenté dans le tableau ci-dessous :

i	$\| F^{i-1,i} \|$	$\| F^{0,i-1} \|$	$\| F^{0,i} \|$	$\| C^{i-1,i} \|$	$\| C^{0,i} \|$	Observations
(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)	(VII)
1	$\| F^{0,1} \|$	1	$\| F^{0,1} \|$	$\| C^{0,1} \|$	$\| C^{0,1} \|$	$(IV)_i = (II)_i \times (III)_i$ $(VI)_i = (II)_i \times$ $\times (VI)_{i-1} + (V)_i$
2	$\| F^{1,2} \|$	$\| F^{0,1} \|$	$\| F^{0,2} \|$	$\| C^{1,2} \|$	$\| C^{0,2} \|$	
3	$\| F^{2,3} \|$	$\| F^{0,2} \|$	$\| F^{0,3} \|$	$\| C^{2,3} \|$	$\| C^{0,3} \|$	
4	$\| F^{3,4} \|$	$\| F^{0,3} \|$	$\| F^{0,4} \|$	$\| C^{3,4} \|$	$\| C^{0,4} \|$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$n-1$	$\| F^{n-2,n-1} \|$	$\| F^{0,n-2} \|$	$\| F^{0,n-1} \|$	$\| C^{n-2,n-1} \|$	$\| C^{0,n-1} \|$	
n	$\| F^{n-1,n} \|$	$\| F^{0,n-1} \|$	$\| F^{0,n} \|$	$\| C^{n,n-1} \|$	$\| C^{0,n} \|$	

La colonne (I) indique la section (le degré) dans lequel doit être determiné le vecteur déformation-effort.

Dans les colonnes (II) et (IV) s'ecrivent les matrices carrés $\| F^{i-1,i} \|$ et les matrices colonnes $\| C^{i-1,i} \|$ des tronçons de section constante, calculées à l'aide des relation (33). La matrice $\| F^{0,1} \|$ figure encore une fois dans la col. (III) 2me rang. Le produit de matrices $\| F^{1,2} \| \times \| F^{0,1} \| = \| F^{0,2} \|$ est inscrit dans la col. IV du même rang, mais aussi dans la col. III le rang suivant (3) en vue d'effectuer le produit : $\| F^{2,3} \| \times \| F^{0,2} \| = \| F^{0,3} \|$.

On continu ainsi plus loin. Les matrices colonnes de la col. (IV) sont calculées d'après le schéma $(V)_i = (II) \times (V^i)_{i-1} + (V)_i$.

La chaire de mecanique II
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest

BBLIOGRAPHIE

1. *Blumenfeld, M.* — Calculul discurilor de grosime variabilă în mișcarea de rotație prin metoda de recurență a celor trei momente. Studii și cercetări de mecanică aplicată. Ed. Acad. R.P.R. anul XIV 1963.

2 *Buzdugan, Gh., Beleș, A., Nițescu, C., Voinea, R., Petre A., Blumenfeld, M., Calmanovici, S.* — Culegere de probleme din rezistența materialelor. Ed. didactică și pedagogică, Buc. 1963.

3. *Filonenco, M. M., Iziumov, S. M., Alisov, B. A., Cuadrițev, I. N., Malaghinov, L.* — Curs de rezistența materialelor, partea a 2-a, Editura tehnică, Buc. 1962. Traducere din limba rusă.

4. *Kappus, R. et D. Clerc* — La matrice de rappel d'une structure élastiquement suspendus. La recherche aéronautique. Nr. 64 — mai 1958.

5. *Kersten, R.* — Das Reduktionsverfahren der Baustatik verfahren der Übertragungsmatrizen. Springer Verlag Berlin-Gőtingen-Heidelberg 1962.

6. *Ponomarev, K. K.* — O metodă matricială pentru calculul vibrațiilor grinzilor. Studii și cercetări de mecanică aplicată. Anul III, Nr. 1, 1961.

7. *Timoshenko S.* — Résistance des materiaux, 2-ème partie. Paris 1949.

8. *Voinea Radu* — Cîteva considerații cu privire la metoda Krîlov pentru studiul deformațiilor grinzilor drepte. Industria construcțiilor și a materialelor de construcții. Anul V, nr. 2, febr. 1954.

9 *Voiculescu, D.* — Quelques applications de la théorie des distributions dans la résistance des materiaux. Bul. inst. polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", Tomul XXXI, 1969, nr. 1.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C. Z. : 621.431:621.43-4:621.436:62.001.24

CALCULATION OF THE RATE OF HEAT RELEASE IN THE DIRECT-INJECTION DIESEL ENGINE *

NICOLAE APOSTOLESCU

Determining through calculation the rate of heat release in the engine cylinder represents an old and constant concern of the researchers in this field. This interest is justified by the essential importance of the manner the combustion is developing on the engine performances The calculation method of the rate of heat release may thus become an important means of optimizing the engine construction, on condition it expresses with the highest possible accuracy the correlation of as many constructive and functional factors as possible with the combustion development characteristics.

The actual interest for elaborating some calculation methods of the combustion law is stimulated by the progresses scored in the knowledge of the fundamentals of combustion in the compression-ignition engine. On the other hand, the present created possibilities for a large utilization of the digital computers considerably increase the importance of elaborating some improved calculation methods, allowing to reduce the expensive and lasting tests in the engine designing and developing phase.

In line with these studies, a new method for calculating the heat release in the direct-injection Diesel engine is presented within this work, proposing to correlate the combustion law with the fuel injection law and the mixing processes features. For the diffusive-type combustion period, extending under normal engine conditions on the main fuel fraction injected in the cylinder, a personal physical model suitable to the specific combustion conditions of the engine has been used.

1. Calculation equations

In view of analytically express the rate of heat release in the compression-ignition and direct-injection engine, several physico-chemical models have been suggested up to now, which are schematizing some of the main phenomena involved in the combustion.

Priority has been in general afforded to the chemical kinetic aspects of the processes. Thus, Neumann [1], Inozemtsev [2], Glagolev [3],

* Manuscript received October 1968.

Bărănescu [4] have calculated the combustion law on basis of the fuel-oxygen bimolecular equation. The more recent Wiebe's semi-empirical method [5] is also based on a combustion model considering exclusively the chemical aspects. Attempts to calculate the combustion law exclusively by means of a diffusive combustion model for the fuel droplet have been also carried out (Lyn [6]).

All these methods have as a common touch the modelling of a single combustion mechanism, considered as characteristic for combustion in the compression-ignition engine. But, according to the actual knowledge, combustion results from two mechanisms, the share of which is altered in time. At the beginning of combustion, the rate of heat release is controlled by the combustion of fuel-air mixture volumes, formed during ignition delay period through the propagation of turbulent flames — therefore by kinetic factors. The turbulent diffusive-type combustion, negligible at first, gradually acquires importance. After the consumption of the premixed fuel-air charge, combustion continues only through the turbulent-diffusive mechanism, the rate of heat release coming under the main control of the mixing rate [7], [8].

Consequently, the combustion in the compression-ignition engine might be schematized by means of two combustion models, characterizing the two mechanisms. This principle has been suggested by the author in a previous work [9]. On the same idea the calculation of the heat release law proposed by Gee and Karim [10] is also founded, according to which the pre-mixed fuel fraction combustion is controlled by the bimolecular law and the combustion of the other fuel fraction by the Spalding's law [11], [12] for the diffusive combustion of the single fuel droplet.

By adopting the same combustion schematizing principle, we suggest further the calculation of the $dQ/d\alpha$ heat release law as a resultant of the heat release laws through the combustion of the pre-mixed fuel-air charge $dQ_o/d\alpha$ and through diffusive-combustion $dQ_h/d\alpha$

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dQ_o}{d\alpha} + \frac{dQ_h}{d\alpha} . \tag{2}$$

On modelling the combustion of the pre-mixed fuel-air volumes, for which kinetic aspects are essential, we meet with difficulties as the kinetic details of the fuel oxidation chain processes are virtually unknown. As a result, the rate of heat release may be estimated only on basis of an overall reaction rate of the chemical transformations. This overall rate has been expressed by some authors as the fuel-oxygen bimolecular reaction rate.

A different assumption on the combustion development which has been accepted in this work pertains to Wiebe. On basis of the general conceptions of the chain reaction theory, Wiebe considers that there exists a proportionality relation between the rate of chained chemical reaction. Applying this assumption to the premixed type combustion, the lag between the velocity of the flame extending over the

mixture and the rate of fuel consumption in the combustion zone depth, proper to the turbulent flame, is implicitly neglected. This lag is of a special importance with the normal combustion in the spark-ignition engine [13]. But with the compression-ignition engine, this combustion characteristic of turbulent flame loses its significance, as the Diesel fuels are characterized by high reaction rates. In order to apply the Wiebe's hipothesis, one should also accept the homogeneity of the premixed charge from the point of view of fuel concentration in the mixture and of temperature. The actual variations of the concentration *) and of the temperature are difficult to estimate, due to the complexity of the factors involved.

Applying in these conditions the Wiebe's semi-empirical law, one obtains for the rate of heat release by the combustion of the premixed fuel-air charge

$$\frac{dQ_o}{dt} = H_i \frac{dm_o}{dt} = 6.91\ H_i m_o \frac{\chi+1}{\tau_{oc}} \left(\frac{t}{\tau_{oc}}\right)^{\chi} \exp\left[-6{,}91 \left(\frac{t}{\tau_{oc}}\right)^{\chi+1}\right], \quad (2)$$

where m_o is the fuel quantity in the inflammable mixture, existing at the beginning of combustion, [kg]; H_i — fuel reaction heat [kcal/kg]; χ — kinetic characteristic determined by Wiebe; τ_{oc}, t — time of premixed-type combustion and instantaneous time, [s], respectively.

To express the relation (2) depending on the crank angle (C.A.), the following substitutions are carried out:

$$t = \frac{\alpha - \alpha_a}{6n}, \qquad \tau_{oc} = \frac{\alpha_z - \alpha_a}{6n} = \frac{\Delta\alpha_{oc}}{6n}, \quad (3)$$

where α is the instantaneous crank angle measured from the T.D.C. at inlet stroke beginning; α_a — crank angle when combustion starts; $\Delta\alpha_{oc}$ pre-mixed type combustion time, in crank angle; n — engine speed [rpm]. Substituting the (3) relations in (2), one obtains

$$\frac{dQ_o}{d\alpha} = 6.91\, H_i m_o \frac{\chi+1}{\Delta\alpha_{oc}} \left(\frac{\alpha-\alpha_a}{\Delta\alpha_{oc}}\right)^{\chi} \exp\left[-6{,}91 \left(\frac{\alpha-\alpha_a}{\Delta\alpha_{oc}}\right)^{\chi+1}\right]. \quad (4)$$

Modelling of heterogeneous combustion, where complex phenomena are intervening associated to fuel atomisation vaporisation, mixing and chemical kinetics, also implies considerable simplifications. The statistical treatment of the liquid fuel jet combustion requires the insertion of some difficult to estimate parameters. Therefore it is generally preferable that jet combustion is studied on basis of the equations determined for the single fuel particle. The fuel jet is considered as being formed of identical particles at any moment, the initial diameter being equal to a mean diameter, corresponding to the actual statistical dimensional distribution. For the single droplet combustion a model is adopted, which is generally characterized by the spherical symmetry, negligible convective effects, quasisteady conditions and high rates of

*) within inflammability limits, for the pre-formed mixture that burns.

the chemical reactions compared with the mixing rate. Gee and Karim have applied corresponding equations for studying the diffusive combustion in the engine, taking also into consideration the gradually variation of the oxygen concentration in the combustion chamber.

The utilisation of this model for combustion in the compression-ignition engine is however objectionable of principle. As Spalding [12] has demonstrated, the quasi-steady treatment of the diffusive combustion becomes inapplicable with high pressure processes near to, or exceeding the fuel critical point. But these are just the most characteristic conditions of the diffusive combustion in the compression-ignition engine *).

Taking this aspect into account, an altered model adapted for the unsteady treatment of the evaporation and combustion has been proposed [14] for the study of combustion at high pressures and temperatures. In this domain vaporization is considered as exclusively controlled by the vapours diffusion process. The particle or a particle assembly is theoretically equated to a fuel instantaneous point source, for which the unsteady field of fuel vapour concentrations is specified. On this basis and in the absence of chemical kinetic reasons, the dm/dt burning rate and the r_f flame radius are determined as per the work [14] from the following relations :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1+\sigma}{7.09\,\sigma} \cdot \frac{m_p (1-w_0)\, r_f^2}{D^{3/2}\, t^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4\,D\,t}\right), \tag{5}$$

$$r_f^2 = 4\,Dt.ln\,\frac{m_p (1-w_0)}{\varrho\,(w_{st}-w_0)(4\pi\,D\,t)^{3/2}}, \tag{6}$$

for an unlimited air volume, and

$$\frac{dm}{dt} = 2\,D\,\frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \frac{m_p\,(1-w_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\,\alpha_n^2}{R^2\alpha_n} (\sin r_f\,\alpha_n - \tag{7}$$

$$- r_f\,\alpha_n \cos r_f\,\alpha_n) \exp\,(-\,D\,\alpha_n^2\,t)\,,$$

where r_f results from the following equation,

$$w_{st} - w_0 = \frac{m_p (1-w_0)}{\varrho}\left[\frac{1}{2\pi\,r_f\,R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+R^2\,\alpha_n^2}{R^2\,\alpha_n} \cdot \right. \tag{8}$$

$$\left. \cdot \sin r_f \alpha_n \cdot \exp(-\,D\,\alpha_n^2\,t) + \frac{3}{4\pi R^3}\right],$$

for a limited air volume included in the R radius sphere, respectively.

In the (5) to (8) equations the following notations have been used : m_p — mass of the fuel supplied by the source, [g] ; ϱ — gas density, — [g/cu.cm] ; w_{st} — fuel stoichiometric mass concentration, $w_{st} = 1/(1+\sigma)$;

*) for gas-oil the critical point corresponds to about 20 kgf/sq. cm. and 730°K.

w_0 — uniform mass concentration of the fuel that has chemically reacted, initially existing; σ — stoichiometric ratio; D — diffusion coefficient, [sq.cm/s]; α_n — a positive root of the equation: $R\alpha_n \cdot \cot R\alpha_n - 1 = 0$.

Adopting these equations for the calculation of diffusive combustion in the engine, several remarks are imperative.

a) According to the presented model, the fuel jet is replaced by an unsteady field of fuel vapours limited by a flame spherical cover. It should be mentioned for supporting this representation that as Svirydov [15] and Austen and Lyn [6] noted, the heat release during the diffusive combustion period in the engine is not practically influenced by the droplet diameter, by the atomisation quality. On basis of the suggested representation the actual fuel injection law, considered as divided in several elements (Fig. 1), is replaced by several instantaneous sources successively acting.

b) Overlooking of the kinetic factors during the diffusive combustion confers surely a certain approximation degree on the calculations carried out with these equations. But the influence of kinetic factors at the high temperatures where the diffusive combustion takes place in the engine seems to be reduced, which might explain on one hand

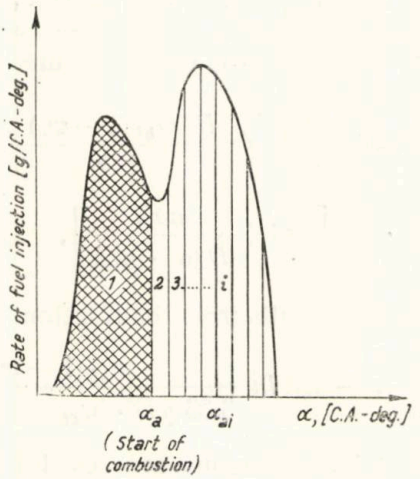


Fig. 1.

the insignificant effect of the temperature level modification on the burning time [15] and on the other hand, the almost proportionally reduction of the burning time with the engine speed increasing [6].

c) A special problem arises in connection with the influence of the gas motions in the combustion chamber. The existence of a relative velocity between gases and fuel particles is of course an accelerating factor of the mass transfer. The estimation of these effects during particles movement within the jet and expecially during combustion is un-

certain. The adopted model allows for considering the total influence of the gas turbulent motions on the motionless sphere consisting of unburnt fuel vapours, by the introduction of the mean turbulent diffusion coefficient.

d) The (5) to (8) equations have been deduced assuming that the state of the gases is invariable. In fact, during the diffusive combustion of the fuel supplied by one of the instantaneous sources, the density may vary within large limits, considerably influencing the heat release law. In this case, so as to obtain satisfactory results, it is necessary to determine a method for correcting the obtained results, depending on the gas density variation.

e) Compared with equations (5) and (6), the solving of the (7) and (8) equations is more difficult. As shown by the author [14], for the λ excess coefficients greater than 1.4, the combustion law in a limited air volume presents insignificant differences as against the unlimited air volume case. As the direct-injection engines are not operating with equivalance ratios $\lambda<1.4$, the heat release law corresponding to the diffusive combustion in an unlimited volume is further used. Denoting by m_{hi} the mass of fuel supplied by the i instantaneous point source, corresponding to the i element of the injection law, and expressing the time t in the (5) and (6) relations, by the α—α_{ai}· C.A., measured from the moment when the i element injection begins, the heat release law for the i element combustion may be obtained as.

$$\frac{dQ_{hi}}{d\alpha} = 2.08\,\frac{1+\sigma}{\sigma}\,n^{3/2}\,\frac{H_i\,m_{hi}\,(1-w_0)}{D^{3/2}}\,\frac{r_{fi}^3}{(\alpha-\alpha_{ai})^{5/2}}\cdot \exp\left[-1{,}5\,\frac{n\,r_{fi}^2}{D\,(\alpha-\alpha_{ai})}\right], \tag{9}$$

where the r_{fi} flame radius results from the relation

$$r_{fi}^2 = 0.667\,\frac{D}{n}\,(\alpha-\alpha_{ai})\,ln\,\frac{m_{hi}\,(1-w_0)\,n^{3/2}}{3.03\,\varrho\,D^{3/2}\,(w_{st}-w_0)\,(\alpha-\alpha_{ai})^{3/2}}\cdot \tag{10}$$

Considering k fuel instantaneous sources, for the fuel fraction injected prior to combustion beginning, but which has not formed inflammable mixtures and for the elements of the injection law successively introduced after combustion has started (fig. 1), it results:

$$\frac{dQ_h}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{k}\frac{dQ_{hi}}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{k} 2.08\,\frac{1+\sigma}{\sigma}\,n^{3/2}\,\frac{H_i\,m_{ki}\,(1-w_0)}{D^{3/2}}\,\frac{r_{fi}^3}{(\alpha-\alpha_{ai})^{5/2}}\cdot \exp\left[-1{,}5\,\frac{n\,r_{fi}^2}{D\,(\alpha-\alpha_{ai})}\right]\cdot \tag{11}$$

2. Considerations on the mean turbulent diffusion coefficient during combustion

The mass transfer by turbulent diffusion, although representing one of the main factors influencing the combustion in engines, has been little studied up to now-possibly due to complications involved by the unsteady character of the combustion.

As a matter of fact, the general problem of the mass diffusive transfer in a turbulent motion has been studied at length only for the simplest case, that of the homogeneous, isotropic and stationary turbulence, for which Taylor has developed the theory of diffusion by continuous movements. Within this theory the D turbulence diffusion coefficient is defined for large dispersion time $t \gg T$ as follows [16]:

$$D = \sqrt{\overline{u^2}}\, \mathfrak{L},$$

where $\mathfrak{L}$ is the turbulence Lagrange scale

$$\mathfrak{L} = \sqrt{\overline{u^2}} \int_0^t R_t \, dt,$$

R_t being the Lagrange correlation coefficient between the u pulsatory component of velocity at a given moment and its u_t value after the t time, $R_t = \overline{u u_t}/\overline{u^2}$ and $\sqrt{\overline{u^2}}$ being the turbulence intensity.

Adopting of a turbulent diffusion coefficient in the engine cylinder conditions and its estimations gives rise to several problems.

First, one should note that the turbulent motions of the cylinder charge have an essential unsteady character due to the specific generating and damping conditions of these motions.

It is known that the turbulent motions inside the cylinder are created during the inlet stroke following the charge entrance as a jet in the cylinder and possibly of its spiral movement *). During the compression stroke, the turbulent pulsation are partially damped, but during the last portion of the piston stroke new sources are acting, which again intensify the turbulence, namely the piston decelerated motion (determining the detachment of some air currents from the piston head) and the squish (the air volumes from the areas piston-cylinder head maximum closeness are ejected towards the combustion chamber).

The consecutive manner these sources are acting, as well as the general turbulence damping conditions impress an unsteady character to these processes. These aspects explain at the same time the non-homogeneous character of the cylinder turbulence, which has been noted also experimentally [17].

Taking into account the difficulty degree of the problem and the shortage of informations, it seems reasonable to adopt a mean turbulence diffusion coefficient for studying the mass transfer processes

*) To generate this motion, constructive modifications of the inlet system are introduced with the high-speed direct-injection engines.

during combustion; this coefficient is characterizing the average turbulent transfer conditions on the entire time interval and whole cylinder.

When direct measurements are missing, the mean turbulence diffusion coefficient may be estimated on basis of the experimental data obtained for turbulent flow in pipes. As at present there is no information concerning the similitude degree of the cylinder turbulent motion with the isotropy theoretical conditions, the results obtained in the quasi-isotropic turbulence conditions for flowing through pipes may be used for analogy with the cylinder. Such a simplification allows in any case to establish an orientative value for the mean turbulence diffusion coefficient in the cylinder during combustion.

The analogy between the engine cylinder and pipe is justified by the existence of the turbulent motion in both systems. The analogy conditions between the mass turbulent transfer in the two systems should take into account the differences existing between the generating manner of the turbulent motions. This is why the turbulence intensity is accepted as criterion of the turbulent transfer analogy in the two systems; the mass turbulent transfer in the cylinder and pipe is identical when the turbulent pulsation have the same intensity. Denoting by $\sqrt{\overline{u_{cl}^2}}$ the turbulence intensity in the cylinder and by $\sqrt{\overline{u_p^2}}$ the turbulence intensity in the pipe, the analogy condition is:

$$\sqrt{\overline{u_{cl}^2}} = \sqrt{\overline{u_p^2}} \cdot$$

A similar hypothesis has been made by the author in a previous work [18], dealing with the convective heat transfer in the cylinder.

To estimate the mean turbulence intensity in the cylinder during combustion, the data obtained by Semenov [17] with a C.F.R. engine of variable compression ratio and operating as driven engine *) have been used. At the T.D.C. where the turbulence intensity — average for a great number of cycles — reaches a maximum, the value of $\sqrt{\overline{u_{cl}^2}} = 0.45$ m/s. (fig. 2a) has been obtained for the n=900 rpm and the $\varepsilon = 6$ compression ratio. The increase of the compression ratio involves a slight decrease of the turbulence intensity (fig. 2b). On the other hand, the increase of the engine speed determines a practically proportional increase of the turbulence intensity $\sqrt{\overline{u_{cl}^2}} \sim n$, (fig. 2c), conclusion which may be reached also on basis of some theoretical considerations [18].

Two of the main turbulence sources, the spiral movement of the charge in the cylinder during inlet stroke and the squish movement have been missing in the experiment conditions. Taking into account this absence, the value $\sqrt{\overline{u_{cl}^2}} = 0.8$ m/s experimentally determined at

*) Cylinder charge consisting of air.

the T.D.C. for n=1200 rpm is considered as illustrative for the mean value of the turbulence intensity in the cylinder on the whole combustion period.

So as to establish the analogy in the proposed conditions, the experimental results concerning the quasi-isotropic turbulent diffusion

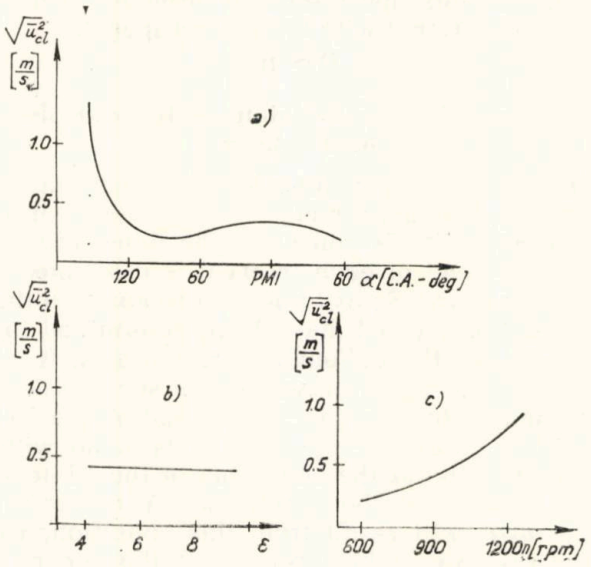


Fig. 2.

in the core of a fully developed air flow in a circular pipe, obtained by Baldwin and Walsh [19] are used. The turbulent diffusion characteristic parameters obtained by the authors are shown in Table 1.

Table 1

U	$\sqrt{\overline{u_p^2}}/U$	$\sqrt{\overline{u_p^2}}$	$\mathfrak{L}$	D
[m/s]	—	[m/s]	[mm]	[sq.cm/s]
22.128	0.027	0.597	8.443	50.166
32.309	0.029	0.935	7.071	66.888
41.148	0.028	1.152	7.193	81.752
48.768	0.032	1.560	7.193	111.480

On basis of this hypothesis the $D \approx 60$ sq · cm/s value is obtained for the mean turbulent diffusion coefficient in the cylinder during combustion. The burning time for which the mean diffusion coefficient is considered, is generally greater than the $T \approx 8$ ms time, after which the diffusion coefficient is constant in these experiments.

One should also observe that, excepting the first studied flowing regime, the results verify the $D \sim \sqrt{\overline{u^2}}$ theoretic condition. If the same dependence is also accepted for the cylinder and if one takes into account that the turbulence intensity in the cylinder is proportional to the engine speed, it results that the mean turbulent diffusion coefficient in the cylinder is proportional with the engine speed :

$$D \sim n.$$

3. Influence of gases density variaton on the diffusive-combustion heat release

The continuous variation in time of the gases density in the combustion chamber may be approximated by a step variation, by time intervals where the density is constant. The flame radius and the rate of heat release at the end of each interval is calculated with the average density of the interval. So as to be able to apply in these conditions the (9) and (10) relations, which have been determined for the assumption of constant density throughout the combustion, it is necessary to impose a connecting condition between two successive intervals : the quantity ν_{j-1} of unburnt fuel existing at the end of the j-1 interval, calculated for the j-1 interval average density, is equal with the quantity ν_j of unburnt fuel existing at the beginning of the j interval, calculated for the average density of the j interval. A corrected quantity of initial substance m_{hij} will result from this condition, with which the flame radius and the rate of heat release at the end of the j interval may be calculated.

The quantity of unburnt fuel ν, included in the sphere of equal radius to the r_f flame radius is $\int_0^{r_f} 4\pi\varrho_j \tilde{w} r^2 dr$ where $\tilde{w}$ is the unburnt fuel concentration. If $\tilde{w}$ is explicited as per the work [14] one obtains (Appendix) :

$$\nu = 1.13 \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi} (1 - w_0) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} \left(\frac{r_f}{\sqrt{4\,Dt}} \right)^{2k+1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{r_f}{4\,Dt}} \exp\left(- \frac{r_f^2}{4\,Dt} \right) \right] - 4.19 \frac{1-(1+\sigma) w_0}{\sigma} \varrho\, r_f^3 . \tag{12}$$

Taking into account that the r_f flame radius is function of the initial fuel quantity corresponding to the i element, m_{hi} and of the ϱ density (relation 9), one may write

$$\nu = F(m_{hi}, \varrho) .$$

The initial corrected fuel quantity of the j interval m_{hij}, will therefore result by solving the equation

$$F(m_{hi(j-1)}, \varrho_{j-1}) = F(m_{hij}, \varrho_j) . \tag{13}$$

Figure 3 comparatively shows the results of the calculations carried out with this method for the density represented variation and the results obtained for the case of a constant density (12.10^{-3} g/cu.cm). For both cases one has considered an initial fuel quantity $m_{hi} = 7.9\ 10^{-3}$ g; $D = 38$ sq. cm/s; $\sigma = 15.15$; $w_{st} = 0.0624$; $w_0 = 0$.

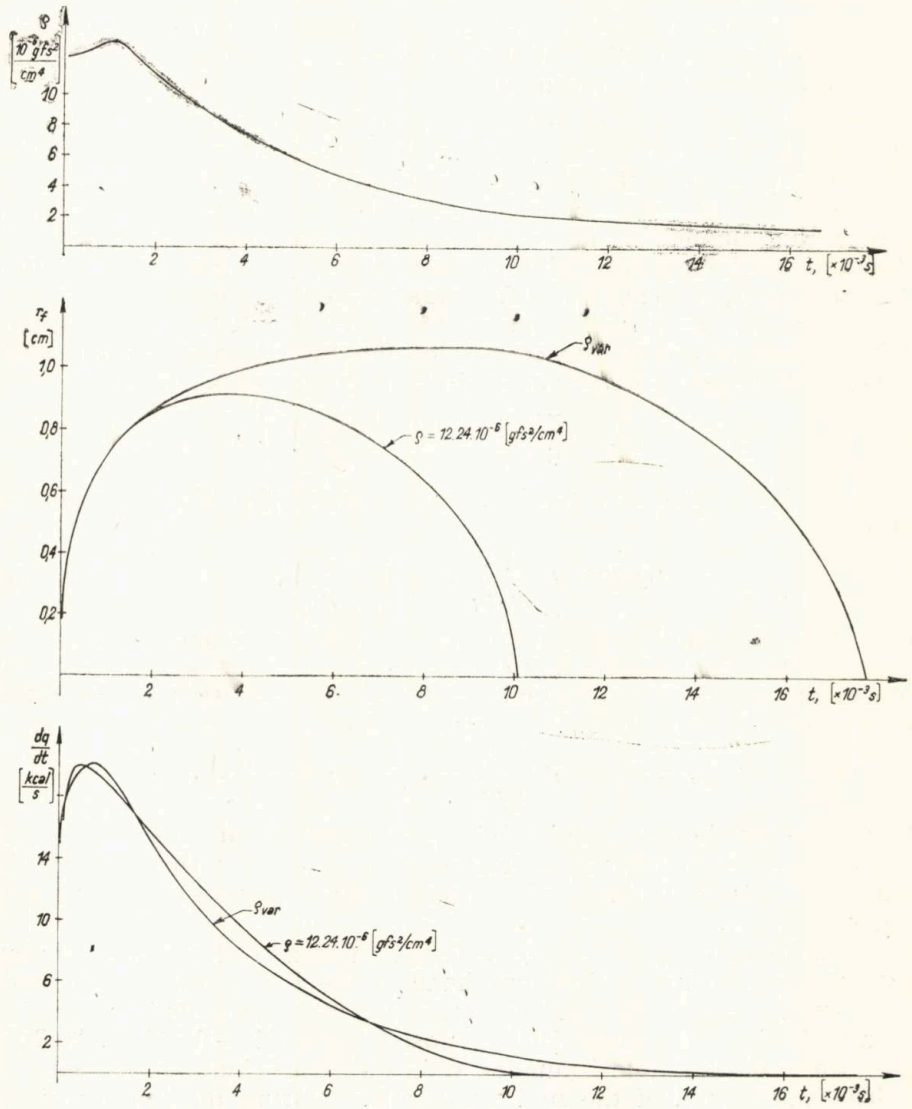


Fig. 3.

As one has expected, the decrease of the gas density during the diffusive combustion as a result of the piston movement during the expansion stroke causes a considerable increase of the burning time. This

lengthening of the combustion time is important from the point of view of the fuel complete combustion condition, without smoke at exhaust, but has a lesser influence on the heat release law.

4. Calculation technique

The determination of the rate of reaction heat release on basis of the adopted schematization of the combustion process is realized by solving the equations (1), (4) and (11).

The total quantities of consumed fuel through the two combustion mechanisms, modelled by the equations (4) and (11) may be specified by taking into account the following reasons.

The fuel quantity which forms the pre-formed inflammable mixture the moment the combustion is starting, m_0 represents a fraction of the evaporated fuel quantity, m_{ev}, during the ignition delay period, $m_0 = \xi \cdot m_{ev}$. The fuel quantity evaporated in the ignition delay period is calculated by means of the Virubov's [20] formula, considering a mean initial diameter d_0 of the fuel droplet (Sauter mean diameter). The fuel volume evaporated from a droplet is

$$v_{pev} = \frac{\pi}{6} d_0 \left[1 - \left(1 - \frac{K \tau_{ev}}{d_0^2} \right)^{3/2} \right], \tag{14}$$

where τ_{ev} is the time available for evaporation, $[h]$; K — evaporation factor :

$$K = 0.0293\, ab\, \frac{T_p}{\gamma_f p_t} \cdot \exp\left(-\frac{d}{T_p} \right), \tag{15}$$

T_p — droplet equilibrium temperature during evaporation, $[°K]$; γ_f — fuel specific weight [kgf/cu.m]; p_t — cylinder gas pressure the moment of injection, [kgf/sq.cm]; a, b and d — constants relevant to fuel. T_p results from the heat balance equation :

$$\lambda (T_i - T_p) = ab\, \frac{T_p}{273\, p_i} \cdot \Delta h \exp\left(-\frac{d}{T_p} \right),$$

λ being the air thermal conductivity coefficient at the respective temperature, [kcal/m.h,grd]; T_i — temperature of gases in the cylinder the moment of injection, $[°K]$; Δh — droplet total increase of enthalpy, [kcal/kgf].

So as to take into consideration the influence of the fuel particle relative speed in the combustion chamber, the K constant value, resulting from the application of the formula (15) is corrected by amplification with the Frössling's [11] proposed factor $[1 + 0.276\, (Re)^{1/2} (Sc)^{1/3}[$ where Re is the Reynolds' number and Sc is the Schmidt's number.

The calculation of the fuel vaporization during the ignition delay period is carried out by elements of the injection law, taking into account the difference between the entrance moments of the corresponding fuel quantities. To this effect, it is necessary that besides the injection law, experimentally determined or through calculation, the length of

the ignition delay period τ_{id} is also known. This time may be calculated, for instance, with the Wolfer's formula for the usual gas-oils :

$$\tau_{id} = 0.44\, p_a^{-1.19}\, e^{\frac{4650}{T_a}}\, 10^{-3}\,,\ s\,,$$

where p_a, [kgf/sq.cm.] and T_a, [°K], are the pressure and temperature values in the cylinder, at the end of the ignition delay period, respectively.

As the p_a, T_a couple of values is not known *) the Wolfer's formula should be applied for a series of values corresponding to some α, C.A. which follows to the injection beginning (α_i, C.A.). The problem solution is the τ_{id} value obtained for the p_a, T_a couple, corresponding to that α_a, C.A. for which the $\alpha_a - \alpha_i = 6\, n\, \tau_{id}$ condition is also satisfied.

For applying the equation (4) it is also necessary to select the premixed-type combustion time $\Delta\alpha_{oc}$ and the kinetic characteristic χ.

The calculation of combustion by the diffusive-turbulent mechanism is carried out, as shown above, by elements of the injection law, the first element representing the difference between the total quantity accumulated in the cylinder in the ignition delay period and the m_0 fuel quantity from the inflammable preformed mixture.

The application of the equations (10) and (11) by taking into consideration the variation of the gas density in the cylinder requires that the initial corrected fuel quantity of the element, corresponding to the mean value of the gas density on the time interval should be calculated for each interval. For this purpose one must solve the equation (13), where the left hand side is known from the preceding interval calculation, by means of an approximate calculation method. With the value obtained for the initial corrected fuel quantity of the element one may determine the flame radius at the end of the interval by means of the equation (10), then the respective burning rate with the equation (11). The quantity of unburnt fuel left at the end of the interval is also determined with the formula (12), being of interest for carrying out the calculations in the following interval.

The gas density variation in the cylinder during the combustion is generally unknown. This is why the solving of the equations (10) and (11) should be realized at the same time with the solving of the general equation of the energetic balance determining the gas density value :

$$\frac{dU}{d\alpha} = \frac{dQ}{d\alpha} - Ap\,\frac{dV}{d\alpha} - \frac{dQ_w}{d\alpha}\,,$$

where U is the internal energy of gases in the cylinder during combustion, [kcal] ; V — cylinder volume determined by the piston position, [cu.cm] ; p — pressure, [kgf/sq.cm] ; Q_w — heat exchanged with the walls, [kcal]. The equation solving is carried out step by step through the numerical analysis methods (Euler, Runge-Kutta etc).

*) The pressure and temperature variation during the compression stroke is known, but the lenght of the ignition delay period is not known.

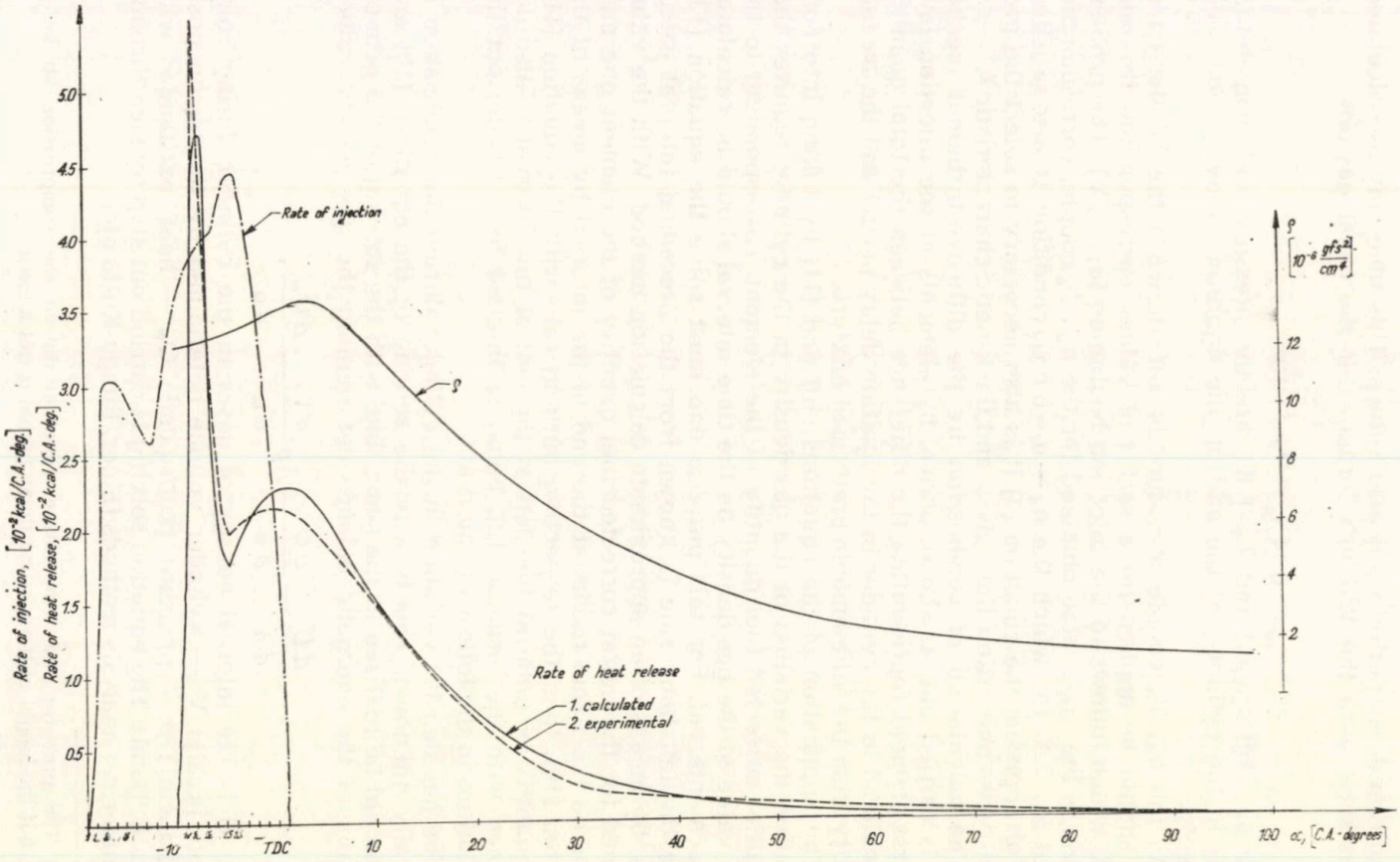

Rate of injection
Rate of heat release, [10⁻² kcal/C.A.-deg.]
Rate of injection, [10⁻² kcal/C.A.-deg.]
p
[10⁻⁶ gf/cm²]
Rate of heat release
1. calculated
2. experimental
TDC
-10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 α, [C.A.-degrees]

Fig. 4.

Figure 4 shows the rate of heat release calculated by means of the method established, compared with the law obtained by the analys of a recording of the pressure-time diagram, as per [6]. The main values adopted for calculation have been the following : $n = 1000$ rpm ; $\alpha_a - \alpha_i = 9$ C. A. degrees ; $a = 6.10^7$; $b = 0.121\ 10^{-4}$; $d = 4.15\ 10^3$ [20] ; $m_o = 7.8\ 10^{-6}$ gs^2/cm ; $m_h = 55.1\ 10^{-6}$ gs^2/cm ; $\Delta\alpha_{oc} = 5$ C. A. degrees ; $\chi = 2.5$; $\sigma = 15.15$; $D = 46$ cm^2/s.

The calculations have been carried out on Olivetti Programma 101 desk digital computer.

5. Conclusions

The suggested method of calculation presents schematically the two combustion mechanisms in the compression-ignition engine : the pre-mixed type combustion and turbulent diffusive combustion. The physical model of the diffusive combustion expresses the essentially unsteady character of the fuel vaporization and combustion processes.

This method allows for calculations carried out with a high accuracy and might be applied, for instance, to the optimization studies of the fuel injection law. In this case, the initial calculation parameters, which are characteristic for the engine-injector assembly for which the study is carried out, may be determined on basis of the experimental data obtained with the injection initial equipment.

APPENDIX

Calculation of the unburnt fuel quantity in the r_f radius sphere

The unburnt fuel quantity is

$$\nu = \int_0^{r_f} 4\pi\varrho\,\tilde{w}\,r^2\,dr\,. \tag{1.1}$$

The unburnt fuel concentration, as per [14] is

$$\tilde{w} = \frac{1+\sigma}{\sigma}\,w - \frac{1}{\sigma} = \frac{1+\sigma}{\sigma}\left[w_0 + \frac{m_{ht}\,(1-w_0)}{\varrho\,(4\pi D\,t)^{3/2}}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\,D\,t}\right)\right] - \frac{1}{\sigma}\,,$$

and substituting in the previous relation :

$$\nu = 4\pi\,\frac{1+\sigma}{\sigma}\,m_{ht}\,(1-w_0)\int_0^{r_f}\frac{r^2}{(4\pi D\,t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\,D\,t}\right)dr +$$

$$+\frac{4\pi}{\sigma}\,[(1+\sigma)\,w_0 - 1]\,\varrho\int_0^{r_f} r^2\,dr = I_1 + I_2\,.$$

$$I_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi}(1-w_0) \int_0^{r_f} \frac{r^2}{4Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \frac{dr}{(4Dt)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi}(1-w_0) \int_0^{r_f} \frac{r}{(4Dt)^{1/2}} d\left[\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi}(1-w_0) \left[\frac{r_f}{(4Dt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_0^{r_f} \exp\left(\frac{r^2}{4Dt}\right) d\left[\frac{r}{(4Dt)^{1/2}}\right]\right] = -1.13 \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi}(1-w_0) \left[\frac{r_f}{(4Dt)^{1/2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2k+1}\right] \cdot$$

$$I_2 = \frac{4\pi}{3}[(1+\sigma)w_0 - 1]\varrho r_f^3$$

$$v = 1{,}13 \frac{1+\sigma}{\sigma} m_{hi}(1-w_0)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(\frac{r_f}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2k+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{r_f}{\sqrt{4Dt}} \exp\left(-\frac{r_f^2}{4Dt}\right)\right] - 4{,}19 \frac{1-(1+\sigma)w_0}{\sigma} \varrho r_f^3 \cdot \qquad (1.2)$$

Chair of Internal Combustion Engines
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

REFERENCES

1. *Neumann K.* — Kinetische Analyse des Verbrennungsvorgangs in der Dieselmaschine. Forschung a.d. Geb. des Ing. Wes., 1936, 2.
2. *Inozemțev N. V., Koșkin, V. K.* — Protzessî sgorania v dvigateliah. Moskva, Mashghiz 1949.
3. *Glagolev N. M.* — Rabocie protzessî dvigatelei vnutrennego sgorania. Kiev, Mashghiz, 1950.
4. *Bărănescu G.* — Computation of the real cycle of four-stroke engines with compression ignition and direct injection. Revue d'électrot. et d'énerg. Acad. RPR, tome III (1958), nr. 2.
5. *Wiebe I. I.* — Novoe o rabochem tzikle dvigatelei. Moskva, Mashghiz, 1962.
6. *Austen, A. E. W., Lyn, W. T.* — Relation between Fuel Injection and Heat Release in a Direct Injection Engine and the Nature of the Combustion Processes. Proc. Instn. Mech. Engrs (AD), 1960—61, nr. 1.
7. *Apostolescu N.* — Considerații asupra desfășurării arderii în motoarele cu aprindere prin comprimare și injecție directă. In: Bul. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", 27(1965), nr. 4.
8. *Aramă C. și Grünwald B.* — Motoare cu ardere internă. Procese și caracteristici. București, Edit. Tehnică, 1966.

9. *Apostolescu N.* — O metodă de calcul al arderii picăturii de combustibil în perioada arderii difuzive în motorul cu aprindere prin comprimare. Bul. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", București, 27(1965), nr. 5.

10. *Gee D. E., Karim G. A.* — Heat release in a Compression Ignition Engine. The Engineer, 1966, sept.

11. *Spalding D. B.* — Some fundamentals of combustion. London, Butterworth scient. public., 1955.

12. *Spalding, D. B.* — Theory of Particle Combustion at High Pressure. A.R.S. Journal, 1959, nr. 11.

13. *Grünwald B.* — Influența zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie. Teză de disertație. Inst. Polit. Buc., 1963.

14. *Apostolescu N.* — Combustion of Fuel Drop at High Pressure. Bul. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", Buc. 31(1969), nr. 1.

15. *Sviridov Iu. B.* — O protzessah vosplamenenie i gorenia v dizeliah. In: Dvigateli vnutrennego sgorania. Moskva, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1956.

16. *Batchelor G. K., Townsend, A. A.* — Turbulent diffusion. Surveys in Mechanics. Cambridge Univ. Press, 1956.

17. *Semenov E. S.* — Issledovanie turbulentnogo dvijenia gaza v usloviah porshnevogo dvigatelia. In : Gorenie v turbulentnom potoke. Moskva, Izd. Acad. Nauk SSSR, 1959.

18. *Apostolescu N., Grünwald B.* — Contribuții la teoria transferului de căldură din cilindrul motorului cu ardere internă. Construcția de mașini, 1967, nr. 8—9.

19. *Baldwin, L., Walsh, Th.* — Turbulent diffusion in the core of fully developed pipe flow. A.I.Ch.E. Journal, 7 nr. 1 (1961, march).

20. *Virubov D. N.* — O metodike rascheta isparenia topliva. In: Dvigateli vnutrennego sgorania, 25. Moskva, Mashghiz, 1954.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

ENERGETICĂ

C. Z.: 621.316:621.3.02:621.39:518.5

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'INFLUENCE DES RESEAUX ÉLÉCTRIQUE SUR LES CIRCUITS DES TÉLÉCOMMUNICATIONS *

ANATOL CARABULEA

1. L'exposé du problème

L'étude de l'influence des résseaux électriques sur les circuite avoisinants de télécommunication est laborieuse étant donné, d'une part les multiples relations recommandées et d'autre par leur structure. On y ajoute aussi le fait que les relations de calcul des courants et des tensions induites dans les circuits de télécommunication de divers modèles de réseaux électriques ont à la base les expressions déduites pour lignes monofilaires avec retour par le sol, modifiées par la multiplication avec une serie de coefficients empiriques. C'est ainsi qu'on prend en considération d'une part la contribution du type de résseau à la stabilisation du niveau d'influence et d'autre part on cherche à éliminer les erreurs qui rézultent de la simplification des relations, Carson-Pollaczek [4].

Ce procédé devient inefficace d'une part à cause de multiples aspects qui doivent être modifiés et d'autre part, par suite des erreurs de plus de 20% survenant par suite de l'application des relations de calcul des impédances réciproques des lignes avoisinaintes [2].

Pour éliminer ces inconvenientes on a établ et on a réselu l'équation des télégraphistes sans avoir recours à des simplifications initiales. C'est ainsi que l'application de la méthode exacte de solution des équations des lignes longues couplées magnetiquement et par l'etablissement de nouvelles expressions pour le calcul des impédances et admittances réciproques pour divers modèles de réseaux d'influence on écarte la possibilité du cumule des erreurs au calcul des grandeurs induites dans les circuits de télécommunications.

Le travail a pour but l'organisation méthodique des relations de calcul de l'influence des réseaux électriques ainsi que l'énonciation des modèles mathématiques généraux qui puissent comprendre aussi, les cas particuliers traités dans la littérature de spécialité. On a construit un schème logique de calcul qui permet d'une part la détermination des impédances et des admittances mutuelles avec les nouvelles relations,

* Ouvrage reçu à la rédaction le 28 sept. 1968.

et d'autre part facilite aussi bien le calcul des courants de court-circuit que des tensions induites quant à la terre et des tensions longitudinales.

L'algorithme conçu permet l'utilisation des machines électroniques numériques à l'étude de l'influence des réseaux électriques sur les circuits avoisinants de télécommunication tenant compte des modèles mathématiques rigoureaux où les impédances et les admittances ont une nouvell structure selon le type avoisinant ausi du regiune de fonctionnement du réseau électrique et de la catégorie du circuit soumis à l'induction.

C'est ainsi qu'on indique un procédé efficace rapide et exact pour la détermination des grandeurs induites dangereuses ($f = 50$ Hz) et perturbatrices ($f = 800$ Hz) dans des conditions rigoureuses de considération des facteurs qui contribuent à l'établisement du niveau d'influence. Les modèles mathématiques simplifiés pour le calcul des tensions induites, peuvent être cherchés dans l'annexe. A.

Dans l'annexe B sont présentés les modèles mathématiques pour Z_{k-i}, Y_{k-i} et l'exemple de calcul qui a été utilisé a metre à l'epreuve le programme écrit en langage MOST — 1 et verifié par le calculateur numérique ODRA — 1013.

2. *Les modeles mathématiques généraux pour l'étude des grandeurs induites dangereuses et perturbatrices.*

L'étude de l'influence des réseaux électriques avoisinantes avec circuits de télécommunications se fait en partant des relations comme suit :

1.)
$$-\frac{dV_i}{dx} = Z_i \cdot I_i + Z_{k-i} \cdot I_k$$

$$-\frac{dI_i}{dx} = Y_i V_i - Y_{k-i} V_k$$

où :

Z_i et Y_i répresentent l'impédance ou bien l'admittance du circuit soumis a l'induction exprimées en [Ω/km] ou bien en [S/km].

Z_{k-i} et Y_{k-i} représentent l'impédance ou bien l'admittance mutuelle entre la ligne inductrice (k) et le circuit de télécommunication (i) exprimées en [Ω/km] ou bien [S/km].

Les relations (1) ont des solutions comme suit (2).

2.)
$$V_i(x) = A \cdot e^{-x\sqrt{z_k y_k}} + A' e^{-x\sqrt{z_i y_i}} + A'' \cdot e^{-x\sqrt{z_i y_i}}$$

$$I_i(x) = B \cdot e^{-x\sqrt{z_k y_k}} - \frac{1}{z_{ci}}\left(A' \cdot e^{x\sqrt{z_i y_i}} - A'' e^{-x\sqrt{z_i y_i}}\right)$$

On détermine les constantes A A' A'' et B pour les circuits de télécommunication utilisés en pratique fréquenment et on écrit les modèles mathématiques généraux pour l'étude de l'influence des réseaux électriques en prenant comme point de départ les expressions (2).

C'est ainsi que pour le circuit de télécommunication isolé aux deux bouts on pose les conditions :

$$I_i = (x = 0) = I_i (x = l_p) = 0$$

et on obtinent les modèles mathématiques sous la forme :

3.)

$$V_i(x) = \frac{Z_i Y_{k-i} U_k}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left[ch x\sqrt{Z_i Y_i} - \frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_i} sh x\sqrt{Z_i Y_i} - e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}}\right] + Z_{k-i} I_k\left[\frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left(e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} - ch x\sqrt{Z_i Y_i}\right) + \frac{Z_{ci} Y_i}{Z_k Y_k - Z_i Y_i} sh x\sqrt{Z_i Y_i} + ch x\sqrt{Z_i Y_i}\right];$$

$$I_i(x) = \frac{Z_i Y_{k-i} U_k}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left[-\frac{ch x\sqrt{Z_i Y_i}}{Z_{ci}} - \frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_i} sh x\sqrt{Z_i Y_i} - \frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_i} e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}}\right] + Z_{k-i} I_k\left[\frac{Y_i \cdot e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}}}{Z_k Y_k - Z_i Y_i} - \frac{ch x\sqrt{Z_i Y_i}}{Z_{ci}} - \frac{\sqrt{Z_k Y_k}\, ch x\sqrt{Z_i Y_i}}{Z_{ci}(Z_k Y_k - Z_i Y_i)} + \frac{Y_i sh x\sqrt{Z_i Y_i}}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\right];$$

Pour les circuits de télécommunication mis à la terre aux deux extremités on détermine les constantes par les relations (2) en posant les conditions $V_i(x = 0) = V_i(x = l_p) = 0$ et on écrit les modèles généraux sous la forme : [7] [2].

4.)

$$V_i(x) = Z_{k-i} I_k\left[\frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left(e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} - ch x\sqrt{Z_i Y_i}\right) + \left(\frac{Y_i}{Z_k Y_k - Z_i Y_i} - \frac{1}{Z_{ci}}\right) sh x\sqrt{Z_i Y_i} - Y_{k-i} U_k\left[\frac{Z_i}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left(e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} - ch x\sqrt{Z_i Y_i} + \frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_i} sh x\sqrt{Z_i Y_i}\right) - sh x Z_i Y_i\right];$$

$$I_i(x) = Z_{k-i} I_k\left[\frac{Y_i}{Z_k Y_k - Z_i Y_i}\left(e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} + \frac{\sqrt{Z_k Y_k}}{Z_{ci}} \cdot sh x\sqrt{Z_i Y_i} - ch x\sqrt{Z_i Y_i}\right) + \frac{1}{Z_{ci}}\right] - Z_{k-i} U_k\left[\frac{\sqrt{Z_k Y_k}\, e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}}}{Z_k Y_k - Z_i Y_i} + \frac{Z_i sh x\sqrt{Z_k Y_i}}{Z_{ci}(Z_k Y_k - Z_i Y_i)} - (1 + \sqrt{Z_k Y_k}) ch x\sqrt{Z_k Y_k}\right];$$

Dans le cas des circuits de télécommunication isolés à une extremité et mis à la terre à l'autre extrémité on détermine les constantes des conditions

$$I_i(x=o)=0 \text{ et } V_i(x=lp)=0$$

et on ecrit les modeles mathématiques comme suit : [7] [2].

$$V_i(x)=Z_{k-i}I_k\left[\frac{\sqrt{Z_kY_k}}{Z_kY_k-Z_iY_i}\left(e^{-x\sqrt{Z_kY_k}}-chx\sqrt{Z_iY_i}\right)+\right.$$

5.)

$$\left.+\frac{Z_{ci}Y_i\,shx\sqrt{Z_iY_i}}{Z_kY_k-Z_iY_i}+chx\sqrt{Z_iY_i}\right]+Z_{k-i}U_k\left[\frac{chx\sqrt{Z_iY_i}}{Y_i}\right.$$

$$-\frac{Z_i}{Z_kY_k-Z_iY_i}(e^{-x\sqrt{Z_kY_k}}-chx\sqrt{Z_iY_i})+\frac{\sqrt{Z_kY_k}}{Z_i}$$

$$\left.shx\sqrt{Z_iY_i}\right];$$

$$I_i(x)=Z_{k-i}I_k\left[\frac{Y_i}{Z_kY_k-Z_iY_i}\left(e^{-z\sqrt{Z_kY_k}}-shx\sqrt{Z_iY_i}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{Z_kY_k}}{Y_i}chx\sqrt{Z_iY_i}\right)-\frac{chx\sqrt{Z_iY_i}}{Z_{ci}}\Big]-Y_{k\ i}U_k\left[\frac{\sqrt{Z_kY_k}}{Z_kY_k-Z_iY_i}\right.$$

$$\left.(e^{-x\sqrt{Z_kY_k}}-shx\sqrt{Z_iY_i})-\frac{Z_i}{Z_kY_k-Z_iY_i}chx\sqrt{Z_iY_i}-\frac{chx\sqrt{Z_iY_i}}{Y_iZ_{ci}}\right];$$

Les relations (3—5) permettent le calcul des tensions dangereuses et perturbatrices induites dans les circuits de télécommunications par rapport à la terre si les impédances et les admittances sont déterminées pour les fréquences 50 Hz et 800 Hz. Quand on détermine les grandeurs induites perturbatrices (f = 800 Hz) on adopte dans les calculs la tension et le courant perturbateur equivalent [2] [3].

Les modèles (3—5) peuvent être appliqués pour n'importe quel type de réseau électrique (triphasé D.C.T., U.C.T.) avoisinés aux circuits de télécommunication monofilaires, bifilaires ou multifilaires à condition que les impédances et les admittances des circuits soumises à l'induction soient aussi determinées en concordance.

La tension longitudinale induite par les réseaux électriques dans les circuits de télécommunication peut être déterminée en procédant à des différences aux termes induits donnés par les relations (3—5) aux deux extrémités du circuit soumis à l'induction.

Le modèle mathématique de la tension longitudinale induite est noté comme suit :

$$6.) \qquad E_i = K_e \cdot I_k \cdot \sum_{j=1}^{n} (Z_{k-i}\, lp)_j \qquad [V]$$

où

K_e = le coefficient d'écran égal à (0,4—0,8) en fonction du nombre et de position des conducteurs écran.

l_p = la longueur de rapprochement des réseaux avoisinés.

Z_{k-i} = impédances mutuelles entre la ligne d'influence et le circuit soumis a l'induction.

Le calcul des tensions induites quant à la terre et de la tension longitudinale concerne seulement la détermination des impédances et des admittances mutuelles et des courants en régime normal et au court-circuit sur la ligne d'influence.

La détermination des impédances mutuelles entre un réseaux électrique et un circuit monofilaire ou bien bifilaire de télécommunication se fait à l'aide de la relation suivante :

$$7.) \qquad E_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{II}} = \left(\sum_{k=1}^{f'} Z_{k-I}\, I_k - \sum_{k=1}^{f'} Z_{k-II}\, I_k \right) \cdot lp\,.$$

où : $f = (1\,;\,2\,;\,3)$ les phases de la lignes d'influence.

En effectuant les calculs et en tenant compte des impédances données dans la littérature [1] dans l'hypothèse où on négligé les constances de materiel on abtient pour les impédances mutuelles les modèles mathématiques suivants :

a.) le réseau électrique triphasé :

$$Z_{abc-\mathrm{I}} = \frac{f}{400\,a} \cdot \frac{(d_{ab} + d_{bc} + j\sqrt{3}\, d_{ca})\ (6\,h_m + h_o\,(h_m + 6) + h_o^2)}{[a^2 + 4\,h_o\,(h_m + 6) + 4\,h_o^2 + (h_m + 6)^2]}$$

$$8.) \qquad Z_{abc-\mathrm{II}-\mathrm{I}} = \frac{f \cdot d_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}}{400\,a^2} \cdot \frac{(d_{ab} + d_{bc} + j\sqrt{3}\, d_{ca})\ [6\,h_m + h_o}{[a^2 + 4\,h_m\,(h_m + 6) + 4_{h_o}{}^2 + (h_m + 6)^2]}$$

$$\frac{(h_m + 6) + h_o^2]\ [3\,a^2 + 4\,h_o\,(h_m + 6) + (h_m + 6)^2]}{[a^2 + 4\,h_m\,(h_m + 6) + 4\,h_o^2 + (h_m + 6)^2]} \quad [\Omega/\mathrm{km}]$$

b.) le réseau électrique deux conducteurs-terre (D.C.T.)

9.) $$Z_{DCT-I} = \frac{f \cdot d_{ab}}{200\,a} \cdot \frac{k_1 (h_o^2 + 14\,h_o)}{(a^2 + 4\,h_1^2\,h_0^2)} \; [\Omega/\text{km}] ;$$

$$Z_{DCT-I-II} = \frac{f\,d_{ab} \cdot d_{I-II}}{200\,a^2} \cdot \frac{k_1 \cdot (h_0^2 + 4h_o)\,(3a^2 + 4\,k_1\,h_0^2)}{(a^2 + 4\,k_1^2\,h_0^2)^2,} \; [\Omega/\text{km}] ;$$

c.) le réseau électrique monophasé :

10.) $$Z_{1-I} = \frac{f}{700}\,lg. \cdot \frac{(a^2 f + 10^6\,\varrho)}{f\,(a^2 + h_o^2)}$$

$$Z_{1-I-II} = \frac{f \cdot d_{I-II}}{200\,a} \cdot \frac{(h_o^2 + 14\,h_o)}{(a^2 + 4\,h_0^2)}$$

où :

a = le rappprochement entre les lignes.

d_{ab}, d_{bc}, d_{ca} = les distances entre les conducteur de la ligne électrique.

f = la fréquence du courant 50 Hz ; 800 Hz.

h_o = la profondeur équivalente de la pénétration du courant par la terre.

d_{I-II} = la distance entre les conducteurs du circuit soumis à l'induction.

k_1 = (0,8—1,6) coefficient qui tenait compte de l'influence du sol.

Sur la base des modèles mathématiques généraux (3—6) où on a introduit les impérances mutuelles (8—10) et les admittances publiées dans la littérature [1] [7] ont été écrites dans l'annexe *A* et *B* les relations de calcul des tensions induites quant à la terre et de la tension longitudinale pour les types de lignes électriques les plus usuels et de télécommunication existances en exploitation .C'est ainsi qu'on exploite divers types de couronnement et des niveaux de tension de 110 kV ; 220 kV ; (400—500) kV et 750 kV.

Si le circuit biffilaire de télécommunication n'est pas symétrique par rapport au réseau électrique inducteur ou par rapport à la terre alors les modèles mathématiques des tensions induites ont dans l'ordre les formes suivantes :

a.) le réseau électrique triphasé

11.) $$U_{I-II} = \left[\frac{K' \cdot \varrho^2 \cdot f \cdot d_{ab} \cdot d_{I-II} \cdot F_t\,I_k \cdot l_p}{a^2\,(a^4 \cdot f^2 + \varrho^2 \cdot 10^{12})} + 0{,}5\,Z_t\,Y_{k-t}\,F_u\,U_k \cdot l_p \right]$$

$$U''_{I-II} = \frac{K'' \cdot \varrho \cdot f.d_{ab} \cdot d_{I-II} \cdot F_t\,I_k\,l_p}{a\,(a^2 f + \varrho \cdot 10^6)} + Z_t\,Y_{k-l} \cdot Fu\,U_k \cdot l_p$$

b.) le réseau électrique deux conducteurs-terre.

12.) $$U'_{I-II} = 0{,}5\,(Z_{DCT-I-II} \cdot F_i I_{DCT} + Y_{DCT-I} \cdot F_U U_{DCT})\, l'_p \cdot 10^3$$

$$U'_{I-II} = 0{,}5\,\eta \left(F_i I_{DCT} \sum_{j=1}^{n} (Z_{DCT-I}\, l_p)_j \cdot K_e + Z_i\, Y_{DCT-I}\, Fu\, U_{DCT} \cdot l_p \right) \cdot 10^3$$

Les constantes provenant des relations (11—12) ont les valeurs du tableau nr. 1 :

Tableau nr. 1

	Couronnement de la ligne electrique inructrice		
	plan horizontal	triangle equilateral	position quelquonque
K'	$2{,}5 \cdot 10^{12}$	$1{,}65.10^{12}$	$0{,}625 \cdot 10^{12}$
K''	2.10^{10}	$1{,}32 \cdot 10^{10}$	$0{,}5 \cdot 10^{10}$

Les autres grandeurs des relations (11—12) ont la signification suivante :

f = la fréquence du courant d'influence.

d_{ab} = la distance entre les conducteurs du réseau électrique.

d_{I-II} = l'éloigmement entre les fils du circuit soumis à l'induction.

ϱ = la resistivité du sol.

F_i et F_u = les facteurs téléphonique de forme des courbes de courant (F_i) et tension (F_u).

l'_p = la longueur non compensee du pas transposition (0,5—8) km.

a = la distance entre les lignes avoisinées.

η = le coefficient de sensibilité du circuit téléphonique quant aux perturbations = 8.10^{-3}.

Les modèles mathématiques présentés représentent la systématisation d'un grand nombre de relations et par leur forme générale ils permettent (par une simplification) la déduction de toute les expressions publiées dans la littérature dans divers cas particuliers.

La forme générale des impédances (8—10) facilite l'écriture de ces grandeurs pour les lignes électriques d'influence de divers types de couronnements et de diverses tensions.

La nouvelle structure des relations (8—10) ainsi que la détermination des grandeurs qui interviennent facilitent l'écart du cumul des erreurs de calcul de plus de 20% obtenues par l'application des relations données dans la litterature [2] [3].

L'exprérience de la projection des lignes avoisinées et les mesurages pratiques, démontrent que les relations Carson-Polleczek considérées jusqu'à présent comme les plus rigureuses donnent aussi des erreurs de (6—10%) de plus quant au niveau réel de l'influence [4] [5] [1] [7].

3. *Considérations sur le schema logique de calcul.*

Pour l'étude de l'influence des réseaux électriques sur les circuits de télécommunication à l'aide de machines électroniques numériques on a construit le schema logique de la fig. 1.

Le schema logique général (fig. 1) permet la détermination des grandeurs dangereuses et perturbatrices induites dans les circuits de télécommunication avoisinant les lignes électriques aériennes.

Le calcul peut être fait pour divers types de lignes avoisinées pour des rapprochements parallèles, et obliques et pour des régimes normaux et d'avarie des réseaux d'influence.

Pour ces situations on peut déterminer par l'intermediaire des cellules (IL3—IL12) les impédances et par (IL82—IL91) les admittances mutuelles entre le réseau électrique et le circuit soumis à l'induction.

Le schèma est ainsi arange qu'après la determination et l'écriture des impédances et admittances pour la fréquence de 50 Hz. on puisse reprendre le calcul pour la fréquence de 800 Hz.

Les régimes normaux de fonctionnement du réseau électrique sont pris en consideration par $A = 0$, quant $f = 50$ Hz et $A = 4$ quand $f = 800$ Hz.

Par l'intermediaire des cellules IL98 ; IL101 ; IL28 on détermine les courants de court-circuit, monophasées ($A = 1$) biphasés avec ou sans mise à la terre ($A = 2$) et triphasés ($A = 3$). Quant aux lignes électriques monophases ($K = 1$) on évite des situations non-relles (de court-circuit biphase et triphase) par l'insertion au cours du cyclage de la valeur $I_{A1} = I_x = 0$,

Le calcul des courants parasites et des tensions induites dans les circuits de télécommunication conditionés par l'induction magnétique et l'influence électrique se fait par l'intermediaire des cellules (IL—17) (IL—19) pour circuits monofilaires et (IL21—IL22) pour circuits bifilaires non symétriques par rapport au réseau électrique respectivement par rapport à la terre.

La comparaison des tensions induites calculées à celles prescrites [3] se fait dans le cadre de la cellule IL90.

Si les grandeurs induites résultées du calcul sont plus petites que les valeurs normées [3] alors on passe au cyclage en effectuant le calcul pour tous les tronçons du circuit en question.

LE SCHÈME LOGIQUE GÉNÉRALE POUR LE PROGRAMME ILECT

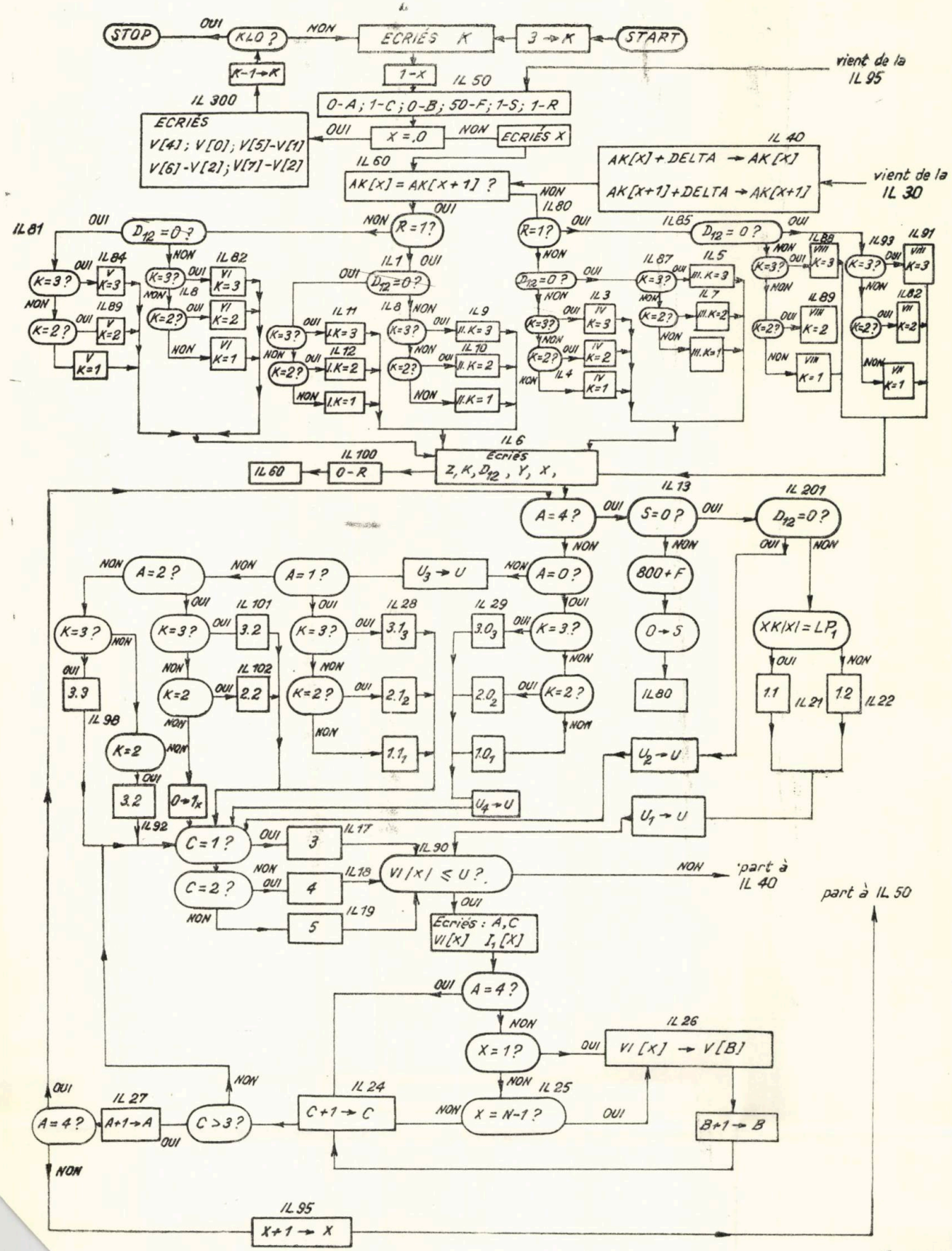
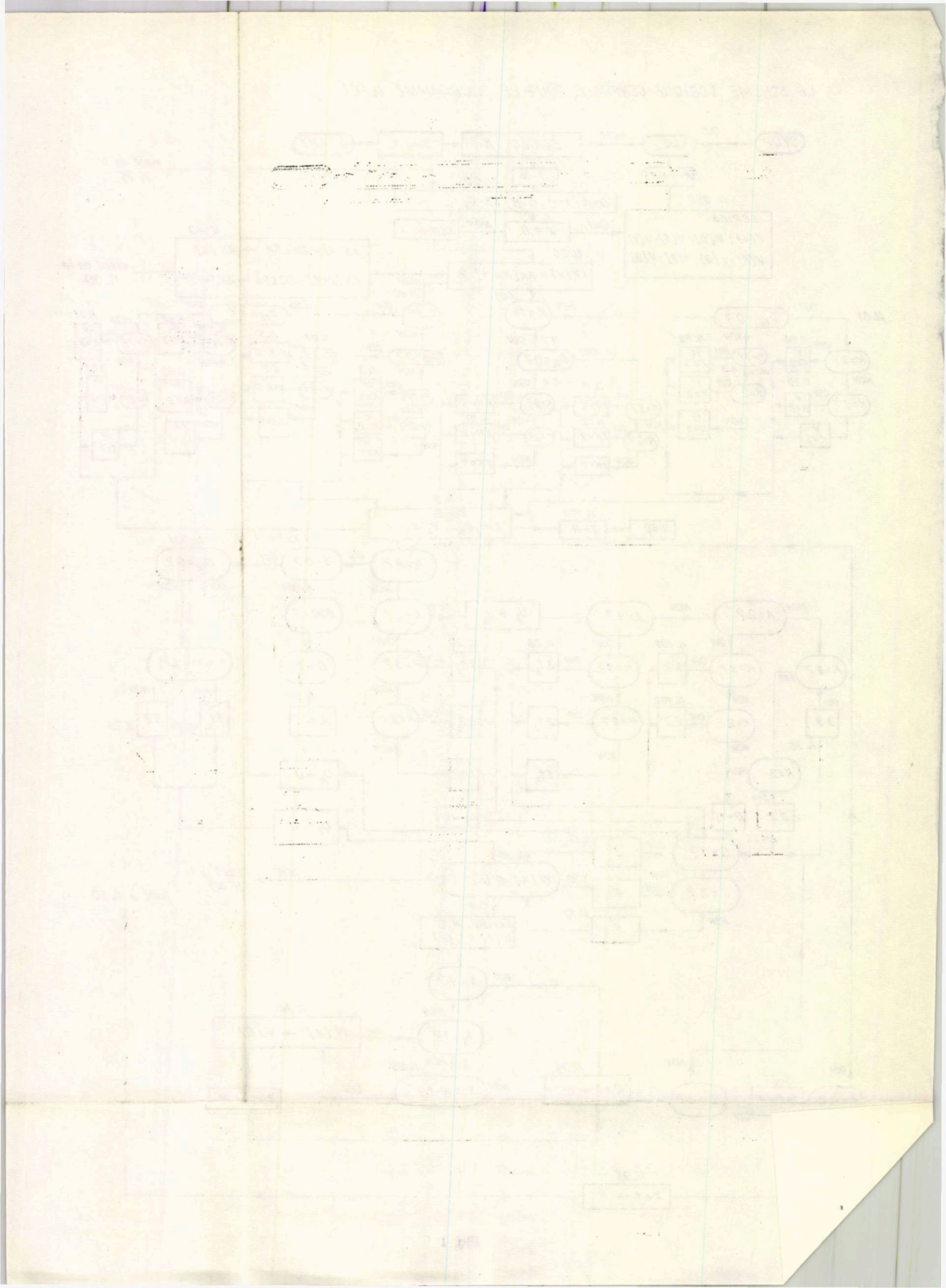


Fig. 1



Le schéma logique de calcul permet la détermination des courants et des tensions induites dans des circuits de télécommunication isolés aux deux extremités ($c = 1$) mises à la terre aux deux extremités ($c = 2$) et isoles à l'une des extremités et mis a la terre à l'autre ($c = 3$). Les mouvements en cycle sont faits pour le type de ligne d'influence ($k = 1$; 2 ; 3) réseau monophilaire ; DCT et triphasé pour le type de circuits soumis à l'induction pour cinq régimes de fonctionnement du réseau électrique et pour circuits monofilaires et bifilaires de télécommunication. De pareils mouvements en cycle s'étendent sur un certain nombre de tronçons ($x = 1 ; 2 ; \ldots N$) et permettent aussi bien la détermination des tensions induites par rapport à la terre que des tensions longitudinales induites.

Si la tension induite dans le circuit de télécommunication est plus grande que celle préscrite alors on augmente automatiquement l'ecart entre les lignes par l'intermediaires de la cellule IL40 et on reprend les calculs.

Dans la cellule IL50 on a note $A = 0$, en començant par le régime normal de la ligne d'influence et ($f = 50$ Hz). Les autres notations ($R = 1$) compteur pour delimiter le mode de calcul des impédances et celui des admittances ($R = 0$) ; $S = 0$ compteur pour la détermination des mouvements en cycle pour $f = 800$ Hz. $B =$ compteur pour la détermination et la rétention dans la cellule IL26 des grandeurs induites par rapport à la terre qui permettent le calcul des tensions longitudinales écrites dans la cellule IL300 quand ($X=N$). AK (X) = représente de repprochement entre les lignes avoisinees. D12 = représente la distance entre les conducteurs du circuit soumis à l'induction. Si on a executé le nombre de mouvements en cycle conformement aux comandes, la machine ateindra la position STOP.

Les tensions normées insérées dans le schèma ont les valeurs $U_1 = 1$ mV ; $U_2 = 30$ mV ; $U_3 = (300—500)$ V ; $U_4 = (60—150)$ V. Les deux premiers niveaux de l'influence servent pour la comparaison avec les tensions induites de perturbation ($f = 800$ Hz) et les deux dernieres pour les tension induites dangereuses ($f = 50$ Hz).

La structure complexe du schèma logique de calcul permet d'établir le type de rapprochement parallèle ou oblique facilite la réalisation des calculs pour divers types de réseaux d'influence et les circuits de télécommunication les plus usuels utilises en pratique prenant on considération les régimes de functionnement. On peut aussi procéder à quelques mouvements en cycle et déterminer aussi bien les tensions induites par rapport à la terre que les tensions longitudinales dans les limites des valeurs prescrites [3].

Par suite à des calculs on peut établir avec certitude le tracé des lignes avoisinées pour que le niveau d'influence soit, au dessous ou tout au plus égal a celui prévu dans les normes [3].

4. *Conclusions.*

La systématisation rigoureuse d'un grand nombre de relations de la littérature [2] [3] recomandées pour déterminer le niveau d'influence a permis d'ecrire l'expression de huit modèles mathématiques généraux qui peuvent être appliqués pour divers types de voisinage et pour les régimes adéquats de fonctionnement des circuits avoisinants.

La généralisation des relations de calcul des grandeurs induites, ont nécessité la détermination de la structure des impedances et des admittances qui interviennent dans les modèles mathématiques (3—5) au (11—12).

Par la nouvelle structure des impédances et des admittances on evite le cumul des erreurs de plus de 20% obtenus à l'application des relations de la littérature. [2] [3]. L'expérience pratique concretisée dans des mesuremments démontrent que les relation Carson-Pollaczeck pour la détermination des impédances mutuelles des deux circuits à retournement par la terre donne aussi des erreurs de plus d'environ (6—10%) [4] [5] [7].

Le schèma logique de calcul facilite la détermination du niveau d'influence pour le régime normal et d'avarie du réseau d'influence et permet la détérmination des tensions induites quand à la terre et des tensions longitudinales provenues des circuits de télécommunication soumises à l'induction tant pour des rapprochements obliques que pour ceux parallèles.

La conception de l'algorithme concrétisé dans les modèles mathématiques (3—5) et le schème logique de la fig. 1 facilite l'utilisation des machines électroniques numériques à l'étude de l'influence des réseaux électriques sur les circuits avoisinants de télécommunication.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Carabulea* — Contributions à l'étude de l'influence des réseaux électriques deux conducteurs-terre DCT sur les circuits avoisinants de télécommunication. These de doctorat. Institut Polytechnique Bucharest, 1963.
2. *M. I. Mihailov* — Vlianie vnesnih elektromagnitnîe polei na tepii provodnoi sveazi i zascitnîe meropriatia. Editura Svezizdat, Moskva, 1959.
3. * * * — Directives concernant la protection des lignes de télécommunication contre les actions nuisibles des lignes electriques. Editat dt C.C.I.T.T. New Delhi 1963.
4. *I. F. Pollaczeck* — Über das Feld einer unvendlich langen Wechselstrom-durchflossener Einfachleitung. Elektr. Nach. 1926, nr. 9 (sept.).
5. *J. Carson* — Wave Propagation in Overhead wires with ground return. Bell System Technical Journal, 1926 oct. 538... 554.

La chaire de centrales électriques
Institut polytechnique
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest

6. *Korn, G. A.; Korn Th. M.* — Electronic Analog and Hibrid Computers. Mc. Graw Hill Book Company New York. 1964.

7. *A. Carabulea* — Les modèles mathématiques et le schème logique pour l'etude de l'influence des lignes électriques à l'aide des ordinateurs numériques. Etudes et Recherches d'énergetique et Electrotechnique. 1968, nr. 4, Acad. R.S.R. Institut d'Energetique.

Anexa A.

Les modèles mathématiques simplifiés pour l'étude des réseaux électriques provienent dans les relations (3—5) en negligeant le carré de la constante de propagation des ondes sur les lignes d'influence.

a) Le circuit de télécommunication isolé aux deux extrémités.

$$V_i(x) = \frac{Y_{k-i}\,U_k}{y'_i}\,e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} + Z_{k-i}\,I_k\left[ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{Z_{ci}}{Z_i}\,sh\,x\sqrt{Z_i Y_i}\right]; \qquad (1 - A)$$

$$I_i(x) = \frac{Y_{k-i}\,U_k}{y'_i}\left(\frac{1}{Z_{ci}} - Y_i\right)ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} - \frac{Z_{k-i}\,I_k}{Z_i}\,A'$$

$$A' = \left[e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} + \frac{Z_i}{Z_{ci}}\,ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} + sh\,x\sqrt{Z_i Y_i}\right]$$

b) Le circuit de télécommunication mis à la terre aux deux extrémités.

$$V_i(x) = \frac{Y_{k-i}}{Y_i}\left[e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} - ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} - sh\,x\sqrt{Z_i Y_i}\right] -$$

$$- Z_{k-i}\,I_k\left[\frac{1}{Z_{ci}} + \frac{1}{Z_i}\right]sh\,x\sqrt{Z_i Y_i} \qquad (2 - A)$$

$$I_i(x) = Y_{k-i}\,U_k\left[\frac{sh\,x\sqrt{Z_i Y_i}}{Z_{ci}\,Y_i} + ch\,x\sqrt{Z_i Y_i}\right] + Z_{k-i}\,I_k$$

$$\left[\left(\frac{1}{Z_{ci}} + \frac{1}{Z_i}\right)ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} - \frac{1}{Z_i}\,e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}}\right];$$

c) Le circuit de télécommunication mis à un bout à la terre et isolé à l'autre.

$$V_i(x) = \frac{Y_{k-i}\,U_k}{y'_i}\,e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} + Z_{k-i}\,I_k\left[ch\,x\sqrt{Z_i Y_i} + \frac{Z_{ci}}{Z_i}\,shx\sqrt{Z_i Y_i}\right]$$

(3 — A)

$$I_i(x) = \frac{Z_{k-i} I_k}{Z_i} \left[sh\, x \sqrt{Z_i Y_i} - e^{-x\sqrt{Z_k Y_k}} - \frac{Z_i}{Z_{ci}} ch\, z \sqrt{Z_i Y_i} \right]$$

où

$y'_i = Y_1$ pour réseau électrique monophesé ;

$Y'_i = 2\, Y_{1-I}$ pour réseau électrique monophasé ; (D.C.T.)

$Y'_i = Y_{1-I} + Y_1$ pour un réseau électrique triphasé.

Les impédances et les admittances mutuelles qui interviennent dans les rélations (3—5) ou bien, dans les expressions (1 $A \div 3\, A$) pour raprochement paralleles et obliques ont les modèles mathématiques publiés dans la littérature (7).

Pour calculer les courents de court-circuit on peut utiliser les relations données dans la littérature [1] [3] [7].

Exemple de calcul. On peut considérer trois passages de la ligne électrique triphasée de 400 kV associés à une série de rapprochements obliques des circuits de télécommunication sur lesquels ils passent. Les courants de court circuit ont comme valeurs :

Le passage I ;	Le passage II,	Le passage III
$I_{3\cdot3} = 2700\ A$	$I_{3\cdot3} = 3050\ A$	$I_{3\cdot3} = 3550\ A$

Les données concernant les rapprochements et la résistivité du sol sont présentées comme suit :

Le passage I : $K_e = 0{,}8$; $H_1 = 18$ m ; $H_I = 6$ m

$A_1 = 3400$; $A_2 = 3000$ m ; $l_p = 1{,}6$ km ; $\varrho = 0{,}5.10^{-2}\ (\Omega - m)$

Le passage II : $A_1 = (1050 \ldots 2900)$; $A_2 = (1030 \div 3000)$ (m)

$l_p = (0{,}1 \ldots 0{,}95)$ km ; $\varrho = 0{,}5.10^{-2}(\Omega - m)$

Le passage III : $Z_{k-I} = 0{,}108\ (\Omega)$; $\varrho = 10^{-2}(\Omega - m)$;
$K_e\ (0{,}6 \div 0{,}8)$

Calculant les tensions longitudinales et la tension perturbatrice on obtient les valeurs :

$$E_I = 270\ (v) < E_{II} = 350\ (v) > E_{III} = 384 < 430\ (v)$$

$$U = \sqrt{U'_{I-II} + U''_{I-II}} = 0{,}79\ (mv) < 1\ \text{mV}.$$

Anexa B

Les impédances et les admitances mutuelles qui interviennent dans les relations (3—5) ou bien, dans les expressions (1-*A* — 3-*A*) ont les modèles mathématiques suivants :

Tableau (B-1)

La tension de la ligne inductrice	La rélation de calcul pour des impédances mutuelles	La categorie du couronnement
220 KV	$Z_{abc-1} = \frac{7{,}5.10^{-2}.f.\ (20{,}8h_0 + h_0^2)}{a\ (a^2 + 83\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	Le plan horizontal portail.
	$Z_{abc-1} = \frac{8{,}15.10^{-2}.f.\ (21{,}6\ h_0 + h_0^2)}{a\ (a^2 + 86\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	portail double circuit.
	$Z_{abc-1} = \frac{4{,}1.10^{-2}\ .f.\ (22{,}4\ h_0 + h_0^2)}{2\ a\ (a^2 + 89\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	couronnment type chat
	$Z_{abc-1} = \frac{7{,}9.10^{-2}\ .f.\ (23{,}6\ h_0 + h_0^2)}{2\ a\ (a^2 + 94\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	triangle équilatéral.
	$Z_{abc-1} = \frac{3{,}175.10^{-2}.f.\ (22{,}8\ h_0 + h_0^2)}{2\ a\ (a^2 + 91\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	double triangle.
400+500 KV	$Z_{abc-1} = \frac{(7—11).10^{-2}\ .f.\ (24\ h_0 + h_0^2)}{a\ (a^2 + 92\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	portail
	$Z_{abc-1} = \frac{(6{,}9—11{,}2)\ 10^{-2}\ .f.\ (25\ h_0 + h_0^2)}{2\ a\ (a^2 + 100\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	couronnment type chat
	$Z_{abc-1} = \frac{15{,}3\ f.\ 10^{-2}\ (27\ h_0 + h_0^2)}{2\ a\ (a^2 + 100\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	double circuit.
750 KV	$Z_{abc-1} = \frac{15.10^{-2}\ f.\ (30\ h_0 + h_0^2)}{a\ (a^2 + 120\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	portail filé.
	$Z_{abc-1} = \frac{15{,}6.10^{-2}\ f.\ (30\ h_0 + h_0^2)}{a\ (a^2 + 121\ h_0 + 4\ h_0^2)}$ [Ω/km]	portal non-filé

Pour les tensions inductrices (6 — 110) KV le calcul des impédances mutuelles-peut être trouvé dans la littérature. [7]. En ce qui concerne la détermination des coefficients numériques qui interviennent dans les relations tableau (B—1) on a tenu compte des types de poteaux utilisés et du couronnement sur les tracés des lignes électriques du pays et au delà des frontieres.

Les admittances mutuelles sont calculées à l'aide des modèles mathématiques présentés dans le tableau (*B*-2).

Les admitences mutuelles sont calculées à l'aide des modèès mathématiques présentés dans la tableau (B—2)

Tableau (B — 2)

La tension de ligne	Le courennement de la ligne inductrice	Circuits monofiliaires de telemunication	Circuits bifiliaires de telecommunication	
			sur traverse	sur supports courbes
220 kV	Portail circuit simple	$Y_{abc-I}=\frac{1{,}4.a.10^{-6}\,\omega}{(n+2)(a^2+255)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{3{,}3.10^{-6}(3\,a^2-225)\,\omega}{(n+2)\,(a^2+225)^3}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{1{,}4.10^{-6}\,\omega\,(a^3-112\,a)}{(n+2)(a^2+225)^3}$ [S/Km]
	Portail double circuit	$Y_{abc-I}=\frac{9{,}5.\,a\;10^{-6}\,\omega}{(n+2)(a^2+280)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{1{,}5.10^{-6}(3a^2-280)\,\omega}{(n+2)(a^2+280)^3}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{10.10^{-6}\,\omega.\,(a^3+137\,a)}{(n+2)(a^2+280)^3}$ [S/Km]
	Courennement type chat	$Y_{abc-I}=\frac{2{,}6.\,\omega.10^{-7}}{(n+2)(a^2+304)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{a.\,\omega.10^{-7}}{(n+2)(a^2+304)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{4{,}5.10^{-6}\,(a^3+232)\,\omega}{(n+2)(a^2+304)^2}$ [S/Km]
	Triangle equilateral	$Y_{abc-I}=\frac{1{,}9.10^{-7}.\omega}{(n+2)\,(a^2+340)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{7{,}25.10^{-8}\,\omega\,a}{(n+2)\,(a^2+340)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{1{,}4910^{-8}\,\omega\,(a^2+268)}{(n+2)\,(a^2+340)^2}$ [S/Km]
	Double triangle	$Y_{abc-I}=\frac{1{,}7.10^{-7}\,\omega}{(n+2)(a^2+318)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{6{,}65.\omega.a.10^{-8}}{(n+2)(a^2+318)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{1{,}65.\omega.10^{-8}\,(a^2+246)}{(n+2)\,(a^2+318)^2}$ [S/Km]
400 — 500 kV	Portail circuit simple	$Y_{abc-I}=\frac{2{,}3.10^{-7}\,a.\,\omega.}{(n+2)(a^2+340)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{4{,}5.\omega.10^{-7}(3\,a^2+340)}{(n+2)\,(a^2+340)^3}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II}=\frac{2{,}7.\omega.10^{-6}\,(a^2+188\,a)}{(n+2)\,(a^2+3\,40)^3}$ [S/Km]

(*Continue*)

La tension de ligne	Le courennement de la ligne inductrice	Circuits monofiliaires de telecommunication	Circuits bifiliaires de telecommunication	
			sur traverse	sur supports courbes
400 — 500 kV	Portail double circuit	$Y_{abc-I} = \frac{1{,}73.10^{-8}.\omega.\, a}{(n+2)(a^2+372)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{3{,}5.\omega.10^{-6}(3\,a^2 - 372)}{(n+2)(a^5+372)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{1{,}8.\omega.10^{-8}(a+300\,a)}{(n+2)(a^2+372)^2}$ [S/Km]
	Couronnment type chat	$Y_{abc-I} = \frac{3{,}5.\omega.10^{-7}}{(n+2)(a^2+450)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{7.10^{-8}.\omega.a}{(n+2)(a^2+450)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{2{,}9.10^{-8}(a^2+378)\,\omega}{(n+2)(a^2+450)^2}$ [S/Km]
	Triangle double	$Y_{abc-I} = \frac{3{,}61.\omega.10^{-7}}{(n+2)(a^2+450)}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{9.\omega.10^{-8}\,a}{(n+2)(a^2+450)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{1{,}6.\omega.10^{-8}(a^2+378)}{(n+2)(a^2+450)^2}$ [S/Km]
750 kV	Portail habitue	$Y_{abc-I} = \frac{4{,}7.\omega.a.10^{-5}}{(n+2)(a^2+640)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{4{,}3.\omega.10^{-6}(3a^2 - 640)}{(n+2)(a^2+640)^3}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{4{,}6.10^{-6}.\omega.(a^2+360)}{(n+2)(a^2+640)^3}$ [S/Km]
	Portail filé	$Y_{abc-I} = \frac{4{,}7.\omega.a.10^{-5}}{(n+2)(a^2+640)^2}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{10^{-5}.\omega.(3a^2 - 640)}{(n+2)(a^2+640)^3}$ [S/Km]	$Y_{abc-I-II} = \frac{4{,}9.10^{-6}.\omega.(a^2+560)}{(n+2)(a^2+640)^3}$ [S/Km]

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 5

TRANSPORTURI

C. Z.: 656.2:625.1/.2:656.04

STUDIUL SOLICITĂRII INTERSECȚIILOR DE CALE FERATĂ *

P. FRÎNCU, S. RAICU

1. Introducere

Obiectul acestui studiu îl constituie intersectarea la același nivel a parcursurilor de circulație ale trenurilor sau ale convoaielor din cadrul complexelor de cale ferată. Rezultatele se pot însă aplica și în cazul intersectării parcursurilor de manevră cu parcursuri de circulație sau a parcursurilor de manevră între ele și chiar în cazul intersectării parcursurilor diferitelor feluri de transport.

Rezolvarea intersectării parcursurilor la același nivel este soluția constructivă cea mai simplă, care necesită investiții minime dar care, de cele mai multe ori, devine un element limitativ pentru capacitatea distanțelor de circulație care se intersectează.

Volumul circulației pentru care este necesară intersectarea denivelată a parcursurilor este determinat, fie de considerente tehnice (capacitatea de tranzit a intersecției sau a distanțelor de circulație), fie de considerente economice (cheltuieli ocazionate de frînarea, demararea și reținerea trenurilor datorită ocupării intresecției cu circulația pe celelalte direcții de mers).

Evaluarea efectelor întretăierii la același nivel a parcursurilor asupra capacității de tranzit a intersecției și a distanțelor de circulație, cît și asupra cheltuielilor de exploatare, se face pe baza teoriei probabilităților, admițînd că circulația pe fiecare din linii este repartizată uniform în timp, iar momentul sosirii trenurilor de pe diferite direcții la intersecție nu este coordonat.

Literatura de specialitate (1), (2), (3) prezintă o serie de relații pentru calculul duratei probabile a reținerii trenurilor în cazul intersectării parcursurilor și pentru stabilirea solicitării intersecției. Aceste relații nu au în vedere caracterul circulației pe liniile de cale ferată care se întretaie, iar unele din relațiile pentru calculul duratei reținerilor, neținînd cont de elementele specifice ale intersecției, au o sferă restrînsă de aplicabilitate, de altfel neprecizată în lucrările amintite. De asemeni problema este abordată numai prin studierea succesivă a două cîte două dintre parcur-

* Manuscris predat la redacție la 10 ianuarie 1969.

surile care se intersectează, cu toate că, îndeosebi în cadrul complexelor feroviare, poate apărea intersectarea unui număr mai mare de parcursuri, ceea ce impune pentru obținerea de rezultate veridice, studiul simultan al tuturor parcursurilor în cauză.

Intenția de a încerca perfecționarea metodologiei actuale de calcul a solicitării intersecțiilor de cale ferată și de a extinde concluziile pentru intersectarea a mai mult de două parcursuri a fost aceea care a condus la materialul de față.

2. Interacțiunea parcursurilor incompatibile

2.1. *Parcursuri fără prioritate absolută*

Să examinăm cazul a două direcții de mers, 1 și 2, care se intersectează și pe care circulă trenuri ale căror parcursuri sînt fără prioritate absolută, adică parcursul este pregătit pentru trenul care se prezintă primul în fața semnalului care acoperă intersecția, indiferent de direcția de mers pe care circulă. În diagrama din fig. 1 s-a considerat că trenul *Tr.* 2 ocupă primul intersecția, iar *Tr.* 1, care ar ajunge în dreptul semnalului *SI* 1 simultan cu *Tr.* 2 în fața lui *SI* 2, va fi nevoit să frîneze, pe baza indicației semnalelor *SP* 1 și *SI* 1, așteptînd pentru a putea ataca intersecția ca ultima osie a trenului 2 să depășească joanta izolată *j* 2. După cum se vede din diagramă, *Tr* 1 nu se va opri în fața lui *SI* 1, ci numai își va reduce viteza de la v_1 la v_f. Pentru a se realiza această situație, trebuie să se îndeplinească condiția :

$$t_{f,1} - t_{p,1} \geqslant t_{s,2} \tag{1}$$

unde

$t_{f,1}$ este timpul necesar reducerii vitezei trenului *Tr* 1 de la v_1 pînă la zero ;

$t_{p,1}$ — timpul pentru parcurgerea de *Tr.* 1 a distanței l_p în cazul, deplasării uniforme cu v_1 ;

$t_{s,2}$ — timpul necesar parcurgerii lui l_s de către *Tr.* 2, care se deplasează uniform cu viteza v_2 (în valoarea lui $t_{s,2}$ nu s-a, inclus timpul pentru anularea parcursului pentru *Tr.* 2 și formarea celui corespunzător lui *Tr.* 1, considerînd că aceasta se realizează practic instantaneu o dată cu depășirea lui j_2 de către *Tr.* 2).

Din relația (1) rezultă :

$$l_s \leqslant l_p \frac{v_2}{v_1} \tag{2}$$

adică la realizarea acestei inegalități *Tr.* 1 își va reduce viteza numai pînă la v_f și nu pînă la zero.

Durata întîrzierii trenului *Tr.* 1, pentru poziția acestuia din fig. 1, datorită ocupării intersecției de către *Tr.* 2 este :

$$t_{i,1} = t'_{f,1} + t'_{d,1} \tag{3}$$

unde $t'_{f,1}$ și $t'_{d,1}$ reprezintă prelungirea timpului de mers al lui *Tr.* 1 datorită frînării de la v_1 la $v_{f,1}$, respectiv demarării de la $v_{f,1}$ la v_1, față de cazul cînd *Tr.* 1 ar parcurge uniform cu v_1 distanțele corespunzătoare.

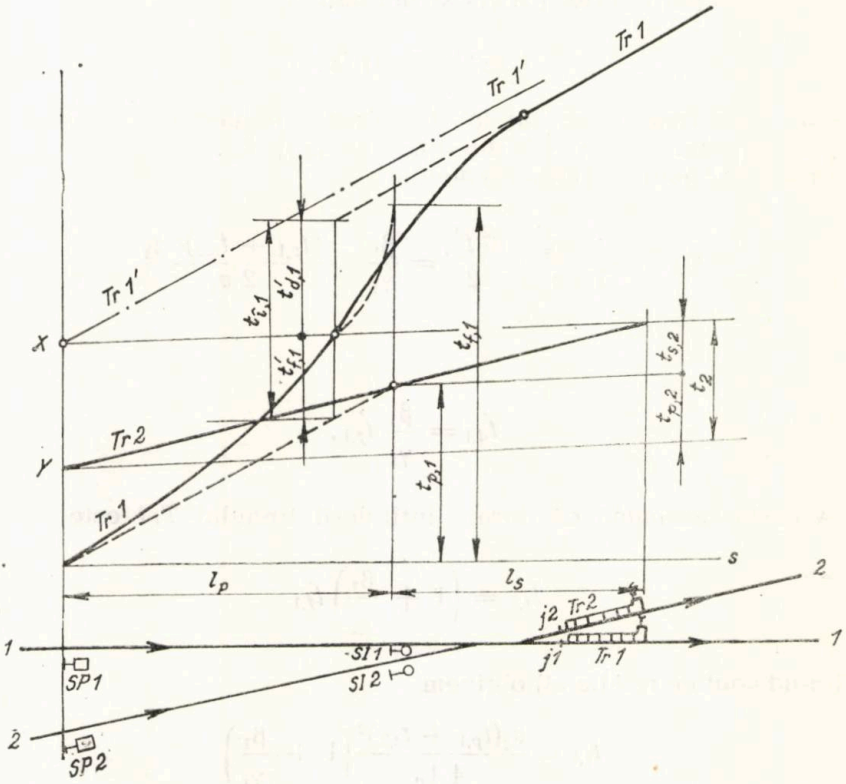


Fig. 1. Întîrzierea produsă trenului Tr1 de către Tr2, pentru $v_{1,f} \neq 0$

Considerînd că *Tr.* 1 frînează cu o decelerație constantă β_1 pe toată lungimea l_p, astfel încît să se asigure oprirea trenului în dreptul lui *SI* 1 obținem :

$$t'_{f,1} = \frac{\beta_1 (t_{p,1} + t_{s,2})^2}{2\, v_1}$$

sau înlocuind pe β_1 funcție de l_p și v_1 găsim

$$t'_{f,1} = \frac{v_1 (t_{p,1} + t_{s,2})^2}{4\, l_p} \tag{4}$$

Notînd cu γ_1 valoarea accelerației la demarare pentru trenul *Tr. 1*, reiese :

$$t'_{d,1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_1 t^2_{d,1}}{v_1} \tag{5}$$

unde $t_{d,1}$ este timpul necesar lui *Tr.1* pentru sporirea vitezei de la $v_{f,1}$ la v_1.

Pe de altă parte între β_1 și γ_1 există relația :

$$\beta_1 \cdot t_{f,1} = \gamma_1 \, t_{d,1}$$

unde $t_{f,1}$ este timpul necesar lui *Tr.1* pentru reducerea vitezei de la v_1 la $v_{f,1}$ egal, după cum se vede din fig. 1, cu $t_{p,1} + t_{s,2}$.

În aceste condiții relația (5) devine :

$$t'_{d,1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_1}{v_1} \cdot \frac{\beta_1^2 t^2_{f,1}}{2} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{(t_{p,1} + t_{s,2})^2 \beta_1}{2 v_1}$$

sau

$$t'_{d,1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} t'_{f,1} . \tag{6}$$

Aceasta înseamnă că durata întîrzierii trenului *Tr1* este

$$t_{i,1} = \left(1 + \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) t'_{f,1} \tag{7}$$

sau ținînd cont de relația (4) obținem

$$t_{i,1} = \frac{v_1 (t_{p,1} + t_{s,2})^2}{4 \, l_p} \left(1 + \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) \tag{8}$$

Dacă relația (2) nu este satisfăcută, înseamnă că $v_{f,1} = 0$, iar *Tr1* va avea o întîrziere datorită ocupării de către *Tr2* a intersecției (fig. 2) conform relației

$$t_{i,1} = t'_{f,1} + t_{st,1} + t'_{d,1} \tag{9}$$

sau înlocuind $t'_{f,1} + t_{st,1} = t_{s,2}$ și $t'_{d,1} = \frac{1}{2} \frac{v_1}{\gamma_1}$ obținem

$$t_{i,1} = \frac{l_s}{v_2} + \frac{l_{d,1}}{v_1} \tag{10}$$

unde $l_{d,1}$, spațiul parcurs de *Tr1* pentru accelerare de la $v_{f,1}=0$ pînă la v_1.

$$t_{p,1}+t_{s,2}=t_{f,1},\ \text{iar}\ t_{f,1}=\frac{2l_p}{v_1},$$

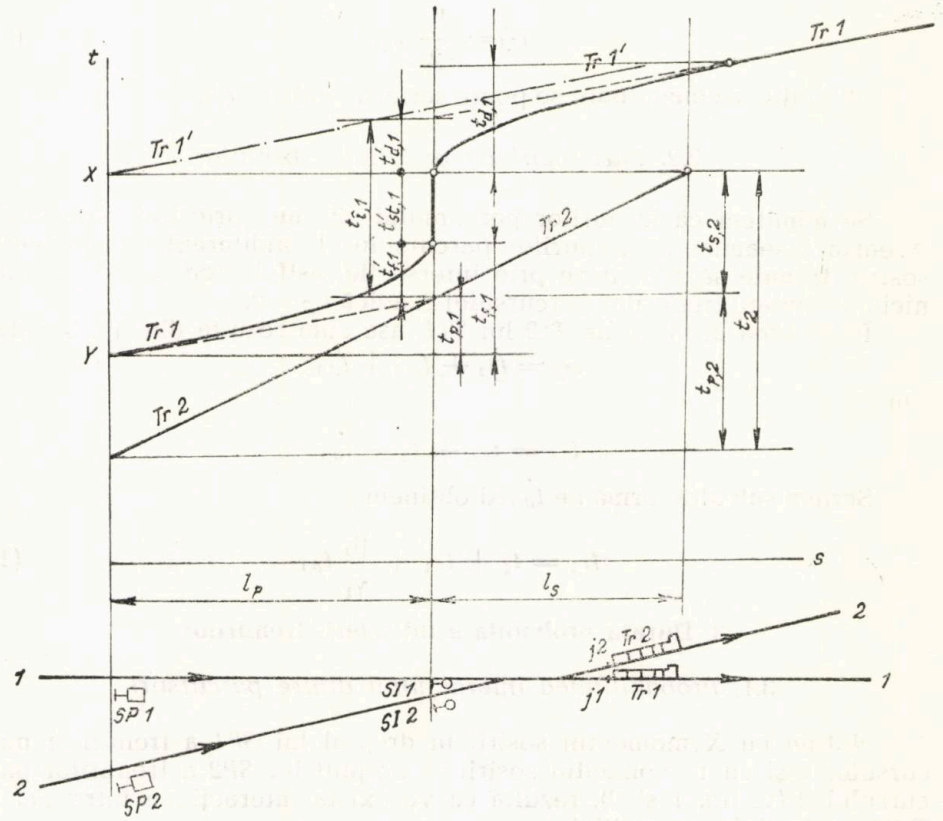


Fig. 2. Întîrzierea produsă trenului Tr1 de către Tr2 pentru $v_{1,f}=0$.

Observație. Pentru $v_{f,1}=0$ și $t_{st,1}=0$ trebuie ca relațiile (8) și (10) să conducă la același rezultat. Într-adevăr, în acest caz

astfel că relația (8) devine

$$t_{t,1}=\frac{v_1}{4l_p}\cdot\frac{4l_p^2}{v_1^2}\left(1+\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)=\frac{l_p}{v_1}\left(1+\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)$$

Totodată în relația (10) $\frac{l_s}{v_2}=t_{p,1}=\frac{1}{2}t_{f,1}$; $\frac{l_d}{v_1}=t'_{d,1}=\frac{1}{2}t_{d\,1}$ și $t_{d,1}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}t_{f,1}$, astfel că se poate scrie succesiv

$$t_{t,1}=\frac{1}{2}(t_{f,1}+t_{d,1})=\frac{1}{2}t_{f,1}\left(1+\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)=\frac{l_p}{v_1}\left(1+\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)$$

Din fig. 1 și 2 se vede că pentru diferitele poziții ale trasei trenului 1, cuprinse între *Tr1* și *Tr1'*, durata întîrzierii, produsă de ocuparea intersecției de *Tr2*, variază între $t_{i,1}$, calculat cu relația (8) sau (10) și zero. Considerînd liniară variația întîrzierii între *Tr.1* și *Tr.1'* se poate scrie că durata medie a întîrzierii trenului *Tr.1* este

$$t^m_{i,1} = \frac{1}{2}\, t_{i,1} \tag{11}$$

O relație asemănătoare se poate scrie și pentru *Tr.2*.

2.2. *Parcursuri cu prioritate absolută*

Să admitem că trenurilor parcursului 2 au prioritate absolută. Aceasta înseamnă că trenurilor parcursului 1, indiferent de momentul sosirii, trebuie să tranziteze prin intersecție, astfel încît să nu producă nici o întîrziere trenurilor parcursului 2, adică $t_{i,2} = 0$.

Întîrzierea produsă de *Tr2* lui *Tr1*, așa cum rezultă din fig. 3, este :

$$t_{i,1} = t'_{f,1} + t_{st,1} + t'_{d,1}$$

sau

$$t_{i,1} = t_{s,1} + t_2 + t'_{d,1}$$

Scriem sub altă formă pe $t'_{d,1}$ și obținem

$$t_{i,1} = t_2 + t_{s,1} + \frac{\beta_1}{\gamma_1}\, t_{p,1} \tag{12}$$

3. Durata probabilă a întîrzierii trenurilor

3.1. *Probabilitatea interacțiunii dintre parcursuri*

Notînd cu X momentul sosirii în dreptul lui *SP1* a trenurilor parcursului 1 și cu *Y* momentul sosirii în dreptul lui *SP2* a trenurilor parcursului 2 (v. fig. 1 și 2), rezultă că va exista interacțiune între *Tr1* și *Tr2* la îndeplinirea condiției

$$t_1 \leqslant X - Y \leqslant t_2 \tag{13}$$

Similar, durata întîrzierii trenului *Tr2*, datorită ocupării intersecției de *Tr1* este

$$t_{i,2} = \frac{v_2 (t_{p,2} + t_{s,1})^2}{4\, l_p} \left(1 + \frac{\beta_2}{\gamma_2}\right) \tag{8a}$$

dacă este saisfăcută relația

$$l_s \leqslant l_p \frac{v_1}{v_2}, \tag{2a}$$

respectiv

$$t_{i,2} = \frac{l_s}{v_1} + \frac{l_{d,2}}{v_2} \tag{10a}$$

dacă relația (2a) nu este îndeplinită.

Dacă $X \in (O, T)$ și $Y \in (O, T)$ atunci momentele X și Y care corespund interacțiunii între trenurile parcursului 1 și 2 se găsesc în suprafața haşurată de arie ω (fig. 4). (Avînd în vedere că procesul de circulație este ciclic s-a inclus în suprafața ω și suprafețele aOb și dOc).

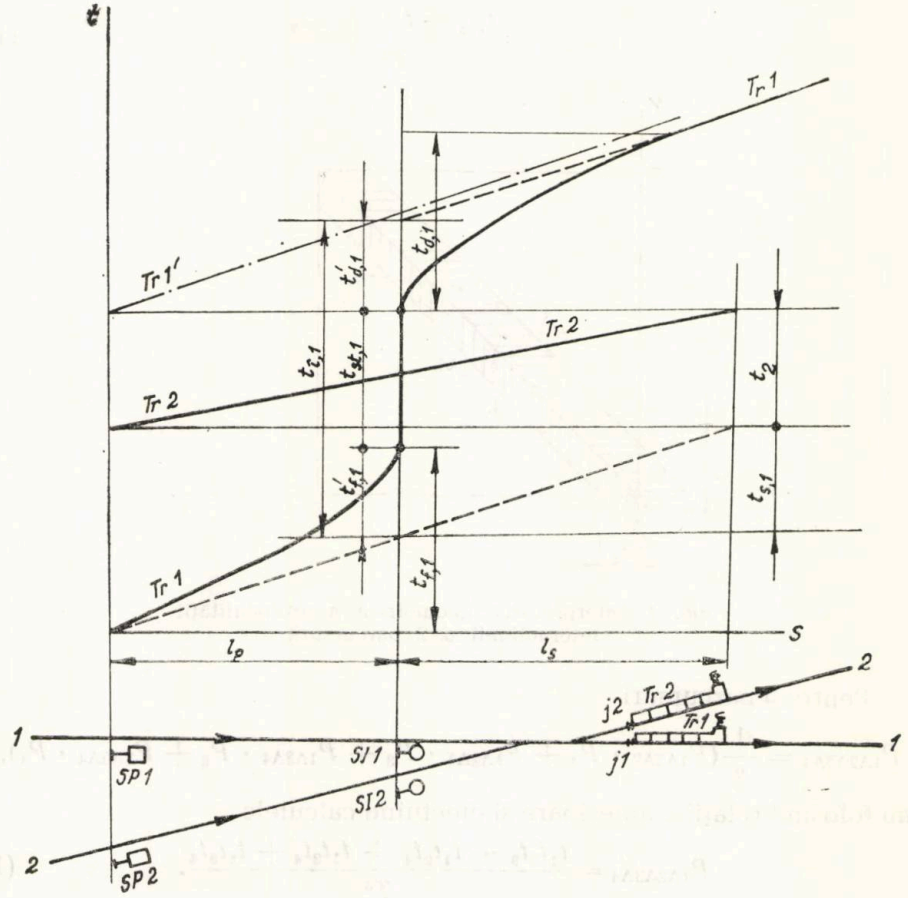


Fig. 3. Întîrzierea produsă trenului Tr1 de către Tr2, care are prioritate absolută

Probabilitatea interacțiunii dintre parcursurile 1 și 2, $P_{1\Lambda 2}$ este

$$P_{1\Lambda 2} = \frac{\omega}{T^2} = \frac{t_1 T + t_2 T}{T^2} = \frac{t_1 + t_2}{T}. \qquad (14)$$

În cazul a trei parcursuri care se intersectează, probabilitatea interacțiunii $P_{1\Lambda 2\Lambda 3}$, după cum se poate demonstra, se obține din relația

$$P_{1\Lambda 2\Lambda 3} = \frac{1}{2}(P_{1\Lambda 2} \cdot P_3 + P_{1\Lambda 3} \cdot P_2 + P_{2\Lambda 3} \cdot P_1),$$

în care probabilitatea interacţiunii a două parcursuri este cea dată de relaţia (14), iar probabilitatea ocupării unui parcurs (P_1, P_2, P_3) este exprimată ca raportul între durata ocupării parcursului (t_1, t_2, t_3) şi durata perioadei de referinţă (T).

Efectuînd calculele rezultă :

$$P_{1\wedge 2\wedge 3} = \frac{t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3}{T^2} \tag{15}$$

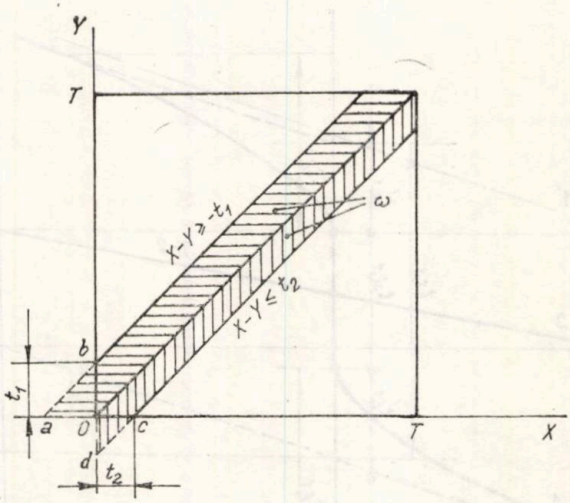


Fig. 4. Interpretarea geometrică a probabilităţii interacţiunii a 2 parcursuri.

Pentru 4 parcursuri

$$P_{1\wedge 2\wedge 3\wedge 4} = \frac{1}{3}(P_{1\wedge 2\wedge 3} \cdot P_4 + P_{1\wedge 2\wedge 4} \cdot P_3 + P_{1\wedge 3\wedge 4} \cdot P_2 + P_{2\wedge 3\wedge 4} \cdot P_1),$$

sau folosind relaţiile anterioare şi efectuînd calculele

$$P_{1\wedge 2\wedge 3\wedge 4} = \frac{t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4}{T^3}. \tag{16}$$

În cazul a n parcursuri care se intersectează

$$P_{1\wedge 2\wedge \ldots \wedge n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} t_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j}}{T^{n-1}} \tag{17}$$

3.2. *Numărul probabil de interacţiuni*

Numărul probabil de interacţiuni, R, este dat de produsul dintre numărul posibil de interacţiuni, N şi probabilitatea apariţiei unei interacţiuni, P, adică

$$R = N \cdot P. \tag{18}$$

Avînd în vedere că fiecare din trenurile care circulă pe unul din parcursuri poate influența circulația în zona intersecției a oricăruia dintre trenurile celorlalte direcții, se poate demonstra că

$$N = \prod_{i=1}^{n} N_i \tag{19}$$

unde N_i reprezintă numărul trenurilor care circulă pe fiecare din cele n parcursuri.

3.3. *Durata medie probabilă a unei întîrzieri*

În cazul intersectării a două parcursuri, dacă durata medie a unei întîrzieri pentru parcursul 1 este $t^m_{i,1}$ și $t^m_{i,2}$ pentru parcursul 2, iar probabilitățile corespunzătoare ale apariției acestor întîrzieri sînt P_2 și P_1 atunci, durata medie probabilă a unei întîrzieri $\tau_{i(1\Lambda 2)}$ este

$$\tau_{i(1\Lambda 2)} = \frac{1}{2} \frac{t^m_{i,1} \cdot P_2 + t^m_{i,2} P_1}{P_2 + P_1} = \frac{1}{2} \frac{t_{i,1} \cdot t_2 + t_{i,2} t_1}{t_2 + t_1} \tag{20}$$

Pentru intersecția a n parcursuri se obține relația

$$\tau_{i,n} = \frac{n}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i+1 \neq j}}^{n} \frac{t_{i,i}}{t_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j}} \tag{21}$$

3.4. *Durata totală a întîrzierilor*

Pe baza relațiilor (17), (18), (19) și (21) se poate scrie că durata medie probabilă a întîrzierilor în cazul solicitării simultane a intersecției de cîte unul din trenurile celor n parcursuri este

$$T_{i(1\Lambda 2\Lambda \ldots \Lambda n)} = R \cdot \tau_{i,n} = N \cdot \tau_{i,n} P_{1\Lambda 2\Lambda \ldots \Lambda n} \tag{22}$$

Făcînd înlocuirile obținem

$$T_{i(1\Lambda 2\Lambda \ldots \Lambda n)} = \frac{n}{4} \frac{\prod_{i=1}^{n} t_i \cdot \prod_{i=1}^{n} N_i}{T^{n-1}} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i+1 \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{t_{i,i}}{t_j} \tag{23}$$

Dacă se intersectează n parcursuri și toate sînt reciproc incompatibile, înseamnă că întîrzieri ale trenurilor vor apărea în cazul tuturor combinărilor posibile dintre parcursuri. Numărul acestor combinări, C, este dat de relația :

$$C = C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=2}^{n} C_n^k = 2^n - (n+1) \tag{24}$$

Pentru două parcursuri incompatibile, durata totală a întîrzierilor $T_i^{(2)}$, conform relațiilor (14), (19), (20) și (22) este

$$T_i^{(2)} = T_{i(1\Lambda 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t_{i,1}t_2 + t_{i,2}t_1}{t_1 + t_2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{T} N_1 N_2$$

adică

$$T_i^{(2)} = \frac{N_1 N_2}{2T} (t_{i,1}t_2 + t_{i,2}t_1). \tag{25}$$

Durata totală a întîrzierilor în cazul a trei parcursuri incompatibile $T_i^{(3)}$ este

$$T_i^{(3)} = T_{i(1\Lambda 2)} + T_{i(1\Lambda 3)} + T_{i(2\Lambda 3)} + T_{i(1\Lambda 2\Lambda 3)} \tag{26}$$

Fiecare din termenii acestei expresii se calculează pe baza relației (22) cu mențiunea că în locul probabilității totale a apariției interacțiunii dintre 2 parcursuri se introduce probabilitatea parțială, adică cea corespunzătoare realizării evenimentului numai în cazul acțiunii reciproce dintre 2 parcursuri, exceptînd probabilitatea apariției evenimentului, datorită interacțiunii dintre 3 parcursuri. Astfel, de exemplu :

$$T_{i(1\Lambda 2)} = P_{i(1\Lambda 2)} \cdot \tau_{i(1\Lambda 2)} \cdot N_1 N_2, \tag{27}$$

unde $P_{i(1\Lambda 2)}$ este probabilitatea parțială a realizării evenimentului $1 \Lambda 2$, respectiv

$$P_{i(1\Lambda 2)} = P_{1\Lambda 2} - P_{1\Lambda 2\Lambda 3} \tag{28}$$

Relații similare cu (26) se pot scrie și pentru 4 și mai multe parcursuri incompatibile. Numărul termenilor din aceste relații, este dat de (24). Probabilitățile parțiale se determină pe baza formulei lui Poincaré pentru calculul evenimentului sumă de evenimente compatibile și în număr finit [4].

4. Intervalul minim dintre trenuri și durata întîrzierilor

La stabilirea probabilității interacțiunii dintre parcursuri, s-a considerat că trenurile pe fiecare din liniile care intersectează pot sosi în orice moment. În realitate, există un interval minim, I, între sosirea succesivă a două trenuri, pe aceeași direcție de mers, cînd, în funcție de caracteristicile înzestrărilor tehnice ale distanței de circulație, nu este posibilă sosirea nici unui tren. Aceasta înseamnă că sosirea trenurilor către intersecție se poate realiza nu în întreaga perioadă T, ci într-o perioadă $T—NI$.

Interpretarea geometrică a probabilității interacțiunii dintre două parcursuri nu va mai corespunde celei din fig. 4. În acest caz, interpretarea geometrică este cea din fig. 5, unde s-a notat cu I_1 și I_2 intervalul minim în care nu pot sosi trenuri pe direcția 1, respectiv 2.

Probabilitatea realizării interacțiunii între parcursurile 1 și 2 este

$$P_{1\Lambda 2} = \frac{\omega}{\Omega}, \tag{29}$$

unde $\omega = \frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min})$, iar

$$\Omega = (T - N_1 I_1)(T - N_2 I_2). \tag{30}$$

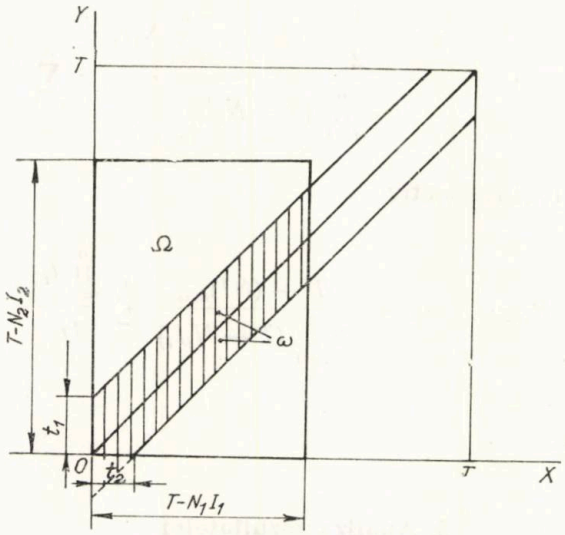


Fig. 5. Interpretarea geometrică a probabilității interacțiunii a 2 parcursuri, avînd în vedere intervalul minim dintre trenuri.

Variația ariei ω între ω_{max} și ω_{min} se datorește poziției reciproce în timp a intervalelor $N_1 I_1$ și $N_2 I_2$.

Să admitem că $N_1 I_1 \geqslant N_2 I_2$. La existența relației de incluziune $N_2 I_2 \subset N_1 I_1$ corespunde

$$\omega_{max} = (t_1 + t_2)(T - N_1 I_1), \tag{31}$$

iar pentru $N_2 I_2 \wedge N_1 I_1 = \emptyset$ (adică mulțimile sînt disjuncte; $\emptyset$ — fiind mulțimea vidă), corespunde

$$\omega_{min} = (t_1 + t_2)(T - N_1 I_1 - N_2 I_2) \tag{32}$$

Făcînd înlocuirile obținem

$$P_{1\Lambda 2} = \frac{(t_1 + t_2)\left(T - N_1 I_1 - \frac{1}{2} N_2 I_2\right)}{(T - N_1 I_1)(T - N_2 I_2)}. \tag{33}$$

Relația (33) este valabilă pentru $N_1 I_1 + N_2 I_2 \leqslant T$.

Dacă $N_1I_1 + N_2I_2 \geqslant T$, atunci $\omega_{min} = 0$, iar relația de calcul aprobabilității devine

$$P_{1\Lambda 2} = \frac{(t_1 + t_2)(T - N_1I_1)}{2(T - N_1I_1)(T - N_2I_2)} = \frac{t_1 + t_2}{2(T - N_2I_2)}. \tag{34}$$

Generalizînd relațiile (33) și (34) pentru cazul n parcursuri incompatibile, obținem

$$P_{1\Lambda 2\Lambda \ldots \Lambda n} = \frac{T - \frac{1}{2}(NI)_{max} + \sum_{i=1}^{n} N_iI_i}{\prod_{i=1}^{n}(T - N_iI_i)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n} t_i}{t_j} \tag{35}$$

dacă $\sum_{i=1}^{n} N_iI_i \leqslant T$, și respectiv

$$P_{1\Lambda 2\Lambda \ldots \Lambda n} = \frac{T - (NI)_{max}}{2\prod_{i=1}^{n}(T - N_iI_i)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n} t_i}{t_j} \tag{36}$$

dacă $\sum_{i=1}^{n} N_iI_i \geqslant T$.

5. **Analiza rezultatelor**

Lucrările de specialitate [1], [2], prezintă în cazul intersecției a 2 parcursuri pentru durata reținerii trenurilor relația :

$$T_i^{(2)} = \frac{N_1N_2}{2T}(t_1^2 + t_2^2) \tag{37}$$

În materialul de față s-a ajuns pentru acest caz la relația (25), în care $t_{i,1}$ și $t_{i,2}$ se calculează cu relația (8), respectiv (8 a) dacă relația (2), respectiv (2 a) este îndeplinită și cu (10) respectiv (10 a) în caz contrar.

Să admitem pentru analiză că $v_1 = v_2 = v$, $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2$, ceea ce înseamnă că $t_1 = t_2 = t$.

După cum se vede pentru $\frac{l_s}{l_p} = \alpha \geqslant 1$, rezultă $t_{i,1} = t$ și $t_{i,2} = t$, iar relațiile (25) și (37) sînt identice.

Dacă $\alpha < 1$, atunci $t_{i,1}$ și $t_{i,2}$ se calculează cu (8) respectiv (8 a) astfel că relația (26) devine :

$$T_i^{(2)} = \frac{N_1N_2}{T} \frac{vt^3}{2\,l_p}. \tag{26 a}$$

Notînd cu ε raportul dintre $T_i^{(2)}$ dat de relația (37) în care facem $t_1 = t_2 = t$ și $T_i^{(2)}$ dat de relația (26 a) găsim

$$\varepsilon = \frac{2}{1+\alpha} \tag{38}$$

Pentru diferite valori $\alpha \leqslant 1$ se observă că relația (37) conduce la valori ale duratei întîrzierilor mai mari ca cele reale. Eroarea este mai mare pentru valorile mai mici ale lui α, ceea ce corespunde în practică, îndeosebi, cazului trenurilor de lungime mică și viteză mare.

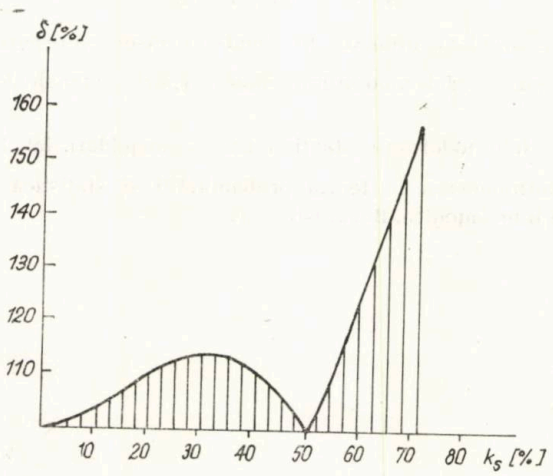


Fig. 6. Variația $\delta = f(K_s)$

Notînd cu K_s coeficientul de folosire a capacității de circulație a liniilor care se intersectează și cu δ raportul dintre durata reținerii trenurilor în caz că ținem cont de intervalul minim dintre trenuri și în caz că nu ținem cont, în baza relațiilor anterioare (14), (33) și (34) obținem

$$\delta = \frac{\left(1 - \frac{3}{2}K_s\right)}{(1-K_s)^2} \tag{39}$$

care se poate aplica pentru $K_s \leqslant \frac{1}{2}$, $\left(K_s = \frac{N_1 I_1}{T} = \frac{N_2 N_2}{T}\right)$, și respectiv

$$\delta = \frac{1}{2(1-\alpha)} \tag{40}$$

pentru $K_s \geqslant \frac{1}{2}$.

Din figura 6 rezultă că durata întîrzierii trenurilor datorită intersectării parcursurilor, dacă coeficientul de folosire a capacității de circulație a liniilor care se intersectează nu depășește 55...60 se poate calcula fără a ține seama de intervalul minim dintre trenuri, eroarea nedepășind circa 12%.

Catedra de tehnica transporturilor feroviare
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Potthoff, G.* — Nichtschlangentheorie. In: Deutsche Eisenbantechnik, nr. 9, 1962.
2. *Savcenco ,I. E. ș.a.* — Jeleznodorojnîe stanții i uzlî. Transjeldorizdat, Moscova, 1962.
3. *Stanghe, B. D.* — Jeleznodorojnîe stanții i uzlî. Transjeldorizdat, Moscova, 1962.
4. *Mihaila, N.* — Introducerea în teoria probabilității și statistică matematică. Editura didactică ii pedagogică, București, 1965.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KOZPONT 1883

Întreprinderea Poligrafică „Grafica Nouă" II Buc. — c. 11106

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1970 JUN 16

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI"
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXI NUMĂRUL 6 ANUL 1969
NOIEMBRIE—DECEMBRIE

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA 1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXI — NUMĂRUL 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE

1969

COMITETUL DE REDACȚIE

Conf. dr. ing. *Petru Baltă* ; Academician prof. *Marin Bercovici* ; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* ; Conf. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua* ; Conf. dr. *Ion Grădișteanu* ; Conf. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific) ; Prof. *Constantin Ionescu-Bujor*, Profesor emerit ; Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu* ; Prof. ing. *Ștefan Mantea* ; Prof. dr. ing. *Marius Preda* ; Prof. ing. *Mihai Renert* ; Conf. *Mircea Soare* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. docent *Radu Voinea* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

Redactor responsabil:

Rector

Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

D. V. Ionescu

Une identité et la représentation intégrale d'un certain opérateur linéaire 21

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

Th. Bădescu, L. Papahagi

Cu privire la unele aspecte ale echilibrului cerneală-apă în procesul de imprimare offset cu plăci bimetalice cupru-crom 37

Gh. Constantinescu

Über die technische Humifizierung von Einjahrpflanzen 47

MECANICA

C. Guță

Încălzirea și suprasarcinile ce apar pe rachete sau nave cosmice la reintrarea în atmosferă 59

ORGANE DE MAȘINI

Gh. Manea, M. Pascovici

Influența adausurilor ameliorative în bucșele din material plastic asupra cîmpului de temperatură în filmul de lubrifiant 69

H. Segal

Anwendung der elektrischen Analogie zur Bestimmung der dynamischen Kräfte beim Anlauf eines Fördergurtes 83

REȚELE ELECTRICE

I. Iordănescu, Gh. Iacobescu

Șocurile de putere produse de consumatorii industriali și măsuri de reducere a efectelor lor 101

MAȘINI UNELTE

A. Oprean, I. Gheghea, N. Stan, I. Măsălar

Studiul pierderilor volumice din pompele cu pistoane axiale cu distribuție sferică 113

METALURGIE

Iosif Tripșa

Studiul efectelor electrocapilarității asupra proceselor de elaborare a oțelului și asupra purității acestuia 125

ELECTRONICA

P. Postelnicu

Sensul și generalitatea conexiunii inverse în rețelele electrice . . 133

Резюме

Д. В. Ионеску

Д. К. 517.9

Идентичность и интегральное воспроизведение некоторого линейного оператора.

Принимая узлы арифметической прогрессии и обозначая через $\Delta^{2p} f_i$ разность $2p$ степени функции f на узлы $x_1 \ldots x_2 + 2p$, определяются коэффициенты $\lambda_i (i = 0 \ldots n - 2p)$ так, чтобы получилась идентичность.

$$L^n_{p[f]} = \sum_0^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i,$$

где $L_p^{(n)}[f]$ линейный оператор. В заключение даются несколько применений, определяя интеграл принятого оператора.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Т. Бэдеску, Л. Папахаджи

Д. К. 655

О некоторых аспектах равновесия чернила-вода в процессе офсетного печатания с биметаллическимн пластинками медь-хром.

Определениями, связанными с явлениями смачивания и механической работой адгезии на поверхности раздела связывающего вещества-металл, преследовалось интерпретирование влияния факторов, участвующих при установлении равновесия двух жидких фаз при процессе печатания с биметаллическими офсетными пластинками.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Г. Константинеску

Д. К. 551.571.63

Химическая гумификация годовых растений.

В настоящей работе исследуется новый метод химического превращенея соломы в ионное удобрение или в минерально-органические комплексы.

Были исследованы влияние концентрации гидродизирующего агента, температуры реакции, влияние, нейтраливации гидролизатов с основаниями, а также эффект термического разложения в кислой или нейтральной среде на качество продуктов. Устанавливаются наивыгоднейшие условия работы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Summary

D. V. Ionescu

D.C. 517.9

An Identity and the Integral Representation of a Linear Operator.

Taking into account the knots in arithmetical progression and putting down by $\Delta^{2p} fi$ the 2 p order difference of the f function on the $x_1 \ldots x_2 + 2p$ knots, the coefficients $\lambda_i (i = 0 \ldots n - 2p)$ must be deteremined to get the identity :

$$L^n_{p[f]} = \sum_0^{n-2p} \lambda_i \, \Delta^{2p} fi$$

where $L^{(u)}_p [f]$ is a linear operator. As a conclusion in the paper, we find some applications setting down the respective opertor integral.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Th. Bădescu, L. Papahagi

D.C. 655

Concerning Certain Aspects of the Ink-and-water Equilibrium within the Offset Printing Process by Means of Copper-and-chrome Bimetal Plates.

By determinations concerned with the phenomena of moistening and of the mechanical work of adhesion at the matter-and-metal interface, the authors in found out the interpretation of the influence of certain factors participating at the establishing the equilibrium between the two fluid phases within the printing process by means of bimetal offset plates.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. C. Constantinescu

D.C. 551.571 : 63

Thechnical Moistening of the Annual Plants.

Within this work is examined a new chemical transformation method of the straws into ionic or organic-and-mineral complex fertilizers. The influence of the Hydrolizing agent concentration, of the reaction temperature, of the hydrolisates neutralizing, by means of bases, as well, as the effect of a thermal destruction in acid or neutral environment upon tje product quality, are studied. The most favourable working conditions are established.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

К. Гуцэ

Д. К. 629,19

Нагрев и перегрузки, появляющиеся на ракетах и космических кораблях, проникающих в верхние слои атмосферы.

Определение степени нагрева поверхности, а также коэффициента перегрузки, соответствующих некоторым методам управления, является значительным этапом в обеспечении безопасности полета.

В настоящей работе формулы /20/, /31/, /29/, и /44/ указывают на их максимальную величину и расчитываются по конкретным значениям соответствующих параметров.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Г. Манеа, М. Паскович.

Д. К. 621.81 : 678

Влияние улучщающих прибавок в полиамидических втулках на поле температуры в смазочном фильме.

В продолжении некоторых предыдущих исследований об эффекте улучщающих прибавок на несущие способности исследовались изменения, действующие на способ изменения температуры в смазочном фильме на окружность цапфы, по сравнению с простыми полиамидическими втулками, местного происхождения, учитывая геометрические и функциональные параметры.

Полученные резуьтаты выявляют улучщения как в отнощении максимальной температуры по достижению стационарного режима, так и пика температуры, достигнутой переходном режиме.

Хорошим качестненным совпадением распределения измеренных температур с распределениями выведеными другими исследователями в теоретических исследованиях, связаных с теплопередачей в подшипниках, подверждает правильность результатов настоящего изучения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Х. Сегал

Д. К. 621.86 : 87

Применение электрических аналогий при определении динамических сил ленточых транспортеров во время пуска.

При пуске ленточного транспортера происходят продольные амортизированные вибрации, которые могут быть выражены системой дифференциальных уравненений, структура которых аналогична дифференциальным уравнениям системы электрических цепей. В работе показывается, как можно определить максимальную силу ленты во время пуска при помощи указанной аналогии, используя векторно-графический метод, применяемый в электротехнике для переменных токов, Сравниваются полученные этим путем результаты с результатами, полученными при непосредственном измерении лент во время их работы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

C. Guță

D.C. 629.19

Heating and Overloads Appearing on Rockets or Spaceships at re-entry into the Atmosphere.

The determination of the surfaceheating rate, as well as of the load factor corresponding to certain control methods, is a most important moment for the ensuring of the flight safety. Within this work, the formulae (20), (31), (29) and (44) indicate their maximum value, which is calculated by means of the particulars of their parameters.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. Manea, M. Pascovici

D.C. 621.81 : 678

The Influence of Plastic Bushing Improving Additions of the Temperature Film Field.

Continuing a previous investigation on the effect of improving additions on service capacity, the possible temperature changes of the lubrifiant film throughout the journal circumference have been studied in comparison with the case of the simple (native) polyamide bushings, vaving taken into account the geometric and functional parameters.

Improvements have been noticed both regarding the maximum temperature after having reached the stationary regime and the peak temperature reached in the transition period.

By the notable qualitative concurrence of the temperature distributions measured and those deduced by ohter investigators in their theoretical studies on the heat transfer in bearings, the validity of the present study is confirmed.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

H. Segal

D.C. 621.86/.87

Application of the Electric Analogies at the Determination of the Dynamic Forces within the Belt Conveyors during the Starting Period.

When starting a belt-conveyor there are generated damped longitudinal vibrations, which may be expressed by means of a differential equation system, the structures of which are analogous to the structure of the differential equations of an electric circuit system. It is shown how the maximum force within the belt during the starting period may be determined by applying this analogy, using the graphic-vectorial method applied in the electrotechnics for the alternating currents. The results obtained in this way are compared to those obtained by measuring directly the operating belts.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

И, Иордэнеску. Г. Якобеску

Д. К. 621.3.016.4

Мощностные удары, производимые промышленными потребителями и меры уменьшения их эффектов.

В данной работе анализируются характеристики кривых потребления активной и реактивной мощности, потребителей, которые производят удары реактивной мощности, и их влияние на других потребителей.

В работе также рассматриваются меры, которые могут быть приняты в целях уменьшения отрицательных последствий в системе (изменения напряжения) до допускаемых значениях.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

А. Опреан и сотрудники

Д. К. 621.65

Исследование объемных потерь в аксиально-плунжерных насосах со сферическим распределением.

Настоящая работа предназначена для теоретического и экспернментального определения объемных потерь гидростатических насосов с аксиальным расположеннем плунжеров, имеющих сферическое распределение, используя уравнения движения и непрерывности динамики вязких жидкостей.

В данной работе употребляется оригинальный метод определения обьемных потерь через конические н сферические щели по двум направлениям движения.

Правильность математического расчета подтверждается экспериментальным исследованием в лаборатории.

Теоретическое и экспериментальное изучение, а также полученные результаты показывают, что эти насосы могут быть успешно использованы и для гидропривода металлорежущих станков.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Iordănescu, Gh. Iacobescu

D.C. 621.3.016.4

Power Shocks Caused by the Industrial Consumers and Steps for the Decreasing of Their Effects.

Within the work are examined the characteristics of the active and reactive power consumption curves of the consumers which cause reactive power shocks, as well as their influence upon the other consumers.

Further, are shown the steps which may be taken in order to decrease the consequences upon the system (voltage variations) to permissible limits.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

A. Oprean and others

D.C. 621.65

Study of Volumetric Losses from Pumps with Small Axial Plungers with Spherical Distribution.

The object of this work is the theoretical and experimental determination of the volumetric losses from pumps with small axial plugers with spherical distribution, by using the movement and continuity equations of the viscous fluid dynamics.

Within the work is used an original method for the determination of the losses across conical and spherical slits, in two flowing directions. The validity of the mathematical calculations of the volumetric losses is confirmed by experimental tests.

The theoretical and experimental study of these pumps, as well as the results obtained, show that they may be successfully used also within the hydraulic control systems of machine tools.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

И. Трипша

Д. К. 669.184.1: 621.359

Исследование действия электрокапиллярности на процессы выплавки стали и на ее чистоту.

Развивая предположение. что электрокапиллярные явления проявляются на интерфазовой поверхности шлак-металлическая ванна и в случае прикладывания снаружи на систему электрического трехфазного переменного напряжения как в дуговых электрических печах, используемых при выплавке стали /3/, на электролитической модели изучено образование и распространение волнообразных движений, производимых изменением межфазового напряжения при помощи осциллографии и киннематографии с повышенной скоростью.

Подчеркивается значение этого явления для процессов выплавки стали в электрических печах, обращая особое внимание на благоприятное воздействие его на удаление неметаллических включений. С этой целью исследуется на электролитической модели интенсификация удаления неметаллитических включений ипредлагаются новые методы для повышения чистоты стали, действенность которых утверждена экспериментально.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

П. Постелнику

Д. К. 621.391

Направление и общность обратной связи в электрических цепях.

Определяя обратную связь как замкнутую цепь причинности, отмечается, прежде всего, универсальный характер этого фактора в стационарных, эволютивных и саморазвивающихся процессах.

В линейных электрических цепях обратная связь выявляется с помощью диаграмм (графов), в которых появляются замкнутые цепи, соответствующие либо обратной связи, цепи, либо связи между напряжением и током из-за реактивных элементов Л, С. Подчеркивается характер переходных процессов, интерпретируемый с помощью представлецияуоб обратной связи для синтетической интерпретациии важных формул по теории пассивных и активных цепей.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Tripşa

D.C. 669.184.1 : 621.359

Study of the Electrocapillarity Effect upon the Steel-making Processes and upon Steels Cleaness.

Developing the assumption that the electrocapillarity phenomena occur on the interphase surface slag-and-metallic bath also in the event of applying from outside upon the system, an electric alternating and three-phase voltage as in the electric arc furnaces used for steel-making the forming and propagation of the ondulations caused by the inter-phase stress variation by means of the high-speed shooting and of the oscillography, was studied on an electrolytic model.

The importance of this phenomenon for the steel-making processes within the electric furnaces is pointed-out, as well as the positive effect it has for the elimination of the non-metallic inclusions. Accordingly intensification of the non-metallic inclusion elimination was studied on the electrolytic model, and new methods were suggested for the improvement of the steel purity, their efficiency being experimentally confirmed.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

P. Postelnicu

D.C. 621.391

Sense and Generality of the Feedback within the Electric Networks.

By defining the feedback as a closed causal chain, the universal character of this factor within the stationary, evolutive and self — developing processes, is first of all pointed-out.

In the case of linear electric networks, the feedback is evidenced by means of the signal flow graphs în which appear closed ways (loops), corresponding either to feedback loops within the network, or to reactions between voltages and currents owing to the reactive elements L, C. The character of the transient phenomena is underlined, being interpreted by means of the feedback. The utility of this concept for a synthetic interpretation of certain important formulae within the passive and active network theory is pointed out.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Résumé

D. V. Ionescu

C.D. 517.9

Un identité et la représentation intégrale d'un certain opérateur linéaire.

En considérant les noeuds en progression arithmétique et en désignant par $\Delta^{2p} fi$ la différence d'ordre 2 p de la fonction f sur les noeuds $x_1 \ldots x + 2p$, on détermine les coefficients $\lambda_i (i = 0 \ldots n - 2)$, afin d'avoir l'identité :

$$L^n_{p[f]} = \sum_0^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} fi$$

où $L_p^{(n)}[f]$ est un opérateur linéaire. Pour conclure on établit la représentation intégrale du dit opérateur et on donne quelques applications.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Th. Bădescu, L. Papahagi

C.D. 655

Certains aspects de l'équilibre encre-eau dans le processus d'imprimerie offset à l'aide des plaques bimétalliques cuivre-chrome.

Par des déterminations concernant les phénomènes d'humidification et de travail mécanique d'adhésion sur l'interface liant-métal, on a poursuivi l'interprétation de l'influence de certains facteurs qui participent à l'établissement de l'équilibre des deux phases liquides dans la processus d'imprimerie à l'aide des plaques bimétalliques offset.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. C. Constantinescu

C.D. 551.571 : 63

Humification technique des plantes anuelles.

Cette étude ci examine une nouvelle méthode pour la transformation chimique des pailles en engrais ioniques ou complexes organo-minéraux. On étudie l'influence de la concentration de l'agent hydrolysant, de la température de réaction, de la neutralisation des hydrolysats à l'aide des bases, ainsi que l'effet d'une destruction thermique en milieu acide ou neutre sur la qualité des produits. On établit les conditions de travail les plus favorables.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Zusammenfassung

D. V. Ionescu

D.K. 517.9.

Identität und Integral darstellung eines beliebigen linearen Operators.

Indem die Knoten in arithmetischer Reihe angenommen werden und mit $\Delta^{2p} fi$ die Differenz der Ordnung 2 p der Funktion f in den Knotenpunkten $x_1 \ldots x_2 + 2p$ bezeichnet wird, werden die Koeffizienten λ_i $(i = 0 \ldots n - 2p)$ abgeleitet, damit die Identität

$$L^n_{p[f]} = \sum_{0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} fi$$

existiert, wobei $L_p^{(n)}[f]$ einen linearen Operator darstellt. Als Schluss folgerung werden für einige Beispiele die Integrale des untersuchten Operators abgeleitet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Th. Bădescu, L. Papahagi

D.K. 655

Über einige Gesichtspunkte des Gleichgewichts Tinte-Wasser in dem Offset-Druckverfahren mit Kupfer-Chrom-Bimetallplatten.

Durch Bestimmungen, die an die Befeuchtungsphänomene und die mechanische Arbeit für die Haftung an die Zwischenfläche Bindemittel-Metall gebunden sind, wurde die Auslegung des Einflusses der Faktoren verfolgt, die bei Bestimmung des Gleichgewichts der zwei flüssigen Phasen in dem Druckverfahren mit Offset-Bimetallplatten, mitwirken.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. C. Constantinescu

D.K. 551.571 : 63

Uber die technische Humifizierung von Einjahrpflanzen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Bedingungen studiert, die für eine neue Methode der Strohbehandlung zum Zwecke der Herstellung von Nährstoffträgern bedeutsam sein können. Es wurde die Konzentration des Hydrolyseagens, die Hydrolysetemperatur, der Einfluß einer Neutralisation der Strohhydrolysaten mit Ammoniumhydroxyd und den Wirkung einer thermischen Behandlung im sauren oder neutralen Milieu auf die Eigenschaften der Produkten untersucht. Es werden die besten Aufbereitungsbedingungen festgestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

C. Guță

C.D. 629.19

Chauffage et surcharges surgissant sur les fusées ou les vaisseaux cosmiques lors de leur réintégraton dans l'atmosphère.

La détermination du degré de chauffage des surfaces ainsi que du facteur de charge correspondant à certaines méthodes de contrôle, est un moment trés important afin d'assurer la sécurité du vol. Dans cette l'étude ci, les formules (20), (31), (29) et (44) indiquent la valeur maxima de celles-ci, par la particularisation de leurs paramètres.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. Manea, M. Pascovici

C.D. 621.81 : 678

L'influence des additifs amélioratifs des coussinets eu plastique sur le champs de température de la pellicule de lubrifiant des paliers radiaux.

Tout en continuant les recherches antérieures sur l'influence favorable de l'addition de M_0S_2 et de graphite sur la capacité portante des coussinets en plastique (polyamide), on étudie comparativement la modification du champ de température dans la pellicule de lubrifiant, des coussinets de polyamide ayant ou non de tels additifs.

On constate une amélioration en ce qui concerne la niveau maximum de la température pendant le fonctionnement en régime et, en même temps, le régime transitoire pendant l'angrenation de la charge.

On constate une concordance satisfaisante entre les résultats ainsi obtenus par voie experimentelle, et les témperatures calculées par d'autres auteurs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

H. Segal

C.D. 621.86 : 87

Application des analogies électriques à la détermination des forces dynamiques des transporteurs à bande pendant la période de démarrage.

Au démarrage d'un transporteur à bande se produisent des vibrations longitudinales amorties, qui peuvent être exprimées par un système d'équations différentielles, dont la structure est analogue à celle des équations différentielles d'un système de circuits électriques. On démontre la possibilité de détermination de la force maxima dans la bande pendant la période de démarrage par l'application de cette analogie, en utilisant la métohde graphique-vectorielle appliquée dans l'électrotechique pour les courants alternatifs. On compare les résultats obtenus par cette méthode à ceux obtenus par la mesur directe sur les bandes en fonction.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

C. Guță

D.K. 629.19

Die Erhitzung und die Überbelastungen die auf dien Raketen oder Raumschiffen beim Wiedereindringen in die Atmosphäre auftreten.

Die Bestimmung des Erhitzungsgrades der Oberflächen und des Leistungfaktors entsprechend gegebenen Lenkdaten ist ein Zeitpunkt von grösster Wichtigkeit in der Sicherung der Flugsicherheit. In vorliegender Arbeit geben die Formeln (20), (31), (29) und (44) den Maximalwert derselben an, der durch Partikularisierung der sie bildenden Einflussgrössen berechnet wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

Gh. Manea, M. Pascovici

D.K. 621.81 : 678

Der Einfluss der verbessernden Zusätze in Plastmass-Büchsen über das Temperaturfeld im Oelfilm des Radiallagers.

Im Anschluss an vorhergehenden eigenen Forschungen über den günstigen Einfluss der Molibdendisulfid- und Graphit Zusätze auf die Tragfähigkeit der Kunstoff Büchsen, wurde die Änderung des Temperaturfeldes im Oelfilm în der Umfangsrichtung des Zapfens, im Vergleich mit Polyamid-Büchsen **ohne** Zusätze, bei verschiedenen geometrischen und funktionellen Bedingungen, untersucht.

Es traten dabei Verbesserungen în Erscheinung, in Bezug der höchsteintretende Temperatur sowohl im Beharrungszustand, als auch in der Ubersgangszeit von einer Laststufe zu einer anderen.

Die Ergebnisse zeigen eine gute Ubereinstimmung der gemessenen Werte, mit dem von anderen Forschern auf analytischem Wege festgestellten Temperaturverlauf.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

H. Segal

D.K. 621.86 : 87

Anwendung der elektrischen Analogie zur Bestimmung der dynamischen Kräfte beim Anlauf eines Fördelgurtes.

Beim Anlauf eines Fördelgurtes entstehen gedämpfte Längsschwingungen, welche durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben werden können, deren Aufbau analog den Differentialgleichungen eines elektrischen Gebildes ist. Es wird gezeigt, wie der Scheitelwert der Gurtkraft beim Anlauf, mit Hilfe dieser Analogie, durch Anwendung des in der Wechselstromtechnik üblichen graphischvektoriellen Verfahrens ermittelt werden kann. Es folgt ein Vergleich mit dem Ergebnis von Messungen, die an in Betrieb befindlichen Fördergurten angestellt wurden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Iordănescu, Gh. Iacobescu

C.D. 621.3.016.4

Chocs de puissance produits par les consommateurs industriels et mesures pour la diminution de leurs effets.

L'étude examine les caractéristiques des courbes de consommation de puissance active et réactive des consommateurs qui produisent des chocs de puissance réactive, ainsi que leur influence sur les autres consommateurs.

On y présente aussi les mesures possibles pour la diminution des conséquences exercées sur le système (variations de la tension), jusqu'à des valeurs admissibles.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

A. Oprean et collaborateurs

C.D. 621.65

Étude des pertes volumiques des pompes à petits pistons axiaux à distribution sphérique.

L'objet de cette étude est la détermination théorique et expérimentale des pertes volumiques des pompes à petits pistons axiaux à distribution sphérique, à l'aide des équations du mouvement et de la continuité de la dynamique des liquides visqueux.

Dans cette étude on utilise une méthode originale pour la détermination des pertes par des fentes coniques et sphériques, suivant deux directions d'écoulment. La validité des calculs mathématiques des pertes volumiques est confirmée par les éssais.

L'étude théorique et expérimentale de ces pompes, ainsi que les résultats obtenus, démontrent qu'elles peuvent être utilisées avec succès pour les systémes de commande hydraulique des machines-outils.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Iordănescu, Gh. Iacobescu

D.K. 621.3.016.4

Leistungsstösse der Industrieverbraucher und Massnahmen zur Herabsetzung deren Wirkung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Verbrauchskurven der Blind und Wirkleistung von Industrieabnehmern, die Blindlastösse hervorrufen und ihren Einfluss auf die anderen Verbraucher überprüft.

Gleichzeitig werden auch die Massnahmen angegeben, die erlauben, dass die Folgen auf das System bzw(Spannungsänderungen) auf zulässige Werte herabgesetzt werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

A. Oprean mit Mitarbeitern.

D.K. 621.65

Studium der Volumenverluste in den Pumpen mit Axialkolben und sphärischer Verteilung.

Den Gegenstand vorliegender Arbeit bildet die theoretische und experimentelle Bestimmung der Volumenverluste in den Axialkolben-Pumpen mit sphärischer Verteilung, wozu Bewegungs-und Stetigkeitsgleichungen aus der Dynamik der viskosen Flüssigkeiten benützt werden.

In der Arbeit wird eine originelle Bestimmungsmethode für die Verluste durch Kegel-und Kugelspalten in zwei Fliessrichtungen angewendet. Die Gültigkeit der mathematischen Berechnung der Volumverluste wurde durch experimentelle Versuche bestätigt.

Das theoretische und experimentelle Studium dieser Pumpen, sowie die erzielten Ergebnisse beweisen, dass sie aucu in den hidraulischen Antriebssystemen der Werzeugmaschinen erfolgreich, verwendet werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Tripşa

C.D. 669.184.1 : 621.359

Etude des effets de l'électrocapillarité sur les processus d'élaboration de l'acier et sur sa pureté.

En développant l'hypothése que les phénomènes électrocapillaires se manifestent à la surface interphasique scorie — bain métallique et si l'on applique de l'extérieur sur le système une tension électrique alternative et triphasée, comme dans les fours électriques à arc utilisés pour l'élaboration de l'acier (3), on a étudié sur un modèle électrolytique la formation et la propagation des ondulations produites par la variation de la tension interphasique, à l'aide de la prise de vue rapide et de l'oscillographie.

On met en évidence l'importance de ce phénomène pour les processus d'élaboration de l'acier dans les fours électriques, tout en soulignant son influence favorable sur l'élimination des inclusions non-métalliques. Dans ce sens, on étudie sur le modèle électrolytique l'intensification de l'élimination des inclusions non-métalliques et l'on préconise de nouvelles méthodes pour l'amélioration de la pureté de l'acier, dont l'efficience est confirmée expérimentalement.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

P. Postelnicu

C.D. 621.391

Sens et géneralité de la connexion inverse (rétroaction) dans les réseaux électriques.

En définissant la connexion inverse comme étant une chaîne causale fermée, on souligne en premier lieu le carctère universel de ce facteur dans les processus stationnaires évolutifs et autodévéloppants.

Dans le cas des réseaux électriques linéaires, la connexion inverse est mise en évidence à l'aide des diagrammes de fluence de signal dans lesquels apparaissent des voies fermées (boucles) correspondant soit à des boucles de réaction du réseau, soit aux éléments réactifs L,C. On souligne le caractère des processus transitoires, interprété à l'aide du concept de la connexion inverse. On montre l'utilité de ce concept pour un interprétation synthétique de certaines formules importantes de la théorie des réseaux passifs et actifs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

I. Tripşa

D.K. 669.184.1 : 621.359

Studium der Elektrokapillaritätswirkungen auf die Stahl-Erschmelzungsprozesse und die Reinheit desselben.

Unter Entwicklung der Hypothese dass die elektrokapillaren Erscheinungen sich auf der Zwischenphasen-Oberfläche Schlacke-Metallbad auch in dem Fall bemerkbar machen, wenn von aussen eine Wechsel-oder Drehstromspannung auf das System, wie bei den zur Stahlerschmelzung benützten Lichtbogenofen (3), angelegt wird, wurde auf einem elektrolitischen Modell die Bildung und Fortpflanzung der durch Zwischenphasen-Spannungsschwankungen erzeugten Wellen mittels Kinematographie mit beschleunigter Geschwindigkeit und durch Oszillographie studiert.

Es wird die Bedeutung dieser Erscheinung für die Stahl-Erschmelzungsprozesse in elektrischen Öfen hervorgehoben und der vorteilhafte Einfluss unterstrichen, den sie auf die Ausscheidung der nichtmetallischen Einschlüsse ausübt. In diesem Sinne wird auf dem elektrolitischen Modell die Verstärkung der Ausscheidung der nichtmetallischen Einschlüsse studiert und neue Methoden für die Steigerung der Stahlreinheit geplant, deren Wirksamkeit durch Versuche hestätigt wurde.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

P. Postelnicu

D.K. 621.391

Sinn und Allgemeinheit der Rückkopplung in den elektrischen Netzen.

Durch Bestimmung der Rückkopplung als eine geschlossene Kausalkette, wird anfänglich der allgemeine Charakter von diesem Beiwert in den stationären, fortschreitenden und Selbstenwicklungs prozessen hervorgehoben.

Im Falle der elektrischen Linearnerze, wird die Rückkoplung mittels Signalflussdiagramme veranschaulicht, in denen geschlossene Wege (Schleifen) auftreten, die entweder Reaktionschleifen aus dem Netz, oder Reaktionen zwischen Strom und Spannung, hervorgerufen durch die Blindelemente L., C., entsprechen. Es wird die Eigenart der Schaltvorgänges unterstrichen, die mitteln des Konzepts für Rückkopplung erklärt werden. Es wird die Nützlichkeit dieses Konzeptes für eine synthetische Auslegung von wichtigen Formeln aus der Theorie der pasiven und aktiven Netze beweist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.9

UNE IDENTITÉ ET LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UN CERTAIN OPÉRATEUR LINÉAIRE

D. V. IONESCU
Université de Cluj

On sait que la différence divisée d'une fonction f sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ qu'on désigne par $[x_0, x_1, \ldots x_n ; f]$ jouit de la proprieté exprimée par les égalités

$$[x_0, x_1, \ldots, x^r] = 0 \tag{1}$$

pour $r = 0,1, \ldots, n-1$ et

$$[x_0, \ldots, x_n ; x^n] = 1 . \tag{1}$$

Lorsque $f \in c^n [x_0, x_n]$, on a une représentation intégrale de la différence divisée par la formule

$$[x_0, \ldots, x_n ; f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(n)}(s)\, ds . \tag{2}$$

où la fonction φ, peut s'obtenir par un problème aux limites [1], qui permet de démontrer facilement que *la fonction φ est positive sur l'intervale (x_0, x_n) et qu'on a*

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{n!} \tag{3}$$

En supposant $q \leqslant n$, on peut considérer les différences divisées successives $[x_0, x_1, \ldots, x_q ; f]$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{q+1} ; f], \ldots, [x_{n-q}, x_{n-q+1}, \ldots, x_n ; f]$ ainsi que l'opérateur

$$M_q^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^{n-q} \lambda_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+q} ; f] \tag{4}$$

qui apparaît comme une *moyenne* de ces différences divisées, avec les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-q}$, dont la somme n'est pas nulle.

---

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique „Gheorghe Gehorghiu-Dej" Bucarest 1—3 novembre 1968.

L'opérateur $M_q^{(n)}[f]$ jouit de la propriété exprimé par les formules

(5) $$M_q^{(n)}[x^r] = 0$$

pour $r = 0,1,\ldots,\ q = 1$ et

(5') $$M_q^{(n)}[x^q] \neq 0$$

T. Popoviciu [4] a considéré l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(n + \alpha_i h) = 0$$

où les coefficients A_i et α_i sont liés par les équations

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \alpha_i^j = 0$$

pour $j = 0,1,\ldots,k-1$ et

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \alpha_i^k = 0$$

et a démontré qu'elle a pour solution continue, quelques soit x et h, un polynome quelconque de degré k—1 au plus.

Le premier membre de l'équation fonctionelle de T. Popoviciu est un opérateur, analogue à l'operateur $M_q^{(n)}[f]$ définit par la formule (4).

Lorsque les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont en progression arithmétique de raison h, les considérations précédentes conduisent à introduire la différence d'ordre n, de la fonction f, au point x_0, par la formule

(6) $$\Delta^n f(x_0) = f(x_0 + n h) - C_n^1 f(x_0 + (n-1)h) + \ldots + (-1)^n C_n^n f(x_0)$$

En posant pour abréger $f(x_i) = f_i$, nous écrivons la formule (6) sous la forme

(6') $$\Delta^n f_0 = f_n - C_n^1 f_{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n^n f_0$$

La différence d'ordre n jouit de la propriété exprimée par les formules (1) et (1'), c'est-à-dire

(7) $$\Delta^n x_0^r = 0\ .$$

pour $r = 0,1,\ldots,\ n-1$, et

(7') $$\Delta^n x_0^n = n!\, h^n$$

Lorsque $f \in C^n[x_0, x_n]$, on a la représentation intégrale

(8) $$\Delta^n f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + nh} \psi(s) f^{(n)}(s)\, ds\ ,$$

où la fonction ψ est liée à la fonction φ de la représentation intégrale (2) par la formule

(9) $$\psi(s) = n!\, h^n - \varphi(s)$$

Il résulte que la fonction ψ est positive, sur l'intervalle (x_0, x_n) et que

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} \psi(s)\,ds = h^n \tag{10}$$

Dans ce travail nous prenons les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en progression arithmétique de raison h et les différences $\Delta^{2p} f_j$ pour $j = 0,1,\ldots, n-2p$ où $2p \leqslant n$ Relativement à la somme

$$\sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i \tag{11}$$

nous traiterons le problème suivant :

Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{1-2p}$ *de manière que la somme (11) soit de la forme :*

$$(f_0 + f_n) + A_1(f_1 + f_{n-1}) + \ldots A_{p-1}(f_{p-1} + f_{n-p+1}) + A_p(f_p + f_{p-1} + \ldots + f_{n-p}) \tag{12}$$

Les coefficientes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ seront choisis de manière que ce problèmes soit posible.

Dans ce cas, nous aurons l'identité

$$L_p^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i \tag{13}$$

qui fait l'objet de ce travail où $L_p^{(n)}[f_1]$ désigne l'opérateur :

$$L_p^{(n)}[f] = (f_0 + f_n) + A_1(f_1 + f_{n-1}) + \ldots + A_{p-1}(f_{p-1} + f_{n-p+1}) + \\ + A_p(f_p + f_{p+1} + \ldots + f_{n-p})$$

Il est evident que l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ ainsi déterminé aura la propriété exprimée par les formules

$$L_p^{(n)}[x^r] = 0 \tag{15}$$

pour $r = 0,1,\ldots, 2p-1$ et

$$L_p^{(n)}[x^{2p}] = (2p)!\, h^{2p}(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-2p}) \tag{15'}$$

qui résulte de la propriété exprimée par les formules (7) et (7').

Nous commencerons par traiter le cas $p=1$, qui nous donnera des indications pour le cas général.

Les résultats de ce travail ont été communiqués à l'Institut polytechnique de Cluj et à l'Institut polytechnique de Bucarest dans les séances du 12 Octombre 1968 et du 1 Novembre 1968.

§ 1. L'identité (13) dans le cas $p=1$

1. Écrivons les différences du second ordre de la fonction f sur les noeuds x_0, x_1, x_2 ; x_1, x_2, x_3 ; ... x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_0 &= f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \Delta^2 f_1 &= f_1 - 2f_2 + f_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^2 f_{n-2} &= f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{aligned} \tag{16}$$

D'après le problème posé dans l'introduction de ce travail il s'agit de déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ de manière à avoir l'identité

$$(17) \qquad \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \Delta^2 f_i = (f_0 + f_n) + A_1 (f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) = L_1^{(n)}[f]$$

On doit avoir les équations

$$(18) \qquad \begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_0 &= A_1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0 &= A_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n-2} - 2\lambda_{n-3} + \lambda_{n-4} &= A_1 \\ -2\lambda_{n-2} + \lambda_{n-3} &= A_1 \\ \lambda_{n-2} &= 1 \end{aligned}$$

Dans ces équations on doit avoir $n \geqslant 2$.

2. Lorsque n=2, le système (18) se réduit à une seule équation $\lambda_0 = 1$ et la formule (17) devient

$$L_1^{(2)}[f] = (f_0 + f_2) - 2f_1$$

avec $A_1 = -2$

Lorsque $n=3$, on a : $\lambda_0 = \lambda_1 = 1, A_1 = -1$ et la formule (17) devient

$$L_1^{(3)}[f] = (f_0 + f_3) - (f_1 + f_2)$$

Lorsque $n=4$, on a: $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \frac{4}{3}, \lambda_2 = 1, A_1 = -\frac{2}{3}$ et la formule (17) devient :

$$L_1^{(4)}[f] = (f_0 + f_4) - \frac{2}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$$

3. Supossons $n \geqslant 5$, ce qui correspond au cas général. Nous pouvons alors écrire les équations (18) sous la forme

$$(19) \qquad \begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_0 &= A_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_0 &= 0 \\ \lambda_3 - 3\lambda_2 + 3\lambda_1 - \lambda_0 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n-2} - 3\lambda_{n-3} + 3\lambda_{n-4} - \lambda_{n-5} &= 0 \\ -2\lambda_{n-2} + \lambda_{n-3} &= A_1 \\ \lambda_{n-2} &= 1 \end{aligned}$$

Si l'on considère l'équation de récurrence :

$$(20) \qquad \lambda_j - 3\lambda_{j-1} + 3\lambda_{j-2} - \lambda_{j-3} = 0$$

on voit facilement qu'elle a pour solutions : 1, j, $j(j+1)$ pour $j=3,4,\ldots$, $n-2$ ou plus généralement

$$\lambda_j = C_1 + C_2 j + C_3 j(j+1) \tag{21}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes quelconques.

On peut choisir C_1, C_2, C_3 et A_1 de manière que les trois premières équations (19) et les deux dernières équations (19) soient satisfaits par la formule (21) pour $j=0,1,2$ et $n-2$, $n-3$.

On trouve sans difficulté qu'il faut prendre

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1,\ C_3 = -\frac{1}{n-1},\ A_1 = -\frac{2}{n-1} \tag{22}$$

On peut alors écrire les coefficients λ_j sous la forme

$$\lambda_j = \frac{C^1_{j+1}\, C^1_{n-j-1}}{C^1_{n-1}} \tag{23}$$

pour $j=0,1,\ldots,n-2$ et la formule (17) montre qu'on a l'identité :

$$L_1^{(n)}[f] = (f_0 + f_n) - \frac{2}{n-1}(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \Delta^2 f_i \tag{24}$$

§ 2. Le cas général

2. Écrivons les différences d'ordre $2p$ de la fonction f sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_{2p}$; $x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$; $\ldots$; $x_{n-2p}, x_{n-2p+1}, \ldots, x_n$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\Delta^{2p} f_0 &= f_0 - C^1_{2p} f_1 + \ldots + (-1)^{2p} C^{2p}_{2p} f_{2p} \\
\Delta^{2p} f_1 &= f_1 - C^1_{2p} f_2 + \ldots + (-1)^{2p} C^{2p}_{2p} f_{2p+1} \cdot \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta^{2p} f_{n-2p} &= f_{n-2p} - C^1_{2p} f_{n-2p+1} + \ldots + (-1)^{2p} C^{2g}_{2p} f^{2p}_{2p} f_n
\end{aligned} \tag{25}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2p}$ de manière qu'en faisant la combinaison linéaire

$$\sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i \tag{26}$$

les coefficients de $f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{n-p}$ soient égaux. De cette façon on aura l'identité

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i = (f_0 + f_n) + A_1 (f_1 + f_{n-1}) + \ldots + A_{p-1} (f_{p-1} + f_{n-p+1}) + \\
+ A_p (f_p + f_{p+1} + \ldots + f_{n-p})
\end{aligned} \tag{27}$$

et nous désignérons par

$$(28)\quad L_p^{(n)}[f] = (f_0 + f_n) + A_1(f_1 + f_{n-1}) + \ldots + A_{p-1}(f_{p-1} + f_{n-p+1}) + \\ + A_p(f_p + f_{p+1} + \ldots + f_{n-p})$$

Au lieu de traiter ce problème directement, nous le traiterons d'une manire détournée. En tenant compte de la fromule (23), du cas $p=1$, *nous prenderons dans le cas général*

$$(29)\quad \lambda_j = \frac{C_{p+j}^p \, C_{n-p-j}^p}{C_{n-p}^p}$$

pour $j=0,1,2,\ldots n-2p$ *et nous vérifierons ensuite qu'avec ces coefficients, dans la combinaisons linéaire (26), les coefficients de* $f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{n-2p}$ *sont égaux.*

Remarquons que les coefficients λ_j données par la formule (29) ont la propriété de symétrie

$$(30)\quad \lambda_j = \lambda_{n-2p-j}$$

et que

$$(31)\quad \lambda_0 = \lambda_{n-2p} = 1$$

A cause de la symétrie des coefficients λ_j et des coefficients C_{2p}^j or aura :

$$(32)\quad \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i = (f_0 + f_n) + A_1(f_1 + f_{n-1}) + \ldots + A_{p-1}(f_{p-1} + f_{n-p+1}) + \\ + \mu_p(f_p + f_{n-p}) + \mu_{p+1}(f_{p+1} + f_{n-p+1}) + \ldots$$

Lorsque $n=2q$, les deux derniers termes de la formule (32) sont

$$(33)\quad \mu_{q-1}(f_{q-1} + f_{q+1}) + \mu_q f_q .$$

et lorsque $n=2q+1$, les deux derniers termes de la formule (32), sont

$$(34)\quad \mu_{q-1}(f_{q-1} + f_{q+2}) + \mu_q(f_q + f_{q+1})$$

Lorsque $n=2p$, l'identité (27) est évidente et on aura

$$L_p^{(2p)}(f) = (f_0 + f_{2p}) + A_1(f_1 + f_{2p-1}) + \ldots + A_{p-1}(f_{p-1} + f_{p+1}) + A_p f_p .$$

avec

$$A_1 = -C_{2p}^1, \; A_2 = C_{2p}^2, \ldots, \; A_{p-1} = (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1}$$

et

$$A_p = (-1)^p C_{2p}^p$$

De même lorsque $n=2p+1$, l'identité (27) est évidente, et on aura

$$L_p^{(2p+1)}(f) = (f_0 + f_{2p+1}) + A_1(f_1 + f_{2p}) + \ldots + A_{p-1}(f_{p-1} + f_{p+2}) + \\ + A_p(f_p + f_{p+1})$$

avec

$$A_1 = 1 - C_{2p}^1,\ A_2 = -C_{2p}^1 + C_{2p}^2, \ldots, A_{p-1} = (-1)^{p-2} C_{2p}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1}$$

et

$$A_p = (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} + (-1)^p C_{2p}^p$$

Pour exprimer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ et $\mu_p, \mu_{p+1}, \ldots, \mu_q$ de la formule (32) à l'aide des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2p}$ nous procédons comme dans les alinéas 3 et 4.

3. Lorsque $n \geqslant 3p-1$, nous avons

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 - C_{2p}^1 \lambda_0 \\ A_2 &= \lambda_2 - C_{2p}^1 \lambda_1 + C_{2p}^2 \lambda_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p-1} &= \lambda_{p-1} - C_{2p}^1 \lambda_{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} \lambda_0 . \end{aligned} \tag{35}$$

et lorsque $2p+1 < n < 3p_1$, nous avons :

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 - C_{2p}^1 \lambda_0 \\ A_2 &= \lambda_2 - C_{2p}^1 \lambda_1 + C_{2p}^2 \lambda_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-2p} &= \lambda_{n-2p} - C_{2p}^1 \lambda_{n-2p-1} + \ldots + (-1)^{n-2p} C_{2p}^{n-2p} \lambda_0 \\ A_{n-2p+1} &= -C_{2p}^1 \lambda_{n-2p} + C_{2p}^2 \lambda_{n-2p-1} + \ldots + \\ &\quad + (-1)^{n-2p+1} C_{2p}^{n-2p+1} \lambda_0 \\ A_{p-1} &= (-1)^{3p-n-1} C_{2p}^{3p-n-1} \lambda_{n-2p} + \\ &+ (-1)^{3p-n} C_p^{3p-n} \lambda_{n-2p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} \lambda_0 . \end{aligned} \tag{36}$$

Nous pouvons dire que les formules (35) sont encore valables dans le cas $2p+1 < n < 3p-1$, parceque d'après les formules (29) on a

$$\lambda_{n-2p} = 1,\ \lambda_{n-2p+1} = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0 \tag{37}$$

et lorsque $2p+1 < n < 3p-1$, les formules (35) se réduisent aux formules (36).

4. Lorsque $n \geqslant 4p$, les coefficients : $\mu_p, \mu_{p+1}, \ldots \mu_q$ sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \mu_p &= \lambda_p - C_{2p}^1 \lambda_{p-1} + \ldots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0 \\ \mu_{p+1} &= \lambda_{p+1} - C_{2p}^1 \lambda_p + \ldots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_1 + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} \lambda_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{2p} &= \lambda_{2p} - C_{2p}^1 \lambda_{2p-1} + \ldots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} \lambda_0 . \\ \mu_{2p+1} &= \lambda_{2p+1} - C_{2p}^1 \lambda_{2p} + \ldots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} \lambda_1 . \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_q &= \lambda_q - C_{2p}^1 \lambda_{q-1} + \ldots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} \lambda_{q-2p} \end{aligned} \tag{38}$$

Lorsque $3p \leqslant n < 4p$ on a

$$\mu_p = \lambda_p - C_{2p}^1 \lambda_{p-1} + \ldots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0$$

$$\mu_{p+1} = \lambda_{p+1} - C_{2p}^1 \lambda_p + \ldots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_1 + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} \lambda_0 .$$

. . . . . .

$$\mu_{n-2p} = \lambda_{n-2p} - C_{2p}^1 \lambda_{n-2p-1} + \ldots + (-1)^{n-2p} C_{2p}^{n-2p} \lambda_0$$

$$\mu_{n-2p+1} = - C_{2p}^1 \lambda_{n-2p} + \ldots + (-1)^{n-2p+1} C_{2p}^{n-2p+1} \lambda_0$$

. . . . . .

$$\mu_q = \quad (-1)^{q-n+2p} C_{2p}^{q-n+2p} \lambda_{n-2p} + \ldots + (-1)^q C_{2p}^q \lambda_0 .$$

Enfin lorsque $2p + 1 < n < 3p$ on a

$$\mu_p = \quad (-1)^{3p-n} C_{2p}^{3p-n} \lambda_{n-2p} + (-1)^{3p-n+1} C_{2p}^{3p-n+1} \lambda_{p-2p-1} +$$
$$+ \ldots + (-)^p C_{2p}^p \lambda_0$$

$$\mu_{p+1} = (-1)^{3p-n+1} C_{2p}^{3p-n+1} \lambda_{n-2p} + (-1)^{3p-n+2} C_{p2}^{3p-n+2} \lambda_{n-2p-1} +$$
$$+ \ldots + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} \lambda_0$$

(40) . . . . . .

$$\mu_q = \quad (-1)^{2p-n+q} C_{2p}^{2p-n+q} \lambda_{n-2p} + (-1)^{2p-n+1} C_{2p}^{2p-n+k+1} \lambda_{n-2p-1} +$$
$$+ \ldots + (-1)^q C_{2p}^q \lambda_0 .$$

On peut dire que les formules (38) sont encore valables lorque $3p \leqslant n < 4p$ et $2p + 1 < n < 3p$, parceque dans ces cas, à cause des formules (37), les formules (38) se réduisent aux formules (39) et (40).

Nous allons démontrer maintenant que grâce aux formules (29), dans la formule (32) nous avons

$$\mu_p = \mu_{p+1} = \ldots = \mu_q = A_p . \tag{41}$$

où

$$A_p = \lambda_p - C_{2p}^1 \lambda_{p-1} + \ldots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0 . \tag{42}$$

Tous les cas étant compris dans les formules (38), nous démontrerons à l'aide de ces formules, que nous avons les égalités (41). Introduisons pour cela les différences

$$\delta^j \mu_p = \mu_{p+j} - C_j^1 \mu_{p+j-1} + \ldots + (-1)^j C_j^j \mu_p \tag{43}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, q - p$.

On démontre à l'aide des formules (38) que

$$\delta^j \mu_p = \lambda_{p+j} - C_{2p+j}^1 \lambda_{p+j-1} + \ldots + (-1)^{p+j} C_{2p+j}^{p+j} \lambda_0 , \tag{44}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, q - p$.

En remplaçant dans la formule (44) les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+j}$ par les formules (29), nous avons :

$$C^p_{n-p}\,\delta^j\,\mu_p = C^p_{2p+j}\,C^p_{n-2p-j} - C^1_{2p+j}\,C^p_{2p+j-1}\,C^p_{n-2p-j+1} + \ldots + \\ + (-1)^{p+j}\,C^{p+j}_{2p+j}\,C^p_p\,C^p_{np}$$

Mais nous avons

$$C^h_{2p+j}\,C^p_{2p+j-h} = C^p_{2p+j}\,C^h_{p+j}$$

pour $h = 1,2,\ldots,p+j$. Nous pouvons donc écrire :

$$C^p_{n-p}\,\delta^j\,\mu_p = C^p_{2p+j}\,(C^p_{n-2p-j} - C^1_{p+j}\,C^p_{n-2p-j+1} + \ldots (-1)^{p+j}\,C^{p+j}_{p+j}\,C^p_{n-p})$$

ou encore

$$C^p_{n-p}\,\delta^j\,\mu_p = (-1)^{p+j}\,C^p_{2p+j}\,(C^p_{n-p} - C^1_{p+j}\,C^p_{n-p-1} + \ldots + \\ + (-1)^{p+j}\,C^{p+j}_{p+j}\,C^p_{n-2p-j})$$

Si nous introduisons le polynôme :

$$V(x) = \frac{x\,(x-1)\ldots(x-p+1)}{p\,!} \tag{45}$$

de dégré p, nous remarquons qu'on peut écrire la formule précédente sous la forme :

$$C^p_{n-p}\,\delta^j\,\mu_p = (-1)^{p+j}\,C^p_{2p+j}\,\Delta^{p+j}\,V\,(n-2p-j) \tag{46}$$

et cette formule est valable pour $j = 1,2,\ldots,q-p$. La différence $\Delta^{p+j}\,V\,(x)$, d'ordre $p+j$, d'un polynôme $V(x)$ de degré p est nulle et par suite nous avons :

$$\delta^j\,\mu_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,q-p) \tag{47}$$

c'est-à-dire, nous avons les égalités (41).

En remplaçant dans la formule (42) les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$, par les formules (29), nous avons

$$C^p_{n-p}\,A_p = C^p_{2p}\,C^p_{n-2p} - C^1_{2p}\,C^p_{2p-1}\,C^p_{n-2p+1} + \ldots + (\quad 1)^p\,C^p_{2p}\,C^p_p\,C^p_{n-p}$$

Mais nous avons déjà cité l'identité

$$C^h_{2p}\,C^p_{2p-h} = C^h_{2p}\,C^h_p$$

que nous utilisons ici pour $h = 0,1,\ldots,p$ et nous aurons

$$C^p_{n-p}\;A_p = C^p_{2p}\,(C^p_{n-2p} - C^1_{2p}\,C^p_{n-2p+1} + \ldots + (-1)^p\,C^p_p\,C^p_{n-p})$$

On démontre sans difficulté que la grande paranthèse est égale à $(-1)^p$ et par suite nous avons

$$A^p = (-1)^p\,\frac{C^p_{2p}}{C^p_{n-p}} \tag{47}$$

Finalement nous avons l'identité

$$\sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i = L_p^{(n)}[f]\,. \tag{48}$$

avec les coefficients λ_i donnés par les formules (29) et où l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ est donné par la formule

$$L_p^{(n)}[f] = (f_0 + f_n) + A_1 (f_1 + f_{n-1}) + \ldots + A_{p-1} (f_{p+1} + f_{n-p+1}) + \tag{49}$$
$$+ (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p} (f_p + f_{p+1} \ldots + f_{n-p})$$

où les coefficients A_1, A_2,...,A_{p-1} sont donnés par les formules (35), valables pour $n \geqslant 2p$.

§ 3. **Première application de l'identité (48)**

6. Comme première application de l'identité (48), nous voulons calculer $L_p^{(n)}[f]$, pour $f(x) = (x - x_0)^r$ où $r \leqslant 2p$ et $r = 2p+1$. Pour cela nous calculerons d'abord $\Delta^n f_i$ pour $f(x) = (x - x_0)^r$ où $r \leqslant n$ et $r = n+1$.

La formule

$$\frac{\Delta^n f_i}{n!\, h^n} = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f]\,.$$

montre que

$$\frac{\Delta^n (x_i - x_0)^r}{n!\, h^n} = \frac{1}{V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})} \begin{vmatrix} 1 & x_i & \ldots & x_i^{n-1} & (x_i - x_0)^r \\ 1 & x_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{n-1} & (x_{i+1} - x_0)^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{i+n} & \ldots & x_{i+n}^{n-1} & (x_{i+n} - x_0)^r \end{vmatrix} \tag{50}$$

et par suite nous avons

$$\Delta^n (x_i - x_0)^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n!\, h^n & \text{si } r = n \end{cases} \tag{51}$$

Pour $r = n+1$, le déterminant du second membre de la formule (50) est egale-à :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & \ldots & x_i^{n-1} & x_i^{n+1} \\ 1 & x_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{n-1} & x_{i+1}^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{i+n} & \ldots & x_{i+n}^{n-1} & x_{i+n}^{n+1} \end{vmatrix} - (u + i)\, x_0\, V(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})$$

Mais le premier déterminant est égal au produit de $V(x_i, x_{i+1}, \ldots x_{i+n})$ par $(x_i + \ldots + x_{i+n})$. Nous avons donc

$$\frac{\Delta^n (x_i - x_0)^{n+1}}{n!\, h^n} = [i + (i+1) + \ldots + (i+n)] = \frac{(2i+n)(n+1)}{2} h$$

est par suite

$$\Delta^n (x_i - x_0)^{n+1} = \frac{2i+n}{2} (n+1)!\, h^{n+1} \tag{52}$$

Les formules (51) et (52) peuvent s'écrire sous la forme

$$(n+i) - C_n^1 (n+i-1)^r + \ldots + (-1)^n C_n^n i^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n! & \text{si } r = n \\ \dfrac{(2i+n)}{2} (n+1)! & \text{si } r = n+1 \end{cases} \tag{53'}$$

Pour $i=0$, les formules (53) sont bien connues et ont la forme

$$n^r - C_n^1 (n-1)^r + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} i^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n! & \text{si } r = n \\ \dfrac{n}{2} (n+1)! & \text{si } r = n+1. \end{cases}$$

D'ailleurs les formules (53) ne sont que des conséquences des formules (53').

7. L'identité :

$$L_p^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i$$

avec

$$\lambda_i = \frac{C_{p+i}^p \, C_{n-p-i}^p}{C_{n-p}^p}$$

et les formules (51) montrent que si $r < 2p$, on a

$$L_p^{(n)}[(x - x_0)^r] = 0 \tag{54}$$

Pour $r = 2p$, les formules (51) montrent que

$$L_p^{(n)}[(x - x_0)^{2p}] = (2p)!\, h^{2p} (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-2p})$$

Mais on demontre que

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-2p} = \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} \tag{55}$$

et par suite on a

$$L_p^{(n)}[(x - x_0)^p] = (2p)!\, \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} h^{2p}.$$

Pour $r=2p+1$, les formules (52) montrent que

$$L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}]=(2_{p+1})\,!\,h^{2p+1}\sum_{i=0}^{n-2p}(p+i)\,\lambda_i$$

Mais on démontre que

$$\sum_{i=o}^{n-2p}(p+i)\,\lambda_i=\frac{1}{C_{n=p}^{p}}\sum_{i=0}^{n-2p}(p+i)\,C_{p+i}^{p}\,C_{n-p-i}^{\ p}=\frac{n}{2}\,\frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^{p}}$$

On aura donc

$$L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}]=(2p+1)\,!\,\frac{n}{2}\,\frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^{p}}\,h^{2p+1}$$

c'est-à-dire

$$L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}]=\frac{n(n+1)\,!}{2}\,\frac{p\,!}{(n-p)\,!}\,h^{2p+1} \tag{57}$$

Si nous tenons compte de l'expression de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ donnée par la formule (49), nous avons donc démontré les identités

$$n^r+A_1[1^r+(n-1)^r]+\ldots+A_{p-1}[(p-1)^r+(n-p+1)^r+$$

$$+(-1)^p\,\frac{C_{2p}^{p}}{C_{n-p}^{p}}[p^r+(p+1)^r+\ldots+(n-p)^r]= \tag{58}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{si } r<2p\\ (2p)\,!\,\dfrac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^{p}} & \text{si } r=2p\\ \dfrac{n(n+1)!}{2}\,\dfrac{p\,!}{(n-p)!} & \text{si } r=2p+1\end{cases}$$

où A_1, $A_2,\ldots,A_{p-1}$ sont des coefficients donnés par les formules (35). Les formules (58) généralisent les formules (53') et se réduisent à ces formules pour $n=2p$.

Exemples : 1°. $p=1$ on a les identités

$$n^r-\frac{2}{n-1}[1^r+2^r+\ldots+(n-1)^r]=\begin{cases}0 & \text{si } r=1\\ \dfrac{n(n+1)}{3} & \text{si } r=2\\ \dfrac{n^2(n+1)}{2} & \text{si } r=3\end{cases} \tag{59}$$

2°. Pour $p=2$, on a les identités

$$n^r - \frac{n+4}{n-2}[1^r+(n-1)^r]+\frac{12}{(n-2)(n-3}[2^r+3^r+\ldots+(n-2)^r]= \tag{60}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{si } r=1,2,3 \\ 2\dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)}{5} & \text{si } r=4 \\ (n+1)\,n^2\,(n-1) & \text{si } r=5 \end{cases}$$

Les formules (58) permetent aussi de calculer les sommes

$$1^r+2^r+\ldots+n^r$$

pour $r=1, 2,\ldots$.

Ainsi si nous nous rapportons aux formules (59), nous déduisons les formules bién connues :

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

De même si nous nous rapportons aux formules (60) nous pouvons ajouter aux formules (59') les formules bien connues

$$1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4=\frac{n(n-1)(2n-1)}{30}(3n^2-3n-1) \tag{60'}$$

$$1^5+2^5+\ldots+(n-1)^5=\frac{n^2(n-1)^2}{12}(2n^2-2n-1)$$

et ainsi de suite.

§ 4. La représentation de l'opérateur $L_p^{(n)}(f)$, par une intégrale définie.

8. Suppons que $f\in C^{2p}[x_0,x_n]$ et cherchons une représentation intégrale de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$, défini par la formule (49). Pour cela rappelons qu'on peut écrire la différences $\Delta^{2p}f_j$ par une intégrale définie, analogue à la formule (8). On a

$$\Delta^{2p}f_j=\int_{x_j}^{x_j+2p}\psi_j(s)\,f^{(2p)}(s)\,ds \tag{61}$$

où la fonction ψ_j est positive sur l'intervalle (x_j, x_{j+2p}) et l'on a

$$\int_{x_j}^{x_j+2p} \psi_j(s)\,ds = h^{2p} \tag{62}$$

On peut écrire la formule (61) aussi sous la forme

$$\Delta^{2p} f_j = \int_{x_0}^{x_n} \bar{\psi}_j(s)\, f^{(2p)}(s)\,dr \tag{63}$$

où la fonction $\bar{\psi}_j$ coincide avec la fonction ψ_j sur l'intervalle (x_j, x_{j+2p}) et est nulle les intervalles $[x_0, x_j], [x_{j+2p}, x_n]$. On a aussi la formule

$$\int_{x_0}^{x_n} \bar{\psi}_j(s)\,ds = h^{2p} \tag{64}$$

Il résulte alors la représentation intégrale de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ par la formule

$$L_p^{(n)}[f] = \int_{x_0}^{x_n} Q_p(s)\, f^{(2p)}(s)\,ds \tag{65}$$

où la fonctions $Q_p(s)$ este définie sur l'intervale $[x_0, x_n]$ par la formule

$$Q_p(s) = \lambda_0 \bar{\psi}_0(s) + \lambda_1 \bar{\psi}_1(s) + \ldots + \lambda_{n-2p} \bar{\psi}_{n-2p}(s). \tag{66}$$

On peut aussi donner à la fonction Q_p la forme

$$Q_p(s) = -\left[\frac{(s-x_0)_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(s-x_n)_+^{2p-1}}{(2p-1)!}\right] -$$

$$-A_1\left[\frac{(s-x_1)_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(s-x_{n-1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!}\right] - \ldots - A_{p-1}\left[\frac{(s-x_{p-1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \right. \tag{67}$$

$$\left. + \frac{(s-x_{n-p+1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!}\right] - (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p}\left[\frac{(s-x_p)_+^{2p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \frac{(s-x_{n-p})_+^{2p-1}}{(2p-1)!}\right]$$

où dans le second membre on emploie les notations des *„fonctions spline"*. Nous donnerons dans un autre travail la démontrations de la formule (67).

La fonction Q_p este positive sur l'intervalle (x_0, x_p). La démonstration à l'aide de la formule (67) est plus compliquée. Mais avec la formule (66) la démonstration est imédiate.

En effet les coéfficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2p}$ qui définissent l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ par l'identité (48) sont *positifs* et les fonctions $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{n-2p}$ sont

non négatives sur l'intervalle (x_0, x_n). Il résulte que la fonction Q_p est positive sur l'intervalle (x_0, x_n). On a

$$\int_{x_0}^{x_n} Q_p(s)\,ds = (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-2p})\,h^{2p}$$

et en appliquant la formule (55) on peut écrire

$$\int_{x_0}^{x_n} Q_p(s)\,ds = \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^{p}}\,h^{2p} \tag{68}$$

9. On peut faire plusieurs applications de la formule (65). Ainsi pour $p=1$ cette formule peut s'écrire sous la forme

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} = \frac{n-1}{2}(f_0 + f_n) - \frac{n-1}{2}\int_{x_1}^{x_n} Q_p(s)\,f^{(n)}(s)\,ds. \tag{69}$$

Elle comprend comme cas particuliers les deux premières formules (59') qu'on obtient pour $f(r) = s - x_0$ et $f(s) = (s-x_0)^2$

De même pour $f(s) = (s-x_0)(s-x_0-h)$ la formule (69) donne

$$1.2 + 2.3 + \ldots + (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \tag{70}$$

Pour $p=q$, la formule (65) peut s'écrire sous la forme :

$$f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)}{12}\left[\frac{n+4}{n-2}(f_1 + f_{n-1}) - (f_0 + f_n)\right] + \tag{71}$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{12}\int_{x_0}^{x_n} Q_2(s)\,f^{(4)}(s)\,ds$$

De cette formule on déduit la somme :

$$1^r + 2^r + \ldots + (n-3)^r$$

en faisant $f(s) = (s - x_0 - h)^r$ pour $r = 1, 2, 3, 4$

De même on deduit

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + (n-3)^2(n-2) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12}(3n-8) \tag{72}$$

en faisant dans la formule (71), $f(s) = (s - n_0 - h)^2 (s - x_0)$ ainsi que la formule

$$1^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-3)^2 (n-2)^2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{15} \cdot$$

(72)

$$\cdot (3n^2 - 12n + 10)$$

qu'on obtient en faisant dans la formule (71), $f(s) = (s - x_0 - h)^2 (s - x_0)^2$

BIBLIOGRAPHIE

1. *D. V. Ionescu* — Cuadraturi numerice, Editura Tehnică, București 1957.

2. *D. V. Ionescu* — La représentation des différénces divisées par des intégrales définies" et „les Fonctions spline". Comunicare, 14 sept. 1968 la „Colloque sur les équations fonctionnlles" Bucarest-Mamaia 11—17 sept. 1968.

3. *P. Aubert, G. Papellier* — Exercices d'algebre, d'analyse et de trigonométrie. T. II. Paris 1920, p. 18, ex. 47., 48.

4. *T. Popoviciu* — Sur certaines équations gonctionnelles définissant des polynomes. „Mathematica" T. 10. 194—208 (1935)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. : 655

CU PRIVIRE LA UNELE ASPECTE ALE ECHILIBRULUI CERNEALĂ-APĂ ÎN PROCESUL DE IMPRIMARE OFFSET CU PLĂCI BIMETALICE CUPRU-CROM *

TH. BĂDESCU, L. PAPAHAGI

I. *Introducere*

La tiparul offset, forma de imprimare prezintă elementele active (imprimabile) şi neutre (neimprimabile) practic în acelaşi plan. Din acest motiv trebuie să existe posibilitatea de a depune cerneala numai pe elementele imprimabile, lucru care se realizează datorită proprietăţilor fizico-chimice diferite ale elementelor active şi neutre. Prin procedeele tehnologice de pregătire a formei offset, suprafaţa acesteia capătă selectiv capacitatea de a accepta apa pe porţiunile neutre şi cerneala pe suprafaţa elementelor active.

Existenţa concomitentă a celor două faze lichide pe forma de tipar în procesul de imprimare offset, condiţionează obţinerea unor imprimate de calitate, aceasta depinzînd de realizarea unui echilibru adecvat între cerneala de tipar, aflată pe elementele imprimabile din cupru-metal cu pronunţate tendinţe oleofile şi apa de umezire a formei, aflată pe elementele netipăritoare din crom-metal cu proprietăţi hidrofile [1].

Echilibrul optim între cerneală şi apă este în funcţie atît de condiţiile de pregătire a formei de tipar, cît şi de condiţiile în care se desfăşoară procesul de imprimare propriu-zis. Dezideratul principal în tehnologia offset este realizarea unor condiţii specifice, care să conducă la o umectare suficientă şi selectivă a elementelor active (oleofilizate) şi neutre (hidrofilizate) ale formei, precum şi la realizarea unei continuităţi şi rezistenţe suficiente a peliculelor de cerneală şi apă pe suporturile respective.

Lucrarea de faţă îşi propune ca, prin determinări în condiţii statice, referitoare la fenomenele de umectare care au loc la nivelul suprafeţelor metalice de cupru şi crom şi la lucrul mecanic de adeziune la interfaţa liant-metal, să elucideze cîteva aspecte ale proceselor din tehnologia offset, la utilizarea unor cerneluri indigene.

* Lucrare comunicată la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1-3 noembrie 1968.

II. *Metoda de lucru și aparatura folosită*

A. Pentru a avea determinări comparative, s-au luat în studiu doi dintre lianții de bază ai cernelurilor pentru tiparul offset, precum și cerneluri pe baza acestor lianți și s-a determinat unghiul de racord (θ) care ia naștere la stabilirea echilibrului într-un sistem trifazic și este caracteristic fiecărui sistem interfacial dat. Din unghiul de racord θ s-a dedus cosinusul acestuia, care, după cum se știe, reprezintă măsura directă a udării.

Pentru a ne situa cît mai aproape de fenomenele care au loc în realitate, s-a căutat ca suprafețele metalelor luate în studiu (cupru și crom), să fie concomitent umectate de ambele lichide (apă-liant sau apă-cerneală).

Determinarea unghiului de racord în condițiile arătate, s-a făcut utilizînd un aparat (fig. 1) al cărui principiu se bazează pe proiectarea printr-un sistem optic a picăturii de lichid pe un ecran, pe care se pot face citirile unghiului de racord .În locul ecranului, la aparat s-a adaptat un dispozitiv care permite fie posibilitatea citirii directe a unghiului de racord pe un geam mat, fie fotografierea picăturii proiectate și măsurarea ulterioară a acestui unghi. Construcția aparatului permite efectuarea determinărilor în sistem trifazic (apă-liant-suprafață metalică), datorită asocierii unui dispozitiv format dintr-o cuvă de sticlă și un inel suport pentru suprafața metalică.

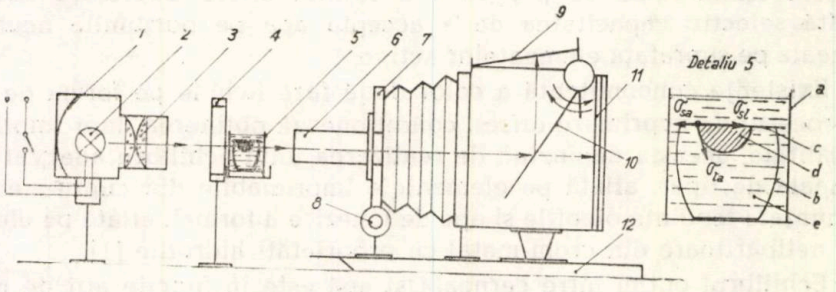


Fig. 1

1. — Oglindă de reflexie
2. — Sursă de lumină
3. — Condensor
4. — Suport
5. — Cuvă
6. — Obiectiv f=135 mm
7. — Rama obiectivului
8. — Declanșator
9. — Geam mat
10. — Oglindă
11. — Casetă ptr. film
12. — Culisă suport

a — Cuvă
b — Inel suport pt. placa met.
c — Placa metalică
d — Picătura de lichid
e — Apă

Din detaliu se deduce că expresia cosinusului unghiului de racord este determinată de echilibrul celor trei tensiuni interfaciale:

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{sa} - \sigma_{sl}}{\sigma_{la}} \qquad (1)$$

Pentru ca să existe udarea propriu-zisă a plăcii de cupru de către lianții și cernelurile luate în studiu, unghiul de racord θ din relația (1) trebuie să fie real [2], lucru care se traduce algebric prin inegalitățile evidente :

$$-1 < \frac{\sigma_{sa} - \sigma_{sl}}{\sigma_{la}} < 1 \qquad (2)$$

Măsurarea unghiului de racord s-a făcut în condiții variabile de :

— pH-ul soluției de umezire (4 ; 5,6 ; 7).

— durata umectării (citirile s-au făcut la 1, 10 și 20 de minute de la aplicarea picăturii).

— natura suprafeței metalului (cupru și crom nesupuse tratamentului de pregătire a formei, cupru ca element oleofilizat și crom hidrofilizat).

— natura lichidelor utilizate (ulei de in polimerizat și liant pe bază de rășină fenol-formaldehidică modificată cu colofoniu).

B. Pe baza valorilor cosinusului unghiului de racord și a tensiunilor interfaciale ale sistemelor liant-apă (determinate la 20°C) s-au calculat, în continuare, valorile lucrului mecanic de adeziune, după relația :

$$W_{sl} = \sigma_{la}(1 + \cos\theta) \qquad (3)$$

Pentru a se obține o bună diferențiere a elementelor oleofile de cele hidrofile este necesar ca lucrul mecanic de adeziune al liantului (cernelii) să aibe valori ridicate pentru suprafețele de cupru (imprimabile) și respectiv, scăzute pentru suprafețele de crom (neimprimabile).

Pentru determinarea tensiunilor interfaciale (σ_{la}), s-a utilizat un aparat [3] bazat pe principiul presiunii maxime a bulelor de gaz sau a picăturii de lichid.

Pentru a obține condiții adecvate de vid, între pompă și aparat a fost plasat un capilar cu lungimea de 17,5 cm (stabilită după tatonări) și diametrul 1,15 mm, precum și un flacon de 10 litri care a servit drept vas tampon.

III. *Rezultate și concluzii*

Rezultatele obținute vor fi analizate pe baza tabelelor 1—3 și a diagramelor din figurile 2—5.

1. Din compararea valorilor obținute pentru lucrul mecanic de adeziune W_{sl} (tabelul 1) pe suprafețele de cupru netratate și pe suprafețele de cupru oleofilizate ale plăcilor bimetalice, se observă că lucrul mecanic de adeziune este mai mare pentru suprafețele oleofilizate. Aceste diferențe reprezintă valorile maxime posibile ce se pot obține, utilizînd o soluție de oleofilizare de concentrație optimă (100 g xantogenat de potasiu în 500 ml alcool), în condiții variabile de pH.

Din diagramele reprezentate în figurile 2 și 3, construite pe baza valorilor din tabela de mai sus, se observă, în primul rînd, că lucrul mecanic de adeziune este mai mare în cazul umectării plăcilor de către liantul pe bază de rășină fenol-formaldehidică modificată cu colofoniu

Tabelul 1

Nr. crt.	Lichidul care umectează	Suportul	Mediul	Ph mediu	θ			cos θ			σ_{la} dyn/cm	W_{ad}		
					1'	10'	20'	1'	10'	20'		1'	10'	20'
1	Ulei de in polimerizat	Cu netr.	Sol. de umezire	4	90	86	83	0,00	0,069	0,121	52,8	52,80	56,44	59,18
2	„	Cu oleof.	„	4	80	75	72	0,173	0,258	0,309	52,8	61,93	66,42	69,11
3	„	Cu netr.	„	5,6	105	101	97	—0,258	—0,190	—0,121	52,1	38,65	42,20	45,79
4	„	Cu oleof.	„	5,6	95	92	88	—0,087	—0,034	0,034	52,1	47,56	50,32	53,87
5	„	Cu netr.	„	7	79	76	74	0,190	0,241	0,275	54,3	64,61	67,38	69,23
6	„	Cu oleof.	„	7	54	51	49	0,587	0,629	0,656	54,3	86,17	88,45	89,92
7	Rășină fenol. formalde-hidică	Cu netr.	„	4	89	87	82	0.017	0,052	0,139	61,2	62,24	64,38	69,76
8	„	Cu oleof.	„	4	75	72	68	0,258	0,309	0,374	61,2	76,98	80,11	84,08
9	„	Cu netr.	„	5,6	107	102	98	—0,292	—0,207	—0,139	60,3	42,69	47,81	51,91
10	„	Cu oleof.	„	5,6	93	90	87	—0,052	0,000	0,052	60,3	57,16	60,30	63,43
11	„	Cu netr.	„	7	73	70	66	0,292	0,342	0,406	65,6	84,75	88,03	92,23
12	„	Cu oleof.	„	7	40	36	31	0,766	0,809	0,857	65,6	115,84	118,67	121,81

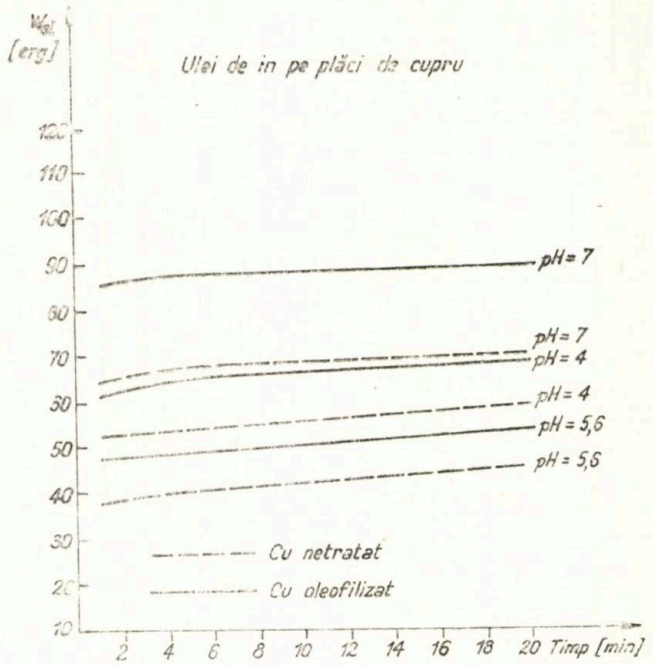

Ulei de in pe plăci de cupru
[erg]
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
pH = 7
pH = 7
pH = 4
pH = 4
pH = 5,6
pH = 5,6
Cu netratat
Cu oleofilizat
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 Timp [min]

Fig. 2

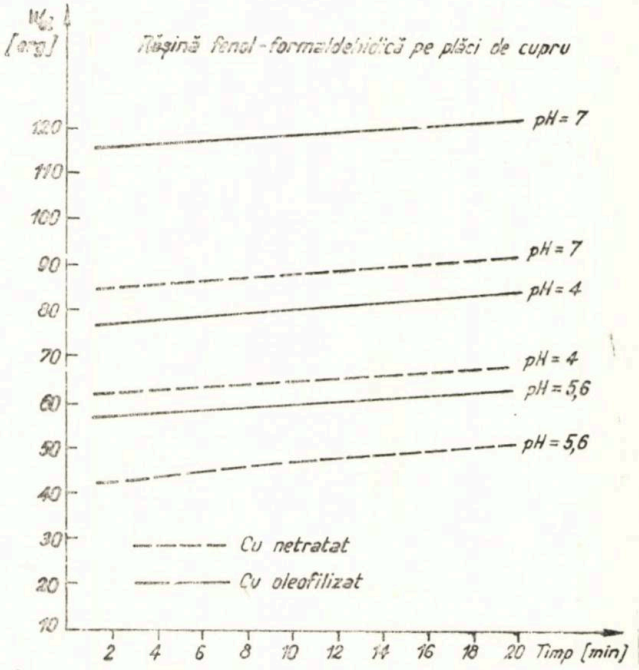

Rășină fenol-formaldehidică pe plăci de cupru
[erg]
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
pH = 7
pH = 7
pH = 4
pH = 4
pH = 5,6
pH = 5,6
Cu netratat
Cu oleofilizat
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 Timp [min]

Fig. 3

Tabelul 2

Nr. crt.	Lichidul care umectează	Suportul	Mediul	pH	θ			cos θ		
					1'	10'	20'	1'	10'	20'
1	Cerneală galben-verzui offset (G—V)	Cu oleof.	Sol. de umezie	4	75	71	68	0,258	0,325	0,374
2	Cerneală albastru-mijlociu offset (A—M)	"	"	4	70	66	63	0,342	0,406	0.453
3	G—V	"	"	5,6	89	87	85	0,017	0,052	0,087
4	A—M	"	"	5,6	83	80	75	0,121	0,173	0,258
5	G—V	"	"	7	51	48	46	0,629	0,669	0,694
6	A—M	"	"	7	47	44	41	0,682	0,719	0,754

Tabelul 3

Nr. crt.	Lichidul care umectează	Suportul	Mediul	Ph	θ			cos θ			σ_{la} dyn/cm	W_{al}		
					1'	10'	20'	1'	10'	20'		1'	10'	20'
1	Ulei de in polimerizat	Cr netr.	Sol. de umezire	4	149	151	154	—0,857	—0,874	—0,898	52,8	7,55	6,65	5,38
2	,,	Cr. hidrof.	,,	4	152	155	157	—0,882	—0,906	—0,920	52,8	6,23	4,96	4,22
3	,,	Cr netr.	,,	5,6	138	141	143	—0,743	—0,777	—0,798	52,1	13,38	11,61	10,52
4	,,	Cr. hidrof.	,,	5,6	141	145	147	—0,777	—0,819	—0,838	52,1	11,61	9,43	8,44
5	,,	Cr netr.	,,	7	150	154	157	—0,866	—0,898	—0,920	54,3	7,27	5,53	4,34
6	,,	Cr. hidrof.	,,	7	157	159	163	—0,920	—0,933	—0,956	54,3	4,34	3,63	2,38
7	Rășină fenol-formaldehidică	Cr netr.	,,	4	139	141	145	—0,754	—0,777	—0,819	61,2	15,02	13,64	11,07
8	,,	Cr. hidrof.	,,	4	147	152	156	—0,838	—0,882	—0,913	61,2	9,91	7,22	5,20
9	,,	Cr netr.	,,	5,6	134	137	141	—0.694	—0,731	—0,777	60,3	18,45	16,22	13,44
10	,,	Cr. hidrof.	,,	5,6	141	145	147	—0,777	—0,819	—0,838	60,3	13,44	10,91	8,56
11	,,	Cr. netr.	,,	7	152	155	157	—0,882	—0,906	—0,920	65,6	7,74	6,16	5,24
12	,,	Cr. hidrof.	,,	7	164	168	171	—0,961	—0,978	—0,987	65,6	2,55	1,44	0,85

(Romfen F 100) și în al doilea rînd, că după oleofilizare diferența lucrului mecanic de adeziune la aceleași pH-uri este mai accentuată pentru acest liant față de liantul pe bază de ulei de in polimerizat.

Panta lină a curbelor variației lucrului mecanic de adeziune în funcție de timp arată menținerea satisfăcătoare a echilibrului stabilit între elementele tipăritoare și netipăritoare în timpul procesului de imprimare și deci a selectivității în raport cu timpul, ceea ce determină

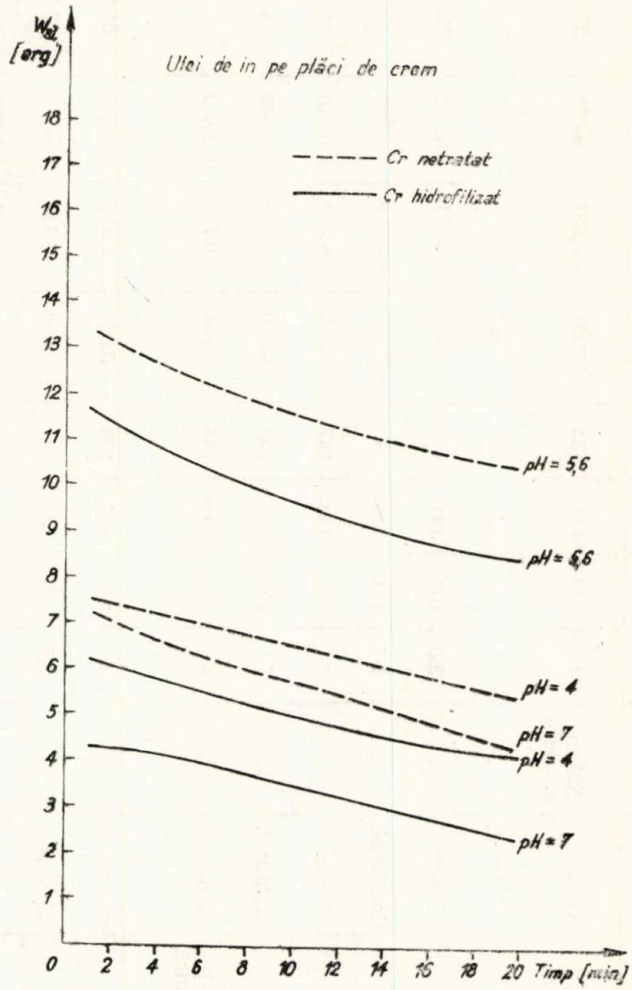


Fig. 4

o calitate aproximativ constantă a tiparelor în timpul procesului de imprimare offset.

De asemenea, din alura curbelor, analogă pentru diverse pH-uri, se mai poate trage concluzia că în limitele de pH=4—7, distrugerea în timp a elementelor oleofile, constatată în practica imprimării offset, nu

se datorește unor interacțiuni de natură chimică, ci este determinată de interacțiuni de natură mecanică. Mediul de pH cel mai adecvat procesului de imprimare offset corespunde unei neutralități a soluției de umezire.

Din tabelul 2, se observă că aceleași considerațiuni se aplică și cernelurilor fabricate pe baza lianților studiați, deoarece cos θ are o variație în raport cu timpul analogă cu W_{sl}

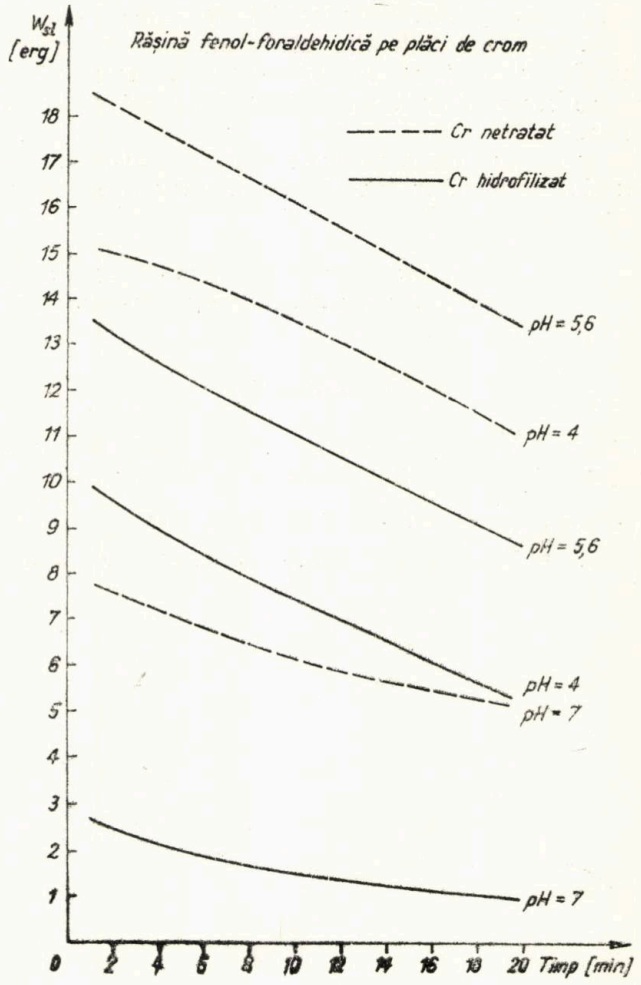


Fig. 5

Se constată că proprietățile superioare ale liantului pe bază de rășină fenol-formaldehidică modificată se mențin și în cernelurile fabricate cu acest liant (cerneala „Albastru mijlociu offset") față de cerneala fabricată pe bază de ulei de in polimerizat (cerneala „Galben verzui offset"). Această comportare demonstrează că este necesar ca,

în aprecierea proprietăţilor de imprimare ale unei cerneli poligrafice, să se ia în consideraţie nu numai proprietăţile ei fizico-structurale (viscozitate, grad de frecare, etc.), ci şi natura chimică a liantului, component ce joacă un rol esenţial în fenomenele de umectare.

2. Studiind fenomenele ce au loc pe suprafeţele de crom ale plăcilor bimetalice, s-au obţinut datele din tabelul 3.

Din datele de mai sus şi curbele reprezentative din figurile 4 şi 5, se constată că lucrul mecanic de adeziune, pentru aceiaşi parametri ca în cazul cuprului, are valori descrescătoare, ceea ce denotă o bună menţinere a proprietăţilor hidrofile ale cromului în raport cu timpul. Şi în acest caz, se observă că un pH neutru favorizează hidrofilitatea plăcii, ceea ce se reflectă printr-o valoare minimă a lucrului mecanic de adeziune la acest pH.

Cele cîteva concluzii trase în urma studiului efectuat, confirmă necesitatea aprofundării bazelor teoretice ale unor procese cu pronunţat aspect tehnologic.

Laboratorul de tehnologie poligrafică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" — Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Rietschel, O., Rupp, E,* Untersuchungen zu den Grenzflächenspannungen in der grafischen Technik. Institut für grafische Technik, Leipzig, 1960.

2. *Ţilenschi, S.,* Chimie coloidală, Ed. tehnică, Bucureşti, 1964.

3. *Putilova, I. N.,* Lucrări practice de chimie coloidală, Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

C.Z.: 551.571 : 63

ÜBER DIE TECHNISCHE HUMIFIZIERUNG VON EINJAHRPFLANZEN *

GHEORGHE C. CONSTANTINESCU

I. Mitt.

Stroh fällt in relativ konstanter Menge alljährlich als Nebenprodukt des Getreidebaues an und wird verschiedenen Verwendungen zugeführt. Die wichtigste davon ist der Einsatz als Futtermittel für die rauchfutterverzehrenden Tierarten. Soweit Stroh für diesen Zweck benötigt wird, ist es unter allen Umständen zur Verfügung zu stellen, da hier die in ihm enthaltene Cellulose und Hemicellulose durch die Pansenflora der Tiere direkt in Eiweiß umgewandelt wird. Über diese Verwertungsmöglichkeit hinaus stehen jedoch weitere Strohmengen zur Verfügung, deren sinnvoller Einsatz schon längere Zeit Gegenstand der Diskussion ist (1,2,3,4,).

Die industrielle Aufbereitung landwirtschaftlicher Pflanzenrückstände zeigt eine fallende Tendenz, weil ihre Rentabilität gegenüber anderen Kohlenstoffquellen sinkt und außerdem kommen noch unverhältnismäßig hohe Transport- und Lagerkosten für die sehr sperrigen Ausgangsmaterialien bei der Rohstoffversorgung hinzu. Nicht unerwähnt soll bleiben, daß auch Lignin in großen Mengen anfällt, das ein schwer absetzbares Nebenprodukt darstellt. Immerhin wurden und werden auf dieser Basis Cellulose, Furfurolderivate, Zucker Futterhefen, Ionenaustauscher und andere Produkte gewonnen (5,6,7,8,).

Man wird also auch in Zukunft das über den Futterbedarf hinaus vorhandene Stroh im Landwirtschaftsbetrieb selbst zu verwerten haben, und selbstverständlich bietet sich der Einsatz im Rahmen der organischen Düngung an. Hier wird es auch schon seit langem in Form von Staldung angewendet. Die Steigerung der Produktivität in der Landwirtschaft fordert jedoch gebieterisch, von der Stalldunggewinnung abzukommen. Dies dürfte insofern unbedenklich sein als auf humusreichen Böden die Frage der Form einer organischen Düngung von zweitrangiger Bedeutung ist, hier kommt es nur auf den Ersatz der mineralisierten organischen Masse an sich an. Auf Böden, die eine *Anreicherung* von organischer Substanz wünschenswert erscheinen lassen, kann ebenfalls auf den Stalldung verzichtet werden, da er in dieser Hinsicht, wie alle diesbezüglichen Versuchsergebnisse erkennen lassen, zu wenig effektiv ist, als daß er nicht durch andere Verfahren der organischen

* Manuskript am 5 märtz 1969 eingegangen.

Düngung, wie z.B. der Ausbringung von Kotschlamm (Gülle) und Stroh, ersetzbar ist. Die zahlreichen Arbeiten über die Strohdüngung beweisen, daß der Humusspiegel im Boden damit gehalten werden kann, wenn noch der Kot der Tiere dazu kommt (2,3,4,9,10,11,).

Auf vielen Böden kommt allerdings einer Anreicherung von stabilisierter organischer Substanz erhebliche Bedeutung zu, da man erkannt hat, daß hierdurch die Verwertung verstärkter Mineraldüngung verbessert wird. Die organische Fraktion des Bodens wirkt hierbei komplex durch folgende Eigenschaften : Sie ist stickstoffhaltig und mikrobiologisch angreifbar, so daß în relativ gleichmäßigem Fluß für das Pflanzenwachstum verwertbare N-Verbindungen zur Verfügung stehen, und außerdem wird ständig eine gewisse mikrobiologische Aktivität des Bodens garantiert. Die stabilisierten, dunkelgefärbten Fraktionen sind Polymere, polyvalente und schwerlösliche Elektrolite, die in starkem Maße die Fähigkeit des Ionenaustausches, der Ton-Humus-Kopplung und Pufferung besitzen. Sie verfügen außerdem über ein gewisses Vermögen zur Chelatbindung von Schwermetallionen, so daß diese über die löslichen im Gleichgewicht vorhandenen Spaltprodukte pflanzenaufnähmbar bleiben. Gleichzeitig zeigen zahlreiche Ergebnisse, daß geringe Mengen organischer Stoffe (hochdisperse Huminsäuren, einige Verbindungen der aromatischen Reihe, aber auch organische Säuren als Produkte der Desaminierung von Aminosäuren) eine positive Wirkung auf das Wachstum und die Entwicklung der Pflanzen ausüben (14,15). Humusbestandteile verossern ferner auf Grund ihrer Quellfähigkeit und geringen Dichte die wasserhaltende Kraft des Bodens sowie seine Porosität ; daher kommt es zu einem stabileren Krümelgefüge und beschleunigten Gasaustausch.

Es hat nicht an Versuchen gefählt, technisch syntetisierte organische Polymere, wie z.B. Polyakrilate, einzusetzen (17,). Die Erfolge sind ermutigend, doch sind die Produkte zumindest für Landwirtschaftliche Zwecke noch wesentlich zu kostspielig. Günstigere Aussichten bieten in dieser Hinsicht die aus Ligninsulfonsäuren durch Kondensation mit Aldehyden erhältlichen Kationenaustauscher obwohl hier nur eine der komplexen Humuswirkungen zur Verfügung steht. Wie man zeigen konnte (17,18,), ist es mit Hilfe von synthetischen Ionenaustauschern möglich, die Ertragsbildung auf sandigen Standorten nachhaltig zu verbessern. Vor der Entdeckung der vollsynthetischen organischen Ionenaustauscher wurden diese auf halbsynthetischen Wege durch Behandlung von Holz, Torf, Braun- oder Steinkohlen mit Mineralsäuren gewonnen (8, 19,). Mit Hilfe von konzentrierter Schwefelsäure kann man hier Sulfonierungen erzielen, die zu beträchtlicher Säurestärke und Austauschkapazität der Endprodukte führen. Gleichzeitig findet in diesem Falle eine starke Humifizierung statt, die für landwirtschaftliche Zwecke von Bedeutung ist, da auf diese Weise die mikrobiologische Angreifbarkeit vermindert wird.

Unsere Überlegungen gingen nun dahin, statt des Holzes bzw. der anderen gennanten Materialien das alljährlich im Landwirtschaftsbetrieb anfallende Stroh als Grundlage für die Gewinnung von Austauschaktiven Substanzen unter Anwendung *geringer Reagenzmengen* zu

prüfen. Gleichfalls galt es auch insbesondere, die dabei auftretenden Humifizierungsvorgänge zu verfolgen, da die daraus hervorgehenden Fraktionen höchstens Interesse im Hinblick auf die praktische Anwendung verdienen. Ferner kam es darauf an, durch den Einzatz von Nährstoffträgern wie Ammoniak, Phosphorsäure und Kaliumbisulfat zu prüfen, welche Möglichkeit der Gevinnung von Mehrnährstoffträgern sich hieraus ergeben.

Stroh besteht seiner chemischen Zusammensetzung nach aus folgenden Hauptkomponenten :

35—45 % Cellulose
25—35 % Hemicellulosen (Pentosane)
10—20 % Lignin
2— 8 % mineralische Bestandteile (Asche).

Die Cellulose und die Pentosanen werden im Vergleich zum Lignin schneller und außerdem vollkommen (zu Kohlendioxyd und Wasser) mineralisiert. Daher kam es im Zusammenhang mit der oben zum Ausdruck gebrachten Zielstellung auch darauf an, Cellulose und Pentosane in bodenbiologisch vermindert abbaufähige Formen zu überführen. Am einfachsten lassen sich diese Verbindungen durch Säuren verändern, und es können, unter verschiedenen Bedingungen, entweder Hydrolyse- oder Inkohlungsreaktionen stattfinden. Das Lignin bleibt bei einer Säurebehandlung jedoch nahezu unverändert. Damit aber auch das Lignin zumindest teilweise umgewandelt wird, haben wir in einer anderen Versuchsreihe die Säureeinwirkung in Gegenwart eines Oxydationsmittels (Wasserstoffperoxyd) vor sich gehen lassen.

Bei allen in Aussicht genommenen Reaktionen mußte die Angewandte Säuremenge im Verhältnis zum Stroh möglichst gering sein, damit sie nicht aus dem Endprodukt beseitigt werden brauchte, denn dadurch wäre gleichzeitig auch die wasserlösliche und die säurelösliche organische Substanz entfernt worden. Es war vorgesehen, die Säure nach der Reaktion mit Ammoniak, Kalkwasser oder Kalilauge zu neutralisieren. Dadurch war es möglich, gleichzeitig den Nährstoffgehalt des Endproduktes wesentlich zu erhöhen.

Faßt man die Anwendung verschiedener Säuremengen ins Auge, so ergäbe sich unter der Voraussetzung, daß der Verlauf des Prozesses und die Art der Säureeinwirkung auf die organische Substanz bekannt ist, die Möglichkeit, bereits zu Beginn der Reaktion den Nährstoffgehalt des Endproduktes zu kalkulieren und dementsprechend Erzeugnisse mit verschiedenen, bekannten Nährstoffgehalten herzustellen. Das Lösen dieser Voraussetzung war eine unserer Aufgaben.

Die Anwendung eines kleinen Hydromoduls-darunter versteht man das Verhältnis von Säuremenge (berechnet als Monohydrat) und der eingesetzten Strohmenge-von ca. 0,1—0,5 entspräche in unserem Fall einer Schwefelsäuremenge von 0,2—0,6 ml. für 1 g. Stroh. Dabei ergibt sich aber das Problem einer homogenen Durchmischung, damit die Säure vollkommen und gleichmäßig wirken kann. In der Praxis ist die Vermischung einer so geringen Flüßigkeitsmenge mit einem so große Volumen fester Substanz nahezu unmöglich, venn man sich nicht verschiedener Hilfsmittel bedient, die eine Homogenisierung des Ge-

misches gestatten und damit eine intensive Durchdringung der Komponenten ermöglichen (21).

Zu diesem Zweck könnte man den Vorgang der Vermischung

a) unter Druck (20)
b) in einer Kugelmühle
c) zwischen Walzen
d) in einer Schwingmühle (21, 22, 23)

vornehmen. Die drei letztgenannten Verfahren würden außerdem noch die Möglichkeit eines mechanischen Abbaues der Polymeren einschließen.

Unter den für die Säurebehandlung möglichen Bedingungen haben wir jene ausgewählt, die es gestatten, den Prozeß so zu führen, daß:

1. die Endprodukte eine höhere Abbauresistenz (also eine geringere Löslichkeit), einen größeren Humifizierungsgrad, ein höheres Sorptionsvermögen und einen höheren Nährstoffgehalt (besonders an Stickstoff) als das Ausgangsmaterial aufwiesen, und daß:

2. die zu verwendende Hydrolysemethode keine komplizierten Geräte erfordert, also bei eventueller Übertragung in die Praxis weniger zu einem industriellen als vielmehr zu einem lokal anwendbaren Verfahren tendiert, das eventuell *in einer transportablen Anlage* vorgenommen werden könnte (un die sehr hohe Transport-und Lagerungskosten für das Stroh zu beseitigen).

Für die unter Punkt 1 genannten Ziele wäre die Anwendung konzentrierter Mineralsäuren vorteilhaft; die Forderungen des Punktes 2 lassen jedoch keinen Einsatz von Druckanlagen, Walzenmischern oder ähnlichen zu.

Wir haben geringe Mengen verdünnter Säuren verwendet und deren Quantität so bemessem, daß das Gemisch einem Hydromodul 0,1—0,3 entsprach. Das Stroh quillt dabei auf und wird anschließend auf eine bestimmte Temperatur zwischen 70—130°C erwärmt. Während des Reaktionsablaufes verdampft das zur Vedünnung der Säure verwendete Wasser und die Säure wird konzentrierter. Unter solchen Bedingungen findet natürlich auch eine teilweise Hydrolyse der Polykohlenhydrate durch die zunächst verdünnten Säuren statt. Diese führt jedoch zu einfacheren Kohlenhydraten, die dann, ebenso wie die noch nicht angegriffene Substanz, dem Einfluß der Konzentrierten Säuren unterliegen. Aus der Literatur geht hervor (24), daß die dabei entstehende Hydrolyseprodukte besser lösslich bzw. leichter mineralisierbar sind als das ursprüngliche Material. Es war deshalb unsere Aufgabe, Bedingungen zu finden, die die Reaktion unter Bildung schwerere mineralisierbarer und wertvoller Endprodukte verlaufen lassen. Unserer Meinung nach können diese Bedingungen entweder durch physikalisch-chemische Faktoren oder durch mikrobiologische Einflüsse geschaffen werden. Wir dachten an eine thermische Behandlung im neutralen Milieu.

Der gesamte zu untersuchende Prozeß läßt sich also nach dem obengenannten in vier Schritte aufgliedern:

1. Die parzielle Hydrolyse der Cellulose und Pentosane mit verdünnten Mineralsäuren oder deren sauren Salzen (z.B. $KHSO_4$);

2. die Einwirkung konzentrierter Säuren auf die im ersten Teilvorgang entstandenen Hydrolyseprodukte, auf die noch unhydrolysierte Cellulose und nicht angegriffene Pentosane und auf des Lignin;

3. die Neutralisation mit Ammoniak;

4. die thermische Behandlung im neutralen Medium, bei 180°C.

Bei jenen Präparaten, die zusätzlich mit Wasserstoffperoxyd behandelt wurden, kommt in der ersten und zweiten Stufe noch eine Oxydation hinzu.

In der zweiten Stufe erfolgen unter dem Einfluß der konzentrierten Säuren die von unserem Standpunkt aus betrachtet wichtigsten Veränderungen, die zur Bildung von unlöslichen und humifizierten Produkten führen. Die Reaktionsgeschwindigkeiten in dieser Phase sind unterschidlich und hängen außer von der Konzentration der verwendeten Reagenzien auch von der Temperatur ab. Wir haben versucht, den Prozeß von dem Standpunkt an zu erfassen, an dem die Menge der Humussubstanzen ein Minimum darstellte, und ihn bis zum Beginn der Carbonisierung zu verfolgen. Als Kriterien für den Reaktionsverlauf wurden u.a. die Menge der gebildeten Humussubstanzen und deren Farbquotient sowie die Sorptionskapazität herangezogen. Die Wahl dieser Eigenschaften bot sich an, weil die Farbe des Gemisches allmählich (entsprechend der jeweiligen Reaktionsgeschwindigkeit) dunker wurde und so die Möglichkeit gab, den Prozeß genau zu verfolgen und ihn auch zur gewünschten Zeit zu unterbrechen.

Vorversuche für die Festlegung der Reaktionsbedingungen

Die Vorversuche mit den verschiedenen Schwefelsäurekonzentrationen sind in der Tabelle 1 wiedergegeben:

Tabelle 1

Nr.	Säurekonz. %	Temp. °C	Reaktionszeit Min.	Hum. %	FQ	Zeit d. term. Behdl. Min.	Hum. %	FQ %
1	0,5	90	1800	3,28	7,4	150	6,24	6,8
2	0,5	110	1080	3,14	7.3	150	5,90	6,8
3	0,5	130	540	2,84	7,5	150	9,85	6,2
4	1,0	110	2400	4,18	7,2	180	9,04	6,9
5	1,0	130	1800	3,52	7,6	180	6,14	7,0
6	2.5	110	300	6,24	6,8	180	16,30	5,0
7	5,0	110	180	6,42	6,9	120	9.50	5,0
8	5,0	110	360	4,22	7,4	120	3,25	6,0
9	5,0	130	120	5,86	6,9	120	8,12	5,2
10	10,0	110	180	5,84	6,3	180	6,12	5,7
11	10,0	130	120	4,22	6,8	120	2,14	6,2

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß der Gehalt an gebildeten Huminsubstanzen mit 3—6,4% verhältnismäßig gering ist, wenn die Präparate nicht der thermischen Behandlung unterworfen wurden. Die FQ sind hoch (6,8—7,5) und zeigen einen Inkohlungsprozeß an, ohne daß dabei die eigentlichen Huminsubstanzen auftreten. Wie zu erwarten war, sinkt die Reaktionszeit mit wachsender Temperatur bedeutend ab. Bei gleicher Temperatur führt die Zunahme der Reaktionszeit zu einer weitgehenden Inkohlung, die sich durch die schwarze Farbe der Präparate, die Abnahme der Huminstoffmengen und die Zunahme der zugehörigen FQ zeigt. Die Temperatur von 130°C erwies sich bei Anwendung von Schwefelsäure höherer Konzentrationen als die für den Humifizierungsprozeß ungünstigste. Man stellt fest, daß mit sehr verdünnten Säuren (0,5—1,0%) Präparate hergestellt werden können, deren Huminstoffegehalt bis 10% betragen kann. Die dafür benötigte Reaktinszeit ist jedoch sehr lang und liegt zwichen 500 und 2400 Min. Ein weiterer Nachteil dieser Präparate ist ihr niedriger Stickstoffgehalt (1—2%) nach der Neutralisation mit Ammoniumhydroxyd, der sich hauptsächlich aus wasserlöslichen Stickstoffverbindungen zusammensetzt. Das zeigt auch einen schwachen Einfluß der Säure auf das Stroh, besonders auf die Cellulose und das Lignin. Wir haben deshalb versucht, die Reaktionszeit bei hohen Temperaturen zu verkürzen. So ließen wir z.B. 300 ml 5% ige H_2SO_4 auf 50 g Stroh bei Zimmertemperatur einwirken. Das Stroh war nach 7 Tagen noch feucht und wurde dunkelgelb. Dannach wurde eine Erhitzung auf 110°C während 45 bzw. 55 Min. vorgenommen. Unter solchen Bedingungen verlief der Inkohlungsprozeß sehr rasch und unter starker Beeinflußung des Huminstoffgehaltes, des FQ und der Sorptionskapazität (SK), wie aus der nachfolgenden Tabelle erschtlich ist :

Tabelle 2

Zeit bei 110°C	Hum. %	FQ	SK mval/100 g
45 Min.	21,7	4,8	80
55 Min.	7.0	5,8	45

Der Nachteil einer solchen Verfahrenweise ist jedoch ganz deutlich : Infolge des raschen Reaktionsablaufes besteht keine Möglichkeit, den Vorgang zum beliebig gewünschten Zeitpunkt zu unterbrechen. Deshalb können an stelle von humifizierten Substanzen bereits verkohlte Produkte das Ergebnis der Reaktion sein.

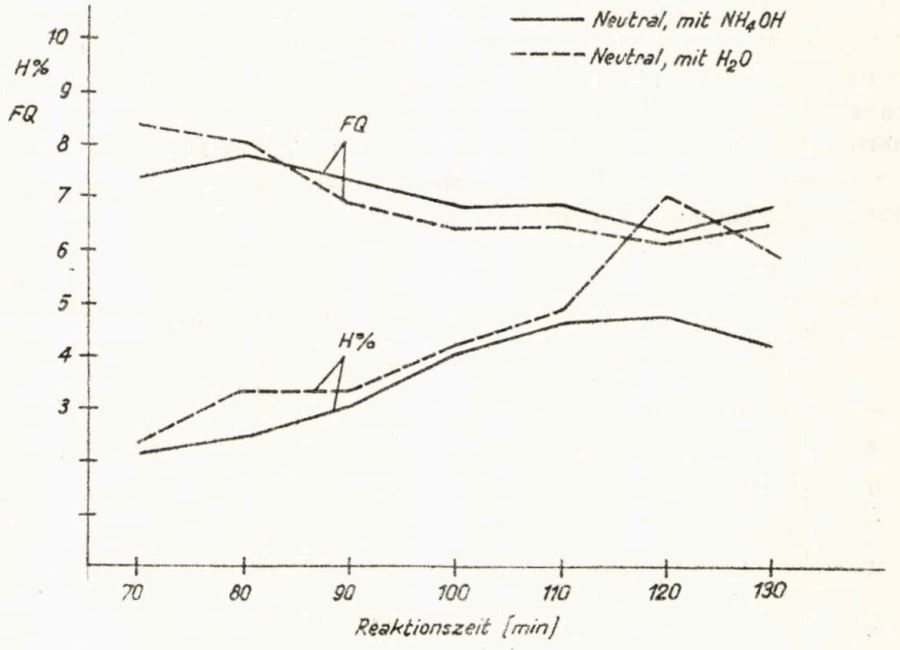
Um die Entwicklung des Humifizierungsprozesses in Abhängigkeit von der Reaktionszeit und der Neutralisation zu prüfen, haben wir folgende Vorversuche durchgeführt :

5 g Stroh wurden mit 30 ml 5% iger H_2SO_4 bei einer Temperatur von 70°C behandelt. Als sich das Gemisch hellbraun färbte, wurde die Reaktion unterbrochen und die Probe in zwei Teile geteilt. Ein Teil da-

von wurde mit 25% igem NH_4OH neutralisiert, der andere mit Wasser säurefrei gewaschen. Die Werte der Huminsubstanzen und die FQ sind in der Tabelle 3 und Darstellung 1 wiedergegeben:

Tabelle 3

Probe	Reactions-zeit Min.	Neutr. mit H_2O	Hum. %	FQ	Neutr. mit NH_4OH	Hum. %	FQ
A	70	H_2O	2,38	8,4	NH_4OH	2,38	7,5
B	80	H_2O	3,33	8,0	NH_4OH	2,50	7,9
C	90	H_2O	3,46	7,0	NH_4OH	3,10	7,3
D	100	H_2O	4,28	6,5	NH_4OH	4,23	6,9
E	110	H_2O	4,90	6,5	NH_4OH	4,70	6,9
F	120	H_2O	7,10	6,3	NH_4OH	4,80	6,3
G	130	H_2O	6,20	6,6	NH_4OH	4,30	6,9



Darst 1

Mit der Reaktionszeit nehmen die Huminsubstanzen zu und die FQ ab. In unserem Versuch ergab sich nach 120 Min. ein Maximum im Huminstoffgehalt. Von dieser Zeit an werden die Huminstoffe verkohlt.

Zwischen den Huminstoffwerten der Präparate, die mit Wasser gewaschen, und denen, die mit Ammoniak neutralisiert wurden, besteht eine eindeutige Differenz zugunsten der ersteren, obwohl die Werte nicht über 8% liegen. Bei 90°C sind die Huminstoffwerte, FQ und SK der Präparate, die 110 bis 130 Min. behandelt wurden, niedrig und unbedeutend, wie aus Tabelle 4 hervorgeht.

Tabelle 4

Probe	Reaktionszeit Min.	Neutral. Mit.	Hum. %	FQ	SK mval/100 g
A	120	NH_4OH	4,12	6,9	68,0
B	120	NH_4OH	4,00	7,6	65,8
C	130	NH_4OH	4,75	7,5	66,2

In einem anderen Vorversuch wurde der Einfluß der thermischer Behandlung auf die Eigenschaften der Präparate geprüft. Zu diesem Zweck wurde das Stroh mit 5% iger H_2SO_4 bei 90°C wie oben behandellt und nach 110,120 bzw. 130 Min. in je 3 Teile geteilt: Der erste Teil wurde nicht neutralisiert, der zweite wurde mit H_2O säurefrei gewaschen und an der Luft getrocknet, der dritte mit 25% igem NH_4OH neutralisiert und getrocknet. Diese drei Präparate wurden 3 Stunden einer thermischer Behandlung bei 190°C unterworfen. Die Werte der Huminsubstanzen, FQ und SK im Vergleich zu denen ohne thermische Behandlung sind in Tabelle 5 wiedergegeben.

Tabelle 5

Probe	Reakt. Zeit. Min.	Neutr. Mit.	Hum. %		FQ		SK mit therm. Behdlg.
			ohne therm. Behdlg.	mit therm. Behdlg.	ohne therm. Behdlg.	mit therm. Behdlg.	
A	110	nicht	4,38	3,8	6,8	7,0	32,1
B	120	neutr.	4,52	1,2	7,0	12,5	18,4
C	130	"	4,89	1,0	7,0	18,8	16,1
A_1	110	H_2O	4,30	5,62	6,8	6,5	24,2
B_1	120	H_2O	4,78	24,62	7,1	5,3	40,0
C_1	130	H_2O	4,93	22,50	7,3	5,3	80,0
A_2	110	NH_4OH	4,12	20,87	6,9	4,7	43.0
B_2	120	NH_4OH	4,00	26,25	7,6	4,7	70,0
C_2	130	NH_4OH	4,75	25,00	7.5	4,6	100,0

Aus der Tabelle 5 ist ersichtlich, daß das nicht neutralisierte Präparat einem Einfluß der konzentrierten Säure unterlag, was zu einer sehr starken Incarbonisierung führte. Der Gehalt an Huminsubstanzen ist auf 1% abgesunken, der FQ auf 18,8 gestiegen, die Sorptionskapazität nahm von 32 auf 16,1 mval/100 g ab. Die Zunahme des Huminstoffgehaltes bei den anderen Präparaten war sehr groß (von 4—26%). Ein Gehalt von 25—26% Hum. wurde in keinen der von uns ohne thermische Behandlung durchgeführten Versuche erreicht. Wichtig ist auch die Tatsache, daß durch Neutralisierung mit Ammoniak ähnliche Huminstoffmengen in einem größeren Zeitintervall gewonnen wurden, was praktisch zu wünschen ist. Eine gewisse Bedeutung hat auch die Abnahme des FQ bis 4,6 und die Zunahme der Sorptionskapazität bis ca. 100 mval/100 g.

Um den Einfluß des Wasserstoffperoxydes festzustellen, haben wir das Stroh (20 g) mit einem Gemisch von 120 ml 2,5% iger H_2SO_4 und 50 ml 10% igem H_2O_2 behandelt und bei 90°C gebracht. Nach der Hydrolyse erfolgte die Neutralisation mit NH_4OH dann das Trocknen an der Luft un die thermische Behandlung bei 185°C — 90 Minuten. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 6 zu ersehen.

Tabelle 6

Probe	Reak. Zeit. Min.	Lignin		Cellulose		Hum.		FQ		SK	
		vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach
		%	%	%	%	%	%	%	%	mval/loog	
A	795	9,94	20,94	22.55	23,21	1,76	13,25	4,57	4,82	97,99	58,81
B	810	18,45	23,07	15,82	22,00	2,34	13,26	4,24	4,82	113,63	58,32
C	825	21,21	21,75	12,69	23,40	2,85	14,15	4,10	4,80	125,73	59,80
D	840	20,73	23,45	13,89	21,74	4,14	14,92	4,05	4.81	127,57	66,63
E	855	20,68	24,65	15,59	21,66	5.47	15,68	4,05	4,79	133,03	71,50
F	870	20,10	26,54	17,84	20,34	6,99	15,74	3,88	4,78	133,16	70,91

Man stellt fest, daß Lignin anfangs abgespaltet wurde (das Stroh enthielt 15,9% Lignin). Dann bildeten sich Reversionsprodukte und Huminsubstanzen. Die Sorptionskapazität stieg bis ca. 133 mval/100 g an, und weiß im Vergleich zu den nur mit Schwefelsäure hergestellten Präparaten den günstigen Einfluß des Wasserstoffperoxydes auf. Die hohe Sorptionskapazität beruht wahrscheinlich auf der Bildung von Karboxylgruppen an der Celluloseketten. (21).

Die durchgeführten Vorversuche haben also gezeigt, daß die Verwendung einer Schwefelsäure der Konzentration unter 2,5% nicht angebracht ist (bei dem von uns verwendeten Hydromodul), da die Reaktionszeit dann sehr groß wird, Humifizierung und Austauschkapazität sehr gering sind. Die Vorversuche haben weiter gezeigt, daß wenn die Konzentration der Säure über 2,5% liegt, bei Temperaturen über 130°C eine zu schnelle und intensieve Inkohlung stattfindet; wenn an-

derseits die Schwefelsäurekonzentration oberhalb 5% liegt, bei über 110°C verläuft der Prozeß so schnell, daß die Reaktion nicht zur erwünschten Zeit unterbrochen werden kann. Die Vorversuche haben ferner gezeigt, daß die thermische Behandlung zu Produkten mit hohem Gehalt an Huminsubstanzen und höher Sorptionskapazität führt, wenn sie im neutralen Milieu vorgenommen wird, und daß im Falle der Anwendung von Schwefelsäure ohne thermische Behandlung keine Präparate mit hohem Gehalt an humifizierten Substanzen gewonnen werden können. Das Wasserstoffperoxyd hat einen günstigen Einfluß auf die Austauschkapazität der hergestellten Produkte aber nicht im gleichen Maße auf den Gehalt an Huminsubstanzen.

Es müßte nun alle wichtigen Eigenschaften und Stoffgruppen verfolgt werden, um die besten technischen Bedingungen zu finden. Darüber werden wir in anderen Mitteilungen berichten.

Lehrstuhl für allgemeine Chemie
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest

LITERATUR

1. *Kopetz, M.* — Zur Frage der Einackerung von Stroh. Der Förderungsdienst, Heft 8. 1960.
2. *Schmidt, K.* — Eine Literaturübersicht über den gegenwärtigen Stand der Strohdüngung. Z. f. Landw Versuchs. -u. Untersuchungswesen 10,5—21, 1964.
3. *Schmalfuß, K., G. Kolbe* — Feldversuche mit Strohdüngung. Dtsch. Landwirtsch. 10, 343—347, 1959.
4. *Schmalfuß, K., G. Kolbe* — Wirkung der Strohdüngung. Vortrag bei den wissentschaftlichen Veranstaltungen der Deutsche Akademie der Landwirtsch. zu Berlin, 2—6 VII, Leipzig, 1965.
5. *Winnacker-Weingaertner* — Tehnologie chimică organică, Vol. I şi II. Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
6. *Mesnil, M.* — Furfurol et Agriculture. Industr. agric. alim. 305, 1954.
7. *Grütz, W.* — Über die Wirkung von technischen Lignin im Vergleich zu anderen organischen Düngemitteln auf Pflanzenertrag und Boden. Z. Pflanzenernähr., Düng., Bodenkunde, 49, 197—209, 1950.
8. *Ionescu, T., M. Goruneanu, G. Tudorache* — Studiul proprietăţilor unor cationiţi obţinuţi din lignină. Bul. Inst Politehn. Bucureşti, 20, Fasc. 3, 121—128, 1958.
9. *Selke, W.* — Die Düngung. Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1965.
10. *Whitehead, C. D.* — Einige Aspekte des Einflusses der organischen Substanz auf die Fruchtbarkeit des Bodens. Commonwealth Bur. Soil Sci., Soils Fertilizers 26, 217—223, 1963.
11. *Sauerlandt, W., K. Gierke* — Der Einfluß jährlicher Strohgaben auf die Erträge und einige Bodeneigenschaften. Z. Pflanzenernähr., Düng., Bodenkunde, 94, 104—115, 1961.

12. *Rauhe, K.* — Probleme der Humuswirtschaft. Vortrag bei den wissenschaftlichen Veranstaltungen der Deutschen Akademie der Landwirtsch. zu Berlin; 2—6 VII, Leipzig, 1965.

13. *Müller, G.* — Biologische Probleme der Humusbildung und Humusdynamik. G. Fischer-Verlag, Jena, 1966.

14. *Kloke, A.* — Die Huminstoffe des Bodens als Wachstumsfaktoren. P. Parey--Verlag, Berlin, 1963.

15. *Kononowa, M. M.* — Die Humusstoffe des Bodens .DVW, Berlin, 1958.

16. *Kullmann, A.* — Verbesserung bodenphysikalischer Eigenschaften, besonders der Bodenstruktur, durch Produkte der chemischen Industrie. Forschrittsberichte für die Landwirtsch. 10, 1964.

17. *Bergmann, W., St. Wahl, Chr. Faust* — Gefäßvedsuche mit „Ionenaustauschernährstoffen". 1. Mitt. Die zeitliche Aufnahme von „Ionenaustauschernährstoffen" im Vergleich zu mineralischen Düngergaben. Z. Pflanzenernähr., Düng., Bodenkunde, 93, 137—148, 1961.

18. *Bergmann, W., St. Wahl, Chr. Faust.* — Gefäßversuche mit „Ionenaustauschernährstoffen". Ausnutzung und Wirkung von „Ionenaustauscherphosphorsäure, im Vergleich zu mineralischer Düngerphosphorsäure Phosphorsäure, 21, 102—112, 1961.

19. *Naumenn, G.* — Wesen und Eigenschaften von Ionenaustauschern. Chem. Techn. 7, 225—266, 1955.

20. *Odinzow, N. P.* — Woprossy gidrolisa himii drewessiny i lessochimii. Trudy instituta lessochosijaistwennych problem i himii drewessiny. Isdatelstwo akad, nauk. latwisskoi SSR, Riga, 1959.

21. *Odinzow, N. P.* — Gidrolis rastitelnyh materialow konzentrirowannoi sernoi kislotoi. Gidrolisnaia i lessochimitscheskaja promyschlennossti SSSR, nr. 3, 1—5. 1961.

22. *Tschalow, W. H.* — Mechanochemischer Abbau der Polysaccharide in Anwesenheit von Schwefelsäure. Hydrolysen-u. holzchem. Ind. (UdSSR), 15, Nr. 7, 4—7, 1962.

23. *Beinart, I. I., Kalnisch A. I.* — Die Hydrolyse von Holz mit geringen Mengen von konzentrierter Schwefelsäure in Gegenwart organischer Flüssigkeiten. Hydrolysen-u. holzchem. Ind. (UdSSR), 15, Nr. 6, 3—5, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

MECANICĂ

C.Z. : 629.19

ÎNCĂLZIREA ȘI SUPRASARCINILE CE APAR PE RACHETE SAU NAVE COSMICE LA REINTRAREA ÎN ATMOSFERĂ *

C. GUȚĂ

Încălzirea rachetelor, mai larg, a aparatelor cosmice, la reintrarea în straturile dense ale atmosferei (70—80 km altitudine) este foarte însemnată și în același timp, periculoasă, dacă nu este controlată și menținută între anumite limite.

În cazul navelor cosmice sovietice și americane, lansate la sfîrșitul anului 1968 și în cursul anului 1969 s-a văzut că straturile de aer din imediata apropiere a învelișului au fost puternic încălzite, ionizate și aduse în stare de plasmă.

De aceia, reintrarea în atmosferă trebuie să se facă după anumite traiectorii, sub anumite unghiuri, pentru ca încălzirea să fie minimă. Oricare ar fi traiectoria de reintrare, ea este caracterizată prin trei segmente distincte și anume :

a) *segmentul inițial*, situat la limita superioară a atmosferei,

b) *segmentul mediu*, pe care se face coborîrea și

c) *segmentul final*, din imediata apropiere a locului stabilit pentru aterizare (amerizare).

Mișcarea navei cosmice pe segmentul inițial este în funcție de viteza de intrare. Astfel, dacă nava la reintrare amorsează o traiectorie destul de joasă, atunci energia cinetică este mult mai mică decît cea necesară pentru păstrarea mișcării orbitale și în consecință, energia continuă să se consume prin frecare, iar aparatul cosmic să piardă treptat din înălțime. Ieșirea de pe această traiectorie se face prin punerea în funcțiune a motoarelor de comandă sau de frînare. Un alt caz interesant de reintrare este acela cînd nava cosmică se înscrie pe o traiectorie eliptică foarte alungită (de mare excentricitate) astfel ca unghiul de reintrare (Θ) să fie suficient de mic. De asemenea, se mai întîlnesc traiectorii de reintrare reprezentînd segmente de parabolă sau hiperbolă (fig. 1). De obicei, pe segmentul mediu motoarele nu sînt puse în funcțiune și comanda se realizează cu ajutorul cîrmelor aerodinamice, variind unghiul de incidență α, sau pe cel de alunecare β.

În cazul cînd se face aterizare (sistem sovietic), pe segmentul mediu al curbei de reintrare, trebuie să se asigure micșorarea energiei cinetice a vehicolului, astfel încît viteza în momentul impactului cu

* Manuscris predat la redacție 15 decembrie 1968.

solul să fie minimă și admisibilă pentru echipaj, aparatură sau structura de rezistență.

Pentru a determina legea de comandă (de dirijare) trebuie cunoscut în general [7]: dependența forțelor aerodinamice de caracteristicile

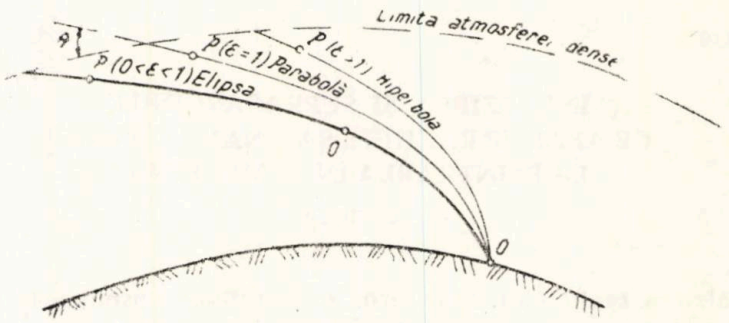


Fig. 1

atmosferei, variația probabilă a caracteristicilor de zbor ale vehicolului, mărimea și caracterul suprasolicitărilor ce apar sub acțiunea forțelor aerodinamice precum și fenomenele ce apar ca o consecință a încălzirii obiectului respectiv prin deplasarea într-un mediu rezistent.

În figura 2, este arătată curba de coborîre ($P_1'O''$) pentru un obiect cosmic artificial oarecare. Aici deosebim un sistem central de coordonare $(O\,\xi\,\eta\,\zeta)$ avînd originea în centrul Pămîntului.

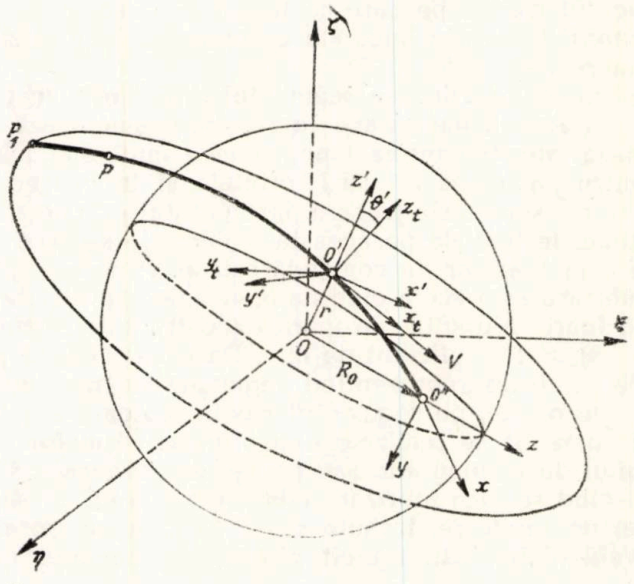


Fig. 2

A fost introdus de asemenea un sistem de coordonate de transport ($O' x_t y_t z_t$), care își are originea în centrul de greutate al aparatului cosmic, viteza de zbor, V fiind îndreptată după axa $O x_t$ a acestui sistem iar axa Z_t este conținută în planul determinat de raza vectoare r și viteza V. Poziția în spațiu a sistemului de transport în punctul 0' este arătată în figura 4.

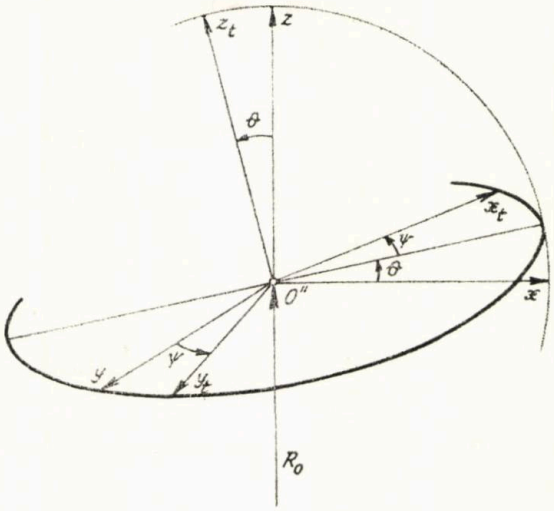


Fig. 3

Sistemul $0'x'y'z'$ este un sistem mobil de coordonate, avînd axa z', verticală și în continuarea razei vectoare. Sistemul $O''xyz$, are axele dirijate similar cu sistemul mobil, dar originea o are în punctul de impact a obiectului cosmic cu solul (fig. 3).

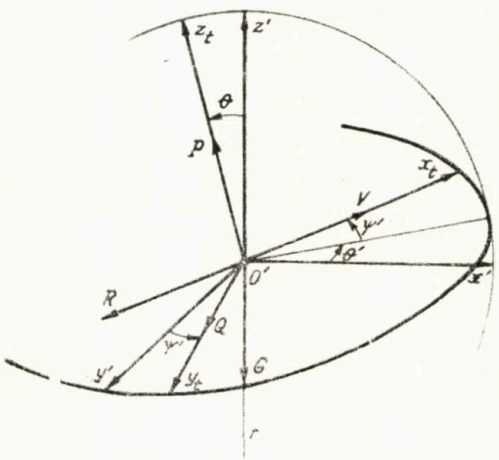


Fig. 4

Avînd componentele forței aerodinamice (P, Q, R) după cele trei axe ale sistemului de transport și greutatea aparatului cosmic, obținem prin proiecție, ecuațiile de mișcare ale centrului de greutate.

$$m\frac{dV}{dt} = -R - mg\sin\theta'\cos\psi'$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = P - mg\cos\theta' \tag{1}$$

$$-mV\frac{d\psi}{dt} = Q - mg\sin\theta'\sin\psi'$$

Componentele forței aerodinamice au expresiile :

$$P = \frac{\varrho}{2} S V^2 C_z \quad \text{(Portanța)}$$

$$Q = \frac{\varrho}{2} S V^2 C_y \quad \text{(Forța laterală, de alunecare)} \tag{2}$$

$$R = \frac{\varrho}{2} S V^2 C_x \quad \text{(Rezistența la înaintare)}$$

unde pentru densitatea mediului ambiant se poate lua :

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + a h} \tag{3}$$

h fiind înălțimea curentă față de sol, unde se află aparatul cosmic ϱ_0 densitatea aerului la sol, iar „a" o constantă care se determină din tabelele atmosferei standard.

Se consideră, de asemenea că unghiul θ va avea valori mici, un timp destul de mare, pentru care fapt se pot admite aproximațiile.

$$\sin\theta' \simeq \theta' \tag{4}$$

$$\cos\theta' \simeq 1 \tag{5}$$

În același fel se consideră mic și unghiul ψ' consecință ce face ca proiecția greutății proprii după axa x_t să fie mult mai mică decît rezistența la înaintare, din care motiv se neglijează.

Prima ecuație din sistemul (1) devine :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C_x S}{2m}\varrho V^2 - g\theta' \tag{6}$$

Notînd prin l_e lungimea arcului curbei de coborîre, PO'' (Fig. 2), prin l, lungimea curentă a arcului PO', obținem legătura între θ' și θ sub forma :

$$\theta' = \theta - \frac{1}{R_\varrho}(l_e - l) \tag{7}$$

$R_0 = 6370$ km, este raza medie a Pământului.

Viteza de parcurgere a arcului curbei de coborîre este :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{R_0}{R_0 + h} V \cos\theta' \cos\psi' \tag{8}$$

Derivînd (7), în raport cu timpul, ținînd seama de (5) și de faptul că $\cos\psi' \simeq 1{,}0$, obținem :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} - \frac{V}{R_0 + h} \tag{9}$$

În aceste condiții ecuația (2) din sistemul (1) devine :

$$V\frac{d\theta'}{dt} = \frac{\varrho S}{2m} V^2 C_z - g + \frac{V^2}{R_0 + h} \tag{10}$$

În sfîrșit, pentru componenta laterală a mișcării se obține :

$$V\frac{d\psi}{dt} = -\frac{C_y S}{2m}\varrho V^2 - \{g\theta' \; V\} \tag{11}$$

La ecuațiile de mișcare (6), (10) și (11) în care se neglijează termenul $g\theta'\psi'\}$ urmează a se adăoga viteza de coborîre a rachetei sau navei cosmice :

$$v = \frac{dh}{dt} = V\theta' \tag{12}$$

1. Încălzirea și suprasarcinile pentru aparate cosmice nedirijate

Aceste aparate evoluează, de obicei, după traiectorii balistice, în absența forțelor portante sau laterale ($C_z = 0'$; $C_y = 0$).

În relația (10) se poate considera cu o aproximație suficient de bună :

$$g \simeq \frac{V^2}{R_0 + h} \quad \text{și} \quad \frac{dh}{dt} = V\theta'_p \tag{13}$$

ceea ce conduce la $\theta = \theta'_p$ = const, adică coborîrea se poate face cu unghiul θ, pe care l-a avut vehicolul la intrarea în păturile dense ale atmosferei (fig. 2).

Înlocuind relația (3) și (12) în ecuația (6) se obține :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_x S \varrho_0}{2m\theta'_p} \frac{dh}{1 + ah} \tag{14}$$

care integrată între punctul P al traiectoriei și un punct oarecare, devine :

$$V = V_p \left(\frac{1 + ah_p}{1 + ah}\right)^A = V_p \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^A \tag{15}$$

unde

$$A = \frac{C_x S \varrho_0}{2 m_a \theta'_p} \tag{16}$$

Pentru determinarea fluxului maxim de căldură în punctul critic, preluat de către înveliș prin convecție se pornește de la relația [1,2,4]:

$$\dot{q}_{cr} = C_q \sqrt{\frac{\varrho}{r_c}} V^3 \tag{17}$$

Cq fiind coeficientul de transfer de căldură și depinde de compoziția și structura atmosferei iar r_c este raza de curbură a învelișului în punctul critic (de obicei vîrful rachetei sau aparatului cosmic).

Pentru ca $\dot{q}_{cr}$ să fie minim, din punct de vedere al razei de curbură, aceasta trebuie să fie cît mai mare. De aceea, unele nave cosmice au vîrful rotunjit.

Dacă r_c este dat, maximul funcției (17) este determinat de:

$$\frac{d}{d\varrho}(\sqrt{\varrho}\, V^3) = 0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{d}{dh}(\sqrt{\varrho}\, V^3) = 0 \tag{18}$$

Deci: înlocuind (3) și (15) în (18) se obține:

$$\frac{d}{d\varrho}(\sqrt{\varrho}\, V^3) = \frac{d}{d\varrho}\left[\sqrt{\varrho}\, V_p^3 \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{3A}\right] = V_p^3 \left(\frac{1}{2} - 3A\right) \varrho^{-1/2} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{3A} = 0$$

Deci maximul fluxului termic se obține pentru:

$$A = \frac{1}{6} \qquad \text{sau} \qquad \frac{C_x S}{2 m} = \frac{a \theta'_p}{6 \varrho_0} \tag{19}$$

Ultima relație (19) ne indică valoarea așa numitului coeficient „balistic" al aparatului cosmic.

Fluxul termic maxim are expresia:

$$(\dot{q}_{cr})_{max} = \frac{C_q}{\sqrt{r_c}} \varrho_p^{1/2} V_p^3 \tag{20}$$

Valoarea medie a fluxului termic se scrie [3]

$$q_m = \frac{1}{4} C'_f \varrho V^3 \tag{21}$$

C'_f, este coeficientul echivalent de frecare al suprafeței învelișului. Cantitatea totală de căldură rezultată din frecare este:

$$Q = S_{ac} \int_{tp}^{t} \dot{q}_m \, dt \tag{22}$$

sau

$$Q = \frac{1}{4} C'_f S_{ac} V_p^3 \int_{\varrho p}^{\varrho} \frac{\varrho_p}{a} \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{3A} \frac{d\varrho}{\varrho} \tag{23}$$

care după integrare ne dă :

$$Q = \frac{1}{4} C_f' \cdot V_p^3 \frac{\varrho_0}{a} \frac{1}{3A+2} \left[1 - \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{3A}\right] \tag{24}$$

Din (24) se vede că prin coborîrea din punctul P al traiectoriei, pînă la o înălțime curentă, dată, cantitatea de căldură rezultată din frecare este cu atît mai mare cu cît Θ' este mai mare [relația (16)] și coeficientul balistic $\frac{C_x S}{2m}$ este mai mic.

Temperatura punctului critic se determină cu ajutorul legii radiației a lui Ștefan-Boltzmann :

$$T_{cr} = \left(\frac{1}{0{,}9\,\sigma} \dot{q}_{cr}\right)^{1/4} \tag{25}$$

unde σ este constantă lui Ștefan-Boltzmann, 0,9 este gradul de negru al învelișului.

Deci :

$$(T_{cr})_{max} = \frac{C_q}{\sqrt{0{,}9\,\sigma\, r_c^2}} \varrho_p^{1/8} V_p^{3/4} \tag{26}$$

Suprasarcinile [4, 6] respectiv factorul de sarcină *) pentru cazul coborîrii după o curbă balistică ($C_z = 0$) este dat de formula :

$$n = \frac{R}{m\,g} \tag{27}$$

R, fiind rezistența la înaintare, iar g accelerația gravitației, care poate fi considerată constantă (La 80 km. accelerația diferă cu 2,5% față de cea de la sol, eroarea scăzînd în timpul coborîrii).

Se obține, considerînd și ultima relație din (2)

$$n = \frac{C_x S}{2mg} \varrho V^2 \tag{28}$$

Admițînd și constanța coeficientului balistic, rezultă :

$$\frac{\partial n}{\partial \varrho} = \frac{C_x S}{2mg} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho V^2) \tag{29}$$

sau :

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho V^2) = V_p^2 \left[\left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{2A} - 2A\varrho \left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^{2A-1} \frac{\varrho_p}{\varrho^2}\right] = 0$$

*) Factorul de sarcină indică de cîte ori accelerația reală este mai mare decît accelerația gravitației. De obicei, $n = 5 \div 15$, în funcție de misiunea rachetei sau dacă la bordul acesteia este sau nu echipaj.

Din ultima relație, se deduce că factorul de sarcină va fi maxim, pentru

$$A = \frac{1}{2} \qquad \text{sau} \qquad \frac{C_x S \varrho_0}{ma\,\theta'_p} = 1 \tag{30}$$

Din (30) se poate stabili și legea de dirijare, sau valoarea unghiului θ'_p

Valoarea maximă a factorului de sarcină va fi:

$$n_{max} = \frac{C_x S}{2mg} \varrho_p V_p^2 \tag{31}$$

2. Încălzirea și suprasarcinile pentru aparate cosmice dirijate ($C_z \neq 0$; $\theta' \neq$ Const)

Pornind de la ecuațiile (10), (12) și (4) se obține:

$$\theta'\, d\theta' = \frac{S \varrho_0 C_z}{2m} \cdot \frac{dh}{1 + ah} \tag{32}$$

Care integrată și revenind la variabila ϱ, devine:

$$\varrho = \varrho_p e^{-\frac{ma}{S \varrho_0 C_z} (\theta'^2_p - \theta'^2)} \tag{33}$$

Din relațiile (6) și (10) se deduce:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta'} = -\frac{C_x}{C_z} \tag{34}$$

sau după integrare

$$V = V_p e^{-\frac{C_x}{C_z} (\theta' - \theta'_p)} \tag{35}$$

Avînd expresiile care definesc pe ϱ (33) și viteza V (35) se înlocuiesc în (17), obținînd valoarea fluxului termic în punctul critic:

$$q_{cr} = \frac{C_q}{\sqrt{r_{cr}}} \varrho_p^{1/2} V_p^2 e^{-\frac{ma}{2 \varrho_0 S C_z} (\theta'^2_p - \theta'^2) + 3 \frac{C_x}{C_z} (\theta'_p - \theta')} \tag{36}$$

Pentru a obține valoarea maximă a fluxului termic se procedează ca și în cazurile precedente. Astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \theta'} (\varrho^{1/2} V^3) = 0 \tag{37}$$

De unde deducem condiția de maximum:

$$\frac{ma\theta'}{\varrho_0 S C_z} - 3 \frac{C_x}{C_z} = 0 \quad \text{Deci:} \quad \theta' = 3 \frac{S C_x}{ma} \varrho_0 . \tag{38}$$

În final se obține :

$$(\dot{q}_{cr})_{max} = \frac{C_q}{\sqrt{r_{cr}}} \varrho_p^{1/2} V_p^3 e^{-\left(-3\frac{C_x S \varrho_1}{ma} + \theta'_p\right)\left[\frac{ma}{2\varrho_0 S}\left(\theta'_p + 3\frac{C_x S \varrho_0}{ma}\right) + 3\frac{C_x}{C_z}\right]} \tag{39}$$

Suprasolicitările în cazul traiectoriilor considerate sînt definite de relația :

$$n = \frac{\sqrt{P^2 + R^2}}{mg} = \frac{C_x S}{2mg}\sqrt{1 + \frac{C_z^2}{C_x^2}} \cdot \varrho \cdot V^2 \tag{40}$$

Se admite constanța coeficienților aerodinamici în timpul coborîrii. Înlocuind în (40) relațiile (33) și (35) se deduce :

$$n = \frac{C_x S}{2mg}\sqrt{1 + \frac{C_z^2}{C_x^2}}\, \varrho_p e^{-\frac{ma}{\varrho_p S C_z}\left(\theta'^2_p - \theta'^2\right)} V_p^2 e^{+2\frac{C_x}{C_z}\left(\theta'_p - \theta'\right)} \tag{41}$$

sau :

$$\frac{\partial n}{\partial \theta'} = \frac{\partial}{\partial \theta'}(\varrho V^2) = 0 \tag{42}$$

Valoarea unghiului de coborîre, care face ca factorul de sarcină să fie maxim se obține din (42).

$$\theta' = \frac{S C_x}{ma}\varrho_0 \tag{43}$$

Cu acestea, factorul de sarcină devine :

$$n_{max} = \frac{C_x S}{2mg}\sqrt{1 + \frac{C_z^2}{C_x^2}}\, \varrho_p V_p^2 e^{x p}\left\{\left(\frac{S C_x}{ma}\varrho_0 - \theta'_p\right)\times\right.$$

$$\left.\left[\left(1 + \frac{ma}{\varrho_0 S C_z}\theta'_p\right) - 2\frac{C_x}{C_z}\right]\right\} \tag{44}$$

Pornind de la relațiile stabilite în prezenta lucrare, folosind metoda expusă, pot fi deduse expresiile cantitative pentru încălzire și factorul de sarcină corespunzătoare și altor metode de dirijare a aparatelor cosmice pe curba de coborîre.

Catedra de aeronave și aparate de bord
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Detra R. W., Hidalgo H.,* — Generalized heat transfer formulas and graphs for nose cone re-entry into the atmosphere, ARS Journal 31, Nr. 3, 1961.

2. *Lees L.,* — Recovery dynamics-heat transfer at hypersonic speeds in a planetary atmosphere, Space Technology, Ed. by Seifert HS, Johw Wiley, 1959.

3. *Ponomarev V. M.,* — Teoria upravlenia dvi jeniem cosmiceschih apparatov. Editura Nauca, Moscova, 1965.

4. *Guță C, Marinescu Al,* — Calculul și Construcția Rachetelor, Editura Didactică și Pedagogică 1967.

5. *Niță M. M, Andreescu D, St.,* — Zborul rachetei, Editura militară 1964.

6. *Petre Augustin,* — Teoria aeroelasticității. Statica. Editura Academiei R. S. România, 1966.

7. *Alexeev K. B.,* — Bebenin G. G., Upravlenie cosmiceschim letatelnim apparatom, Mașinostroenie, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

ORGANE DE MAȘINI

C.Z. : 621.81 : 678

INFLUENȚA ADAUSURILOR AMELIORATIVE ÎN BUCȘELE DIN MATERIAL PLASTIC ASUPRA CÎMPULUI DE TEMPERATURĂ ÎN FILMUL DE LUBRIFIANT *

GH. MANEA, M. PASCOVICI

1. *Factorii influenți asupra distribuției de temperaturi în film*

1.1. Distribuția temperaturii în filmul de lubrifiant interesează în mod deosebit, deoarece aceasta influențează variația viscozității și, în final, însăși portanța și poziția fusului în cuzinet. Cercetările [1] au arătat că, în ipoteze simplicatoare chiar — film mărginit de pereți plani, conducători de căldură — această variație este o funcție multidependentă de forma :

$$\eta = \eta_i \left(\frac{h}{h_i}\right)^{4A_3k} \cdot e^{Q(h)} \left\{1 - A_1\left[\frac{k}{\eta_i}(t_a - t_0) + 1\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_{h_i}^{h} \left(\frac{h}{h_i}\right)^{-4A_3k} \cdot e^{-Q(h)} \cdot dh \right\}$$

în care reprezintă

η — viscozitatea lubrifiantului la intrare ;
h — înălțimea variabilă a filmului ;
h_i — înălțimea maximă a acestui film la intrare ;
$A_{1,2}$ — funcții multidependente :

$$A_{1,2} = f(c_0, v, h_m, \alpha_{1,2}, \lambda_{1,2}, T_1, T_0)$$

c_0 — căldura specifică a lubrifiantului ;
v — viteza relativă a celor două suprafețe ;
h_m — grosimea filmului, în punctul cu presiune maximă ;
$\alpha_{1,2}$ — coeficienții de convecție pereți solizi — mediu exterior ;
$\lambda_{1,2}$ — coeficienții de conductivitate termică a pereților ;
t_a — temperatura la intrare ;
t_0 — temperatura mediului exterior ;
k — un coeficient care caracterizează variația viscozității cu temperatura pe porțiuni reduse.

---

* Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București — 1—3 noembrie 1968.

Prezența parametrilor calorici ai materialului cuzinetului relevă influența naturii lui. Astfel, în cazul materialelor plastice, în funcție de grosimea bucșei și de jocul relativ ψ, raportul dintre coeficienții „globali" de transfer de căldură α^*_{Bz} (pentru bronz) și α^*_{mp} (pentru material plastic) poate atinge valori pînă la circa 1,8 [2]. Această influență are nu numai un efect cantitativ asupra căldurii cedate spre exterior ci, mai important, asupra variației temperaturii în film și a ecartului dintre temperatura maximă t_{max} și temperatura medie t_{med}, de interes îndeosebi pentru materialele plastice.

Curbele din fig. 1, valabile pentru bronz, arată o alură aproape simetrică, sensibil diferită de cele obținute cu cuzinetul din material plastic; raportul $\frac{t_{max}}{t_{med}}$ are valori de asemenea diferite (fig. 2).

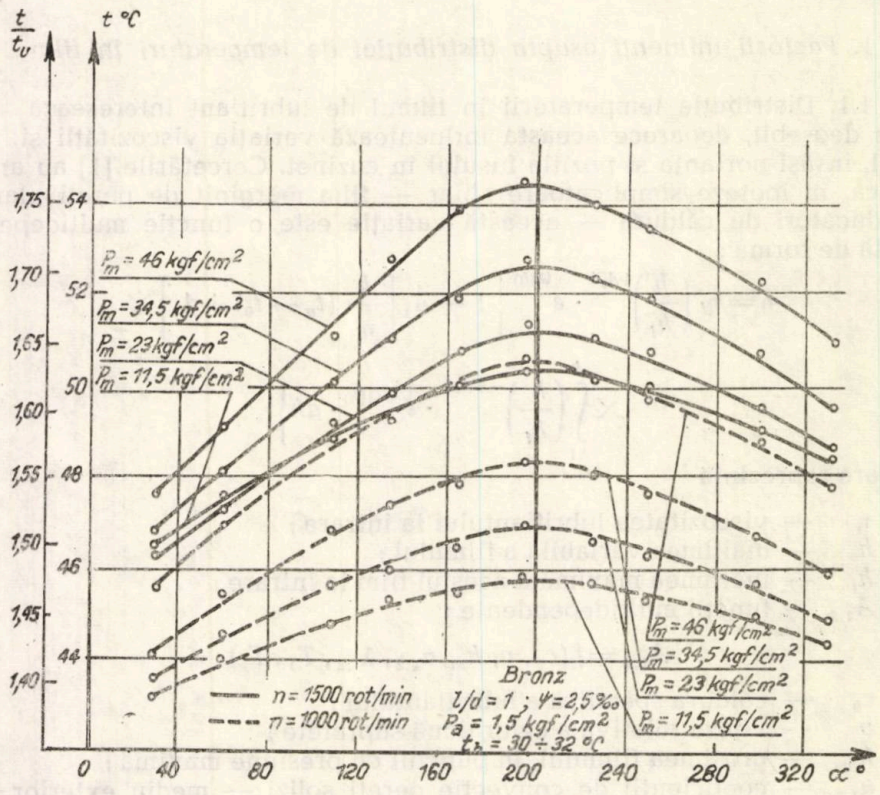


Fig. 1

Înălțimea variabilă h a filmului de lubrifiant, în cazul cuzineților din material plastic are o notă caracteristică deoarece, așa cum au arătat cercetări recente [3], în afara înălțimii primare „geometrice", sînt de luat în considerație deplasările datorite deformațiilor locale sub efectul presiunilor.

1.2. Efectul favorabil al prezenței grafitului asupra procesului de frecare între suprafețe este bine cunoscut. Micșorarea coeficientului de frecare și, implicit, a cantității de căldură generate, prin înglobarea de grafit în bucșele din poliamidă, este o certitudine. Mai puțin stăpînit este efectul cantitativ al adaosului de grafit asupra coeficienților de convecție lubrifiant-cuzinet și de conductivitate în material. Toate aceste procese însă, în final își oglindesc acțiunea conjugată, globală, în variația temperaturii în filmul de lubrifiant, aspect abordat în lucrarea de față. Cum, mai ales în cazul cuzineților din material plastic,

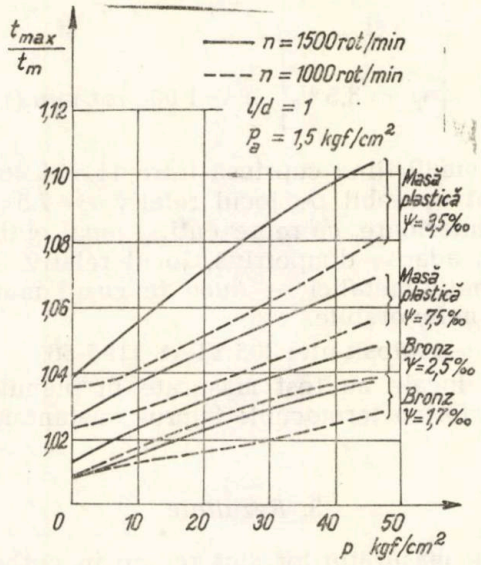


Fig. 2

transportul de căldură prin lubrifiant are un rol determinant, iar acesta este dependent, între altele, de raportul parametrilor geometrici $\frac{l}{d}$ (l — lungimea, d — diamentrul fusului), și locul relativ $\psi = \frac{R-r}{r}$, s-a urmărit simultan punerea în evidență și a influenței acestor factori.

2. *Programul de încercări*

2.1. Au fost încercate comparativ bucșe din poliamidă indigenă, Relon tip P și din poliamidă străină cu grafit, în cazul de față, cu caracteristici mecanice apropiate, realizate prin injectare pe o mașină KU-ASY-160, puse la dispoziție de ICECHIM. Înainte de finisare prin așchiere, bucșele au fost ținute timp de opt ore în ulei 305 STAS 1195-56, la temperatura de 120°C. Bucșele, cu o grosime a pereților de 5 mm, au fost montate fără strîngere într-o carcasă din oțel cu blocaj contra rotirii.

Studiul experimental s-a efectuat pe un stand cu arborele din OLC 45, îmbunătățit și rectificat, avînd diametrul $d=36$ mm.

2.2. În scopul evidențierii mai pregnante a influențelor urmărite, în afara grosimii mari a pereților, condițiile de încercare au cuprins atît parametri valorici uzuali, cît și parametri valorici ridicați care constituie condiții grele pentru materialele plastice și anume :

$\frac{l}{d}=1$	$\psi=7{,}5\,^0/_0$	n = 1 500 rot/min (2,82 m/s).
și	și	și
$\frac{l}{d}=0{,}6$	$\psi=3{,}5\,^0/_0$	n = 1 000 rot/min (1,88 m/s)

gama de presiuni medii fiind cuprinsă între 11,5 și 46 kgf/cm².

S-a pus accent deosebit pe jocul relativ $\psi=7{,}5‰$ (la rece) rezultat, din cercetări anterioare, ca reprezentînd jocul optim pentru cuzineți din poliamidă fără adaos ; dimpotrivă, jocul relativ inițial de 3,5‰ — mare pentru cuzineții metalici — duce în cazul materialelor plastice la condiții termice nefavorabile.

Pentru ungere s-a folosit ulei 305 STAS 1195-56.

Temperaturile locale au fost măsurate în planul median al cuzinetului, în 12 puncte, cu termocuple cupru-constantan și galvanometru cu oglindă.

3. *Rezultate*

3.1. Rezultatele măsurătorilor sînt redate în curbele din fig. 3...16, în care în ordonată s-au reprezentat raportul dintre temperatura locală t și temperatura uleiului la intrare t_u, iar în abscisă, unghiul de poziție al punctului de măsură, pe periferia cuzinetului în planul median.

La jocuri mari $\psi=7{,}5‰$, practic frecvent folosite, și raportul $\frac{l}{d}=1$, așa cum rezultă din fig. 3...6, atît la presiuni medii reduse cît și la încărcări mari, prezența grafitului nu modifică sensibil calitativ și cantitativ distribuția de temperaturi în film, la ambele turații de încercare.

Se constată numai o scădere redusă a temperaturii maxime, o aplatisare a curbelor valabile pentru cuzinetul cu conținut de grafit și o ușoară deplasare a acestor curbe, în raport cu cele valabile pentru poliamida fără adaos, spre zona de ieșire. Este un efect al conductivității termice sporite a poliamidei cu grafit.

Influența mai pregnantă apare la raportul redus $\frac{l}{d}=0{,}6$ cu același joc relativ de 7,5‰ și anume la încărcarea specifică ridicată $p_m=46$ kgf/cm², cînd diferența dintre temperaturile maxime devine mai importantă (fig. 7 și 8). Se remarcă totodată aici o apropiere a curbei pentru poliamida cu conținut de grafit, de simetria constatată la cuzinetul metalic. După cum este cunoscut din teoria lubrificației, scăderea lungimii cu-

zinetului sub o anumită limită optimă aduce cu sine preponderența acțiunii defavorabile a creșterii coeficientului de frecare în lagăr (ca raport între forța de frecare și încărcare); deci, în acest caz, prin prezența grafitului este frînat acest proces și micșorată generarea de căldură prin frecare.

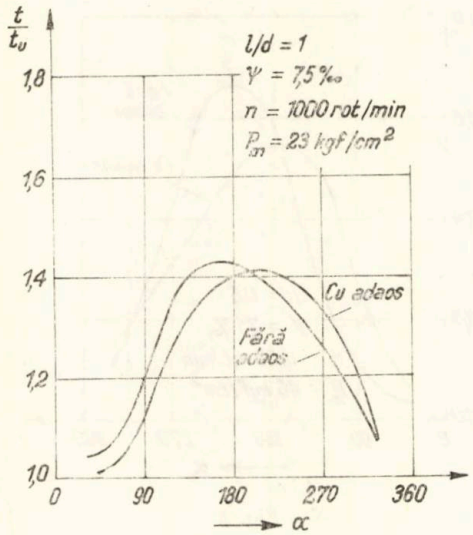


Fig. 3

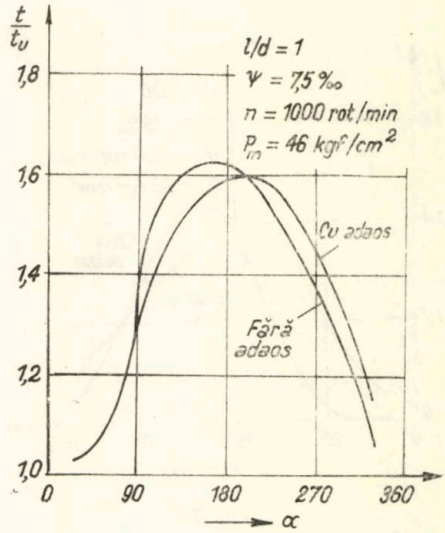


Fig. 4

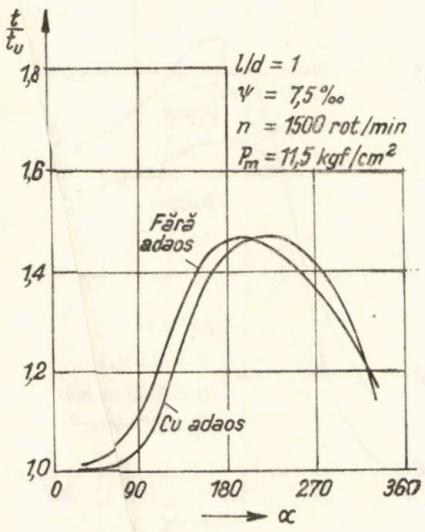


Fig. 5

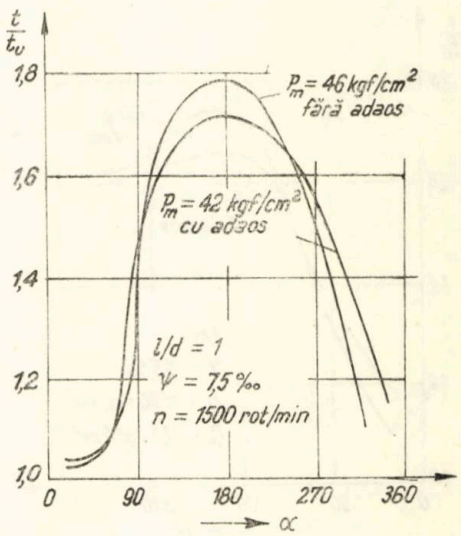


Fig. 6

3.2. *Influența pozitivă* a adaosului de grafit iese în evidență în mod deosebit la jocuri relativ mici, $\psi = 3{,}5‰$, la ambele rapoarte $\frac{l}{d}$, la toate presiunile de încercare și la ambele viteze periferice.

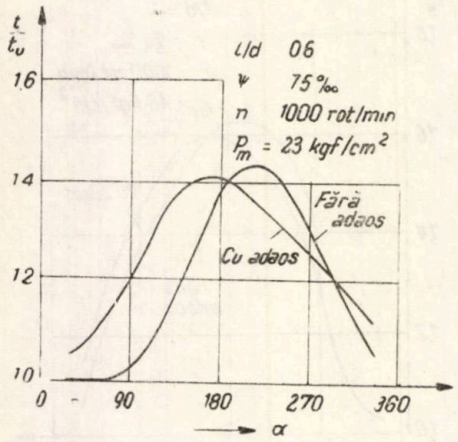


Fig. 7

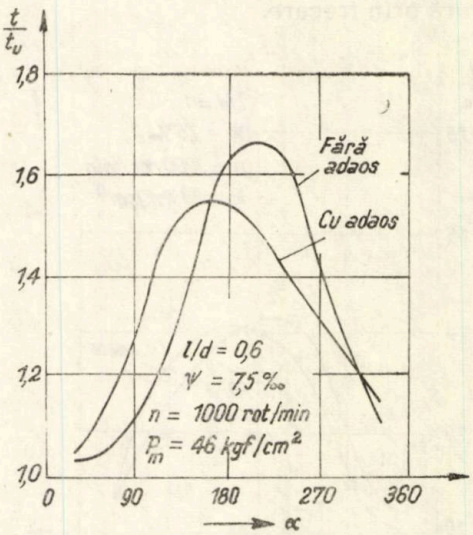


Fig. 8

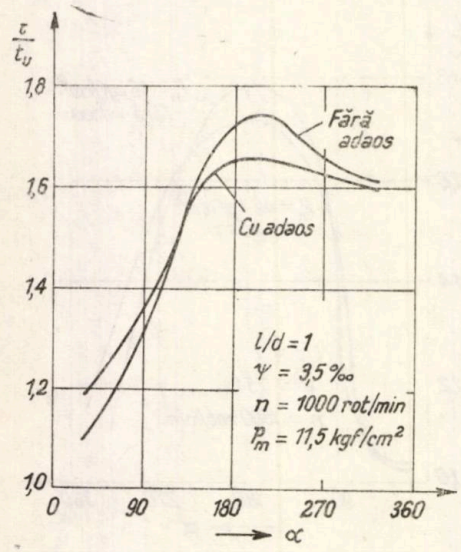


Fig. 9

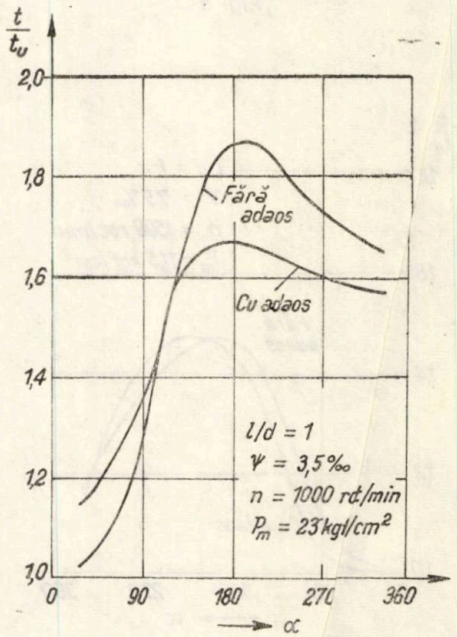


Fig. 10

Pentru $\frac{l}{d}=1$ curbele pentru bucșele cu grafit, deși mai plate, rămîn asemănătoare cu cele obținute pentru bucșele fără adaos, în porțiunea ascendentă chiar foarte apropiate, îndeosebi la viteza periferică de 2,82 m/s. Diferențele dintre temperaturile maxime *cresc* cu încărcarea specifică (fig. 9...12).

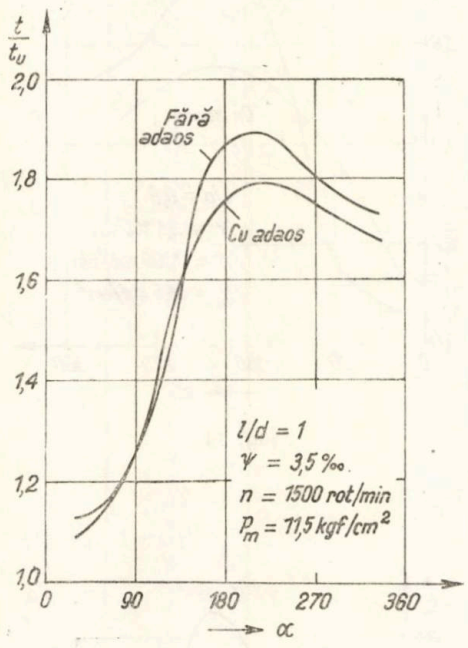


Fig. 11

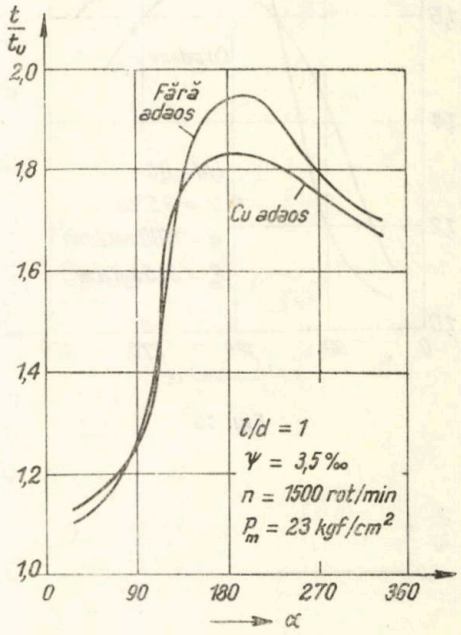


Fig. 12

Scăderea raportului $\frac{l}{d}$ aduce cu sine, în acest caz, o diferențiere netă a curbelor de distribuție a temperaturii, nu numai din punct de vedere cantitativ, ci și calitativ (fig. 13—16).

La poliamida fără grafit, curbele își păstrează alura caracteristică și cu vîrfuri ridicate de temperatură. Dimpotrivă, prin conținutul de grafit, distribuția temperaturii în film tinde oarecum spre nivelare, coborînd sensibil valoarea maximă și, la raport $\frac{l}{d}=0{,}6$, chiar spre o simetrie, ca la metale, cel puțin în zona superioară.

Dubla acțiune a grafitului, de micșorare a generării de căldură și de activizare a transferului ei prin pereți apare deosebit de evidentă ($\lambda_{grafit}=120$ kcal/m h grd).

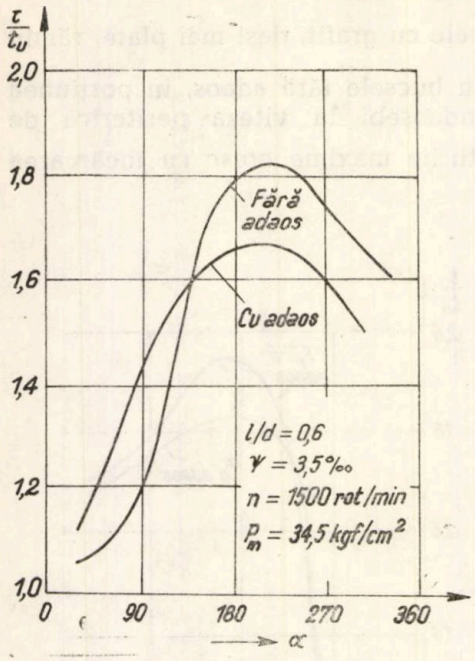


Fig. 13

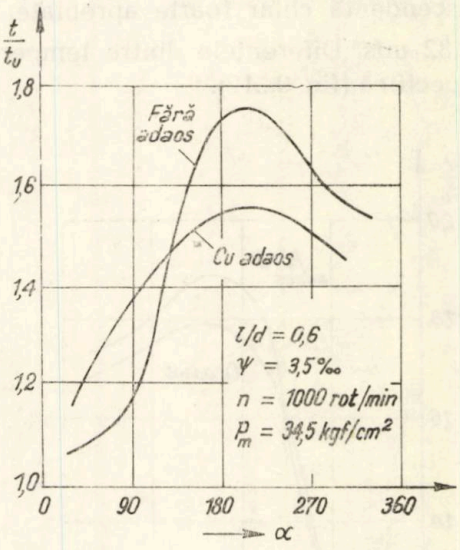


Fig. 14

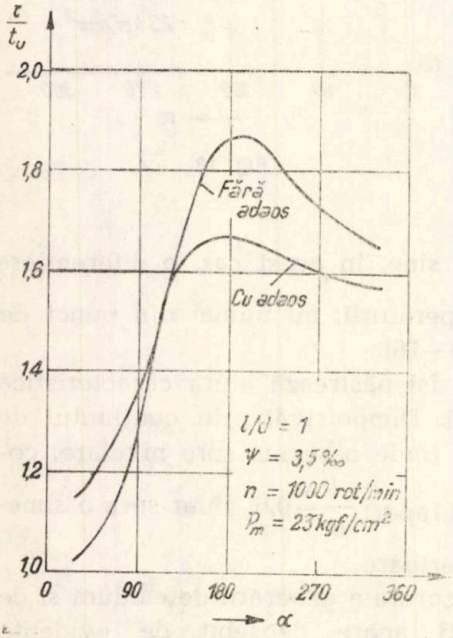


Fig. 15

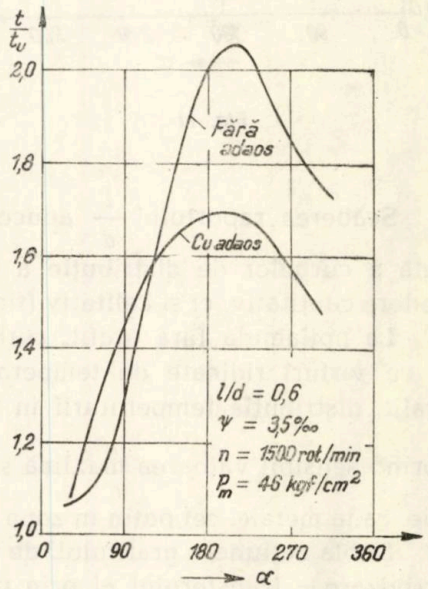


Fig. 16

3.3. Scăderea raportului $\frac{l}{d}$, la același joc relativ, poate duce la o micșorare a temperaturii medii (fig. 17), dar nu și la scăderea temperaturii maxime. Dimpotrivă, așa cum rezultă din fig. 4 și 8, vîrful de temperatură se poate plasa chiar la un nivel superior, așa cum se constată la poliamida fără adaos.

3.4. După depășirea valorii maxime și trecerea în zona divergentă, variația temperaturii în filmul de lubrifiant este cu totul diferită în ca-

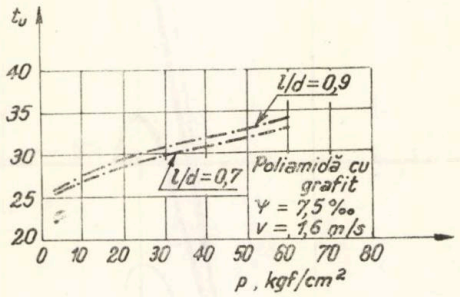


Fig. 17

zul jocului mic $\psi=3,5‰$, față de cel al jocului mare $\varphi=7,5‰$, la toate rapoartele $\frac{l}{d}$, presiunile medii și vitezele de încercare, indiferent de prezența sau absența grafitului în material.

La jocuri reduse, în zona de „ieșire" temperaturile continuă să se mențină la nivel ridicat, ceea atrage cu sine și mărirea valorii temperaturii medii.

Ponderea mare a vehiculării căldurii spre exterior prin circulația lubrifiantului este o caracteristică a cuzineților din material plastic imprimată de efectul izolant al pereților.

Zona divergentă contribuie mai puțin la portanță, în schimb participă la frecare și degajare de căldură. În același timp interstițul lărgit oferă spațiu de activizare a răcirii prin circulația laterală mai abundentă a lubrifiantului, ca și prin amestecul parțial cu ulei proaspăt introdus în lagăr. Procesul caloric este sensibil influențat de ruperile filmului din această zonă, favorabil sub aspectul frecării, în sensul existenței parțiale a unei frecări gaze-lichid, defavorabil sub acel al transferului prin convecție.

La bucșele groase cu jocuri relative mari, debitul sporit de lubrifiant și prezența rupturilor filmului pe o suprafață mai mare reprezintă transport mai activ de căldură conjugat cu generarea mai redusă de căldură în zona divergentă, cedarea de căldură prin pereți fiind în orice caz minoră. Ca urmare temperatura în film pe parcursul acestei zone poate scădea treptat apropiindu-se de temperatura de intrare, în sens invers creșterii din zona convergentă.

La jocurile mici, dimpotrivă, interstițiul redus micșorează debitul de fluid circulant, proces care se întîlnește cu generarea sporită de

căldură, făcînd să crească importanța transferului prin cuzinetul însuși. Slaba conductivitate termică a materialului se face evidentă prin menținerea temperaturii filmului la nivel ridicat, respectiv printr-o scădere foarte lentă a acestei temperaturi în zona divergentă.

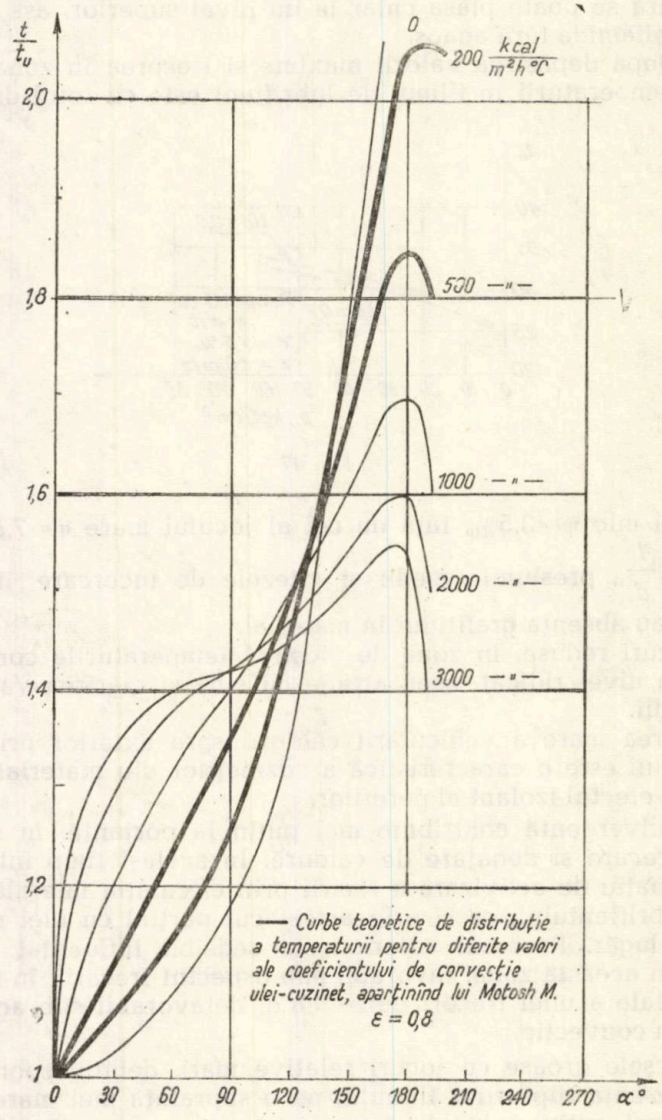


Fig. 18

3.5. După lucrarea [4], în funcție de valoarea coeficientului de convecție ulei-cuzinet, temperatura în filmul de ulei în zona convergentă — determinată teoretic — poate fi distribuită după una din curbele redate în fig. 18.

Așa cum se constată din fig. 19, pentru o valoare plauzibilă $\alpha = 500$ kcal/m² h °C, există o bună apropiere între curba teoretică și cea obținută experimental, diferența fiind explicabilă în primul rînd prin natura cuplului de material.

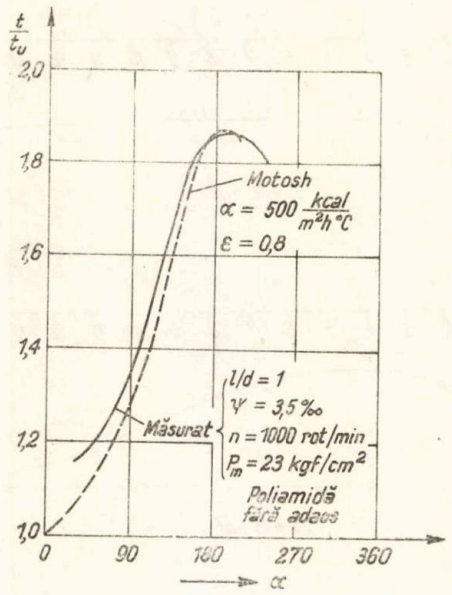


Fig. 19

3.6. Saltul momentan de temperatură la încărcarea bruscă constituie unul din pericolele de deteriorare a cuzineților din material plastic în exploatare. În cadrul lucrării de față a fost studiat acest salt, în condițiile arătate în fig. 20. S-a ales jocul redus $\psi = 3{,}5‰$ reprezentînd o condiție mai dificilă. Se constată o micșorare consecventă a saltului de temperatură cu scăderea suprasarcinii aplicate. Bucșele cu conținut de grafit au permis trepte duble de încărcări față de cele fără adaos.

3.7. Puternica asimetrie a distribuției de temperaturi în filmul de lubrifiant, îndeosebi în condiții funcționale care determină nivel ridicat de temperatură (jocuri mici), în cazul poliamidei trebuie pusă în legătură și cu deformațiile caracteristice bucșelor din acest material. Prin modulul de elasticitate scăzut și micșorarea apreciabilă a lui cu creșterea temperaturii, se produc deformații locale care pot atinge și chiar depăși „înălțimea geometrică" a filmului de lubrifiant corespunzătoare unui cuzinet considerat rigid, avînd ca urmare o deplasare suplimentară a fusului și strangulări periferice locale. Ipoteza este susținută de faptul că asemenea vîrfuri și nivel ridicat de temperatură în zona divergentă apar deosebit de accentuat la încărcări mari.

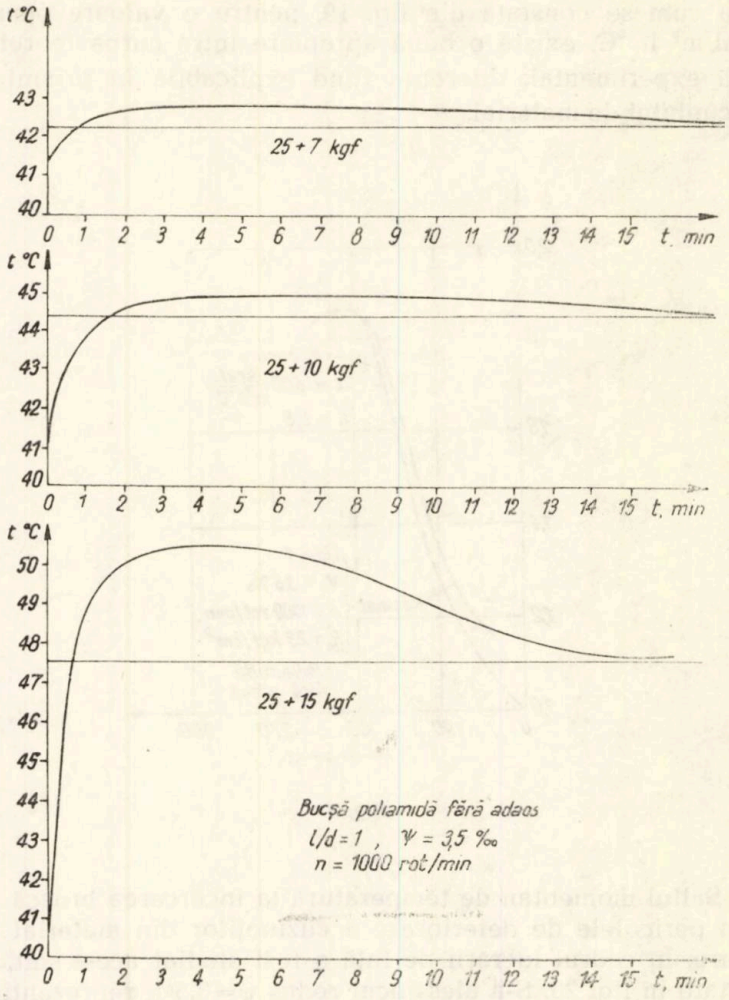


Fig. 20

4. *Concluzii*

Important în general, studiul cîmpului de temperatură şi al posibilităţilor de influenţare a lui, în cazul cuzineţilor din materiale plastice prezintă rezultate caracteristice care confirmă cercetări proprii anterioare şi dau indicaţii de interes pentru practică.

La jocul relativ în jurul valorii de 7,5‰, uzual pentru poliamida simplă, efectul ameliorativ al prezenţei grafitului în material apare în general minor, mai apreciabil numai la încărcări mari ($p = 46$ kgf/cm^2), în sensul aplatisării curbelor şi micşorării temperaturii maxime. Influenţa adaosului de grafit *creşte* însă cu *micşorarea jocului relativ*, precum şi cu micşorarea raportului l/d, ceea ce este important din punct

de vedere practic. Scăzînd nivelul temperaturii maxime și în general al temperaturilor din zona de ieșire, dilatațiile termice devin mai mici și, prin aceasta, bucșele „groase" din material cu grafit devin acceptabile chiar pentru asemenea jocuri mai reduse.

Temperaturile mai scăzute sînt totodată mai favorabile și sub aspectul micșorării deformațiilor locale.

Curbele de temperatură determinate experimental s-au dovedit a fi în concordanță cu cele deduse teoretic de alți autori, pentru coeficienți de convecție lubrifiant-cuzineți, cu valori corespunzătoare.

Efectul ameliorativ al grafitului în componența materialului cuzinetului, manifestat și prin micșorarea saltului momentan de temperatură la încărcări brusce, înseamnă o micșorare a pericolului de topire locală, respectiv o mărire a siguranței de funcționare.

Aspectul curbelor de repartiție a temperaturii lasă să se întrevadă în zona divergentă, existența unor procese cu complexitate sporită în cazul cuzineților din poliamide.

Catedra de organe de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1 *Manea Gh., N. Boicu, M. Pascovici* — Aspecte termice ale cuzineților pentru lagăre îndeosebi din materiale plastice. Bulet. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej" București, Tomul XXVIII, nr. 5, 1966, p. 61.

2. *Manea Gh., M. R. Mustafa, M. Pascovici* — Asupra temperaturii lagărelor radiale cu alunecare și efectul izolant al cuzineților din materiale plastice. Bulet. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej" București, Tomul XXVII, nr. 5, 1964, p. 51.

3. *Manea Gh., N. Boicu, I. Voica* — Deformațiile locale sub efectul presiunii în problema ungerii hidrodinamice. Studii și cercetări de mecanica aplicată. Acad. R.S.R., Tomul 27, 1968, nr. 2, p. 289.

4. *Motosh N.* — Der Wärmeaustausch zwischen Oelschicht und Metallflächen in einem Gleitlager unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Oelviskosität. Ing. Archiv 1964 (33), nr. 3, p. 149.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

C.Z.: 621.86/.87

ANWENDUNG DER ELEKTRISCHEN ANALOGIE ZUR BESTIMMUNG DER DYNAMISCHEN KRÄFTE BEIM ANLAUF EINES FÖRDERGURTES

HUGO SEGAL

Beim Anlauf eines Fördergurtes entstehen gedämpfte längsschwingungen und demzufolge dynamische Kräfte im Gurt, welche die anfängliche Spannkraft überlagern. Für die richtige Bestimmung der Einlagenzahl des Gurtes ist die Kenntnis dieser dynamischen Kräfte, insbesondere der ersten Kraftspitze, erforderlich. Wegen der Schwierigkeiten bei der dynamischen Berechnung wird, jedoch im allgemeinen auf eine exakte Bestimmung dieser Kräfte verzichtet und statt dessen die Sicherheitszahl mehr oder weniger gefühlsmässig erhöht.

Mechanisch ist der längsschwingende Fördergurt ein Gebilde mit streckenweise stetig verteilter Masse, Federung und Dämpfung, wobei Unstetigkeiten bei der Antriebsstation, der Spannstation, den Umführungsrollen usw. auftreten, wo eventuell auch mitschwingende Einzelmassen vorhanden sein können. Verschiedene derartige mechanische Modelle von Fördergurten sind in [2] und [8] beschrieben. Die Bestimmung der Eigenfrequenzen (besonders der Grundfrequenz) eines solchen zusammengesetzten Gebildes kann u.a. mit Hilfe der „mechanischen Impedanz" ziemlich leicht erfolgen [2] und ist z.B. bei der Wahl der Zeitfolge der Anlass-Widerstandsstufen des Antriebsmotors behilflich.

Will man jedoch die dynamischen Kräfte im Gurt bestimmen, so ist je eine Differentialgleichung zu schreiben für jeden Gurtabschnitt mit gleicher Massen- und Dämpfungsverteilung (beladenes bezw. unbeladenes Obertrum, Untertrum), sowie für jede mitschwingende Einzelmasse (Antriebstrommeln, Umkehrtrommeln, Spannvorrichtung), ausserdem entsprechende Gleichungen mit den Anfangs-, Rand- und Übergangsbedingungen von einem Gurtabschnitt zum andern.

Die Lösung einer solchen Gruppe von Differentialgleichungen ist schwierig, weshalb meistens vereinfachende Annahmen gemacht werden müssen [3]. Das Problem der dynamischen Gurtkräfte wird übrigens in einem der neuesten Fach-Handbücher als noch ungelöst betrachtet [7].

Für die exakte Lösung der genannten Differentialgleichunggen bietet sich jedoch eine Methode an, welche in jüngster Zeit vielfach —

---

*Mitteilung, vorgetragen auf der wissenschaftlichen Tagung der Lehrkader des Polytechnischen Intitutes „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest 1-3 Noxember 1968.

besonders in der Elektro-Akustik — verwendet wird, u.z.w. die Methode der Analogie zwischen den elektrischen und mechanischen Schwingungen. Für Einzelheiten dieser als bekannt vorasgesetzten Methode wird auf die ursprüngliche Arbeit von Hecht [4], sowie auf andere diesbezügliche Arbeiten verwiesen [5, 6].

Die Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der dynamischen Gurtkräfte wird nachstehend dargelegt, wobei anstelle eines Analogrechners die von der Wechselstromtechnik bekannte graphische Lösungsmethode verwendet wird.

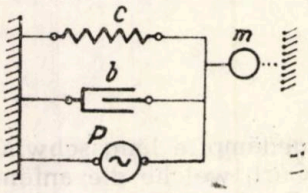


Abb. 1

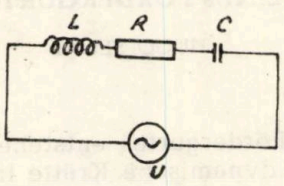


Abb. 2

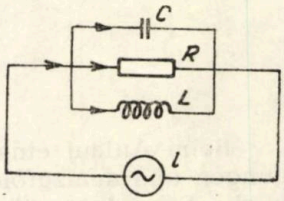


Abb. 3

Bekanntlich entsprechen dem in Abb. 1 dargestellten mechanischen Gebilde mit einem Freiheitsgrad zwei elektrische Analog-Gebilde (Abb. 2 bezw. Abb. 3), je nachdem die Entsprechungen $P \mathrel{\hat{=}} U$ und $v \mathrel{\hat{=}} I$ (Kraft-Spannung und Geschwindigkeit-Stromstärke ,Abb. 2) bezw. $P \mathrel{\hat{=}} I$ und $v \mathrel{\hat{=}} U$ (Kraft-Stromstärke und Geschwindigkeit-Spannung, Abb. 3) gewählt werden. In beiden Fällen werden die mechanischen und die elektrischen Schwingungen durch gleichartige Differentialgleichungen beschrieben.

Die erste Analogie, genannt „Linear"-Analogie, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Glieder des mechanischen Geboldes parallel, ihre elektrischen Analog-Glieder jedoch in Reihe geschaltet sind (Abb. 2). Anstelle der Masse tritt im elektrischen Analog-Gebilde eine Induktivität, anstelle der Dämpfung ein Ohm-scher Widerstand und anstelle der Feder der Kehrwert einer Kapazität.

Bei der zweiten Analogie, gennant „Reziprok"-Analogie, bleiben jedoch die den obigen mechanischen Gliedern entsprechenden elektrischen Glieder auch in der elektrischen Analog-Schaltung parallel (Abb. 3), u.zw. tritt anstelle der Messe eine Kapazität, anstelle der Dämpfung der Kehrwert eines Widerstandes und anstelle der Federsteifigkeit der Kehrwert einer Induktivität. Die „Reziprok" - Analogie bietet also den Vorteil der gleichen Struktur der elektrischen und der mechanischen Schaltung, jedoch mit der Einschränkung, dass eine der beiden Klemmen jeder Kapazität, die einer Masse entspricht, geerdet sein muss. Mechanisch entspricht dies der Anwendung eines festen Bezugssystems für die Bewegung (Intertialsystem), in Abb. 1 dargestellt durch den gestrichelt gezeichneten zweiten Anschluss der Masse.

Die Grundschaltungen Abb. 2 und 3 können auch im Falle eines beliebig zusammengesetzten Gebildes angewendet werden, bei jeder Anzahl von Massen, Federm und Dämpfungen, u.zw. bleiben die Ent-

sprechungen gültig sowohl hinsichtlich der Augenblickswerte, als auch der permanenten Schwingungen.

In der umfassenden diesbezüglichen Literatur wird gezeigt, dass bei der Verwendung der elektrischen Analog-Grössen diese mit einer frei wählbaren Konstante multipliziert (oder dividiert) werden können (genannt „Dualkonstante" D). In der Reziprok-Analogie wird diese Konstante laut folgendem Schema angewendet :

Tabelle 1

Mechanische Grösse		*Elektrische Analog-Grösse*
Kraft	P	$I \triangleq \frac{1}{D} P$
Geschwindigkeit	v	$U \triangleq Dv$
Masse	m	$C \triangleq \frac{1}{D^2} m$
Dämpfung	b	$R \triangleq D^2 \frac{1}{b}$
Federsteifigkeit	c	$L \triangleq D^2 \frac{1}{c}$

In der vorliegenden Arbeit werden nur die „Reziprok"-Analogien angewendet, da die elektrischen Schaltungen sehr leich aus den mechanischen Schaltungen hervorgehen.

Da die verwendeten elektrischen Schaltungen sich nur auf punktförmige (also nicht homogen verteilte) Massen, Federn und Dämpfungen beziehen, wird die Gesamtlänge des Gurtförderers in eine Anzahl von Abschnitten aufgeteilt, welche durch je eine entsprechende Masse, Feder und Dämpfung dargestellt werden. Diese Annahme einzelner Glieder anstelle eines schwingenden Kontinuums führt zu einer annehmbaren Näherung [1].

Bestimmung der Massen. Als Masse eines Gurtabschnittes wird berücksichtigt : die eigentliche Gurtmasse, die Masse des aufgeladenen Gutes, sowie 0,75 der Drehmasse der Tragrollen [8]. Der Koppelfaktor 0,75 ergibt die der Wiklichkeit am nächsten liegenden Werte der Wellen-Fortpflanzungsgeschwindigkeit a, falls er in die Gleichung für a eingeführt wird :

$$a = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E'Bi/F}{q/gF \cdot 1}} = \sqrt{\frac{E'Big}{q}} \qquad (1)$$

worin : E — dynamischer Elastizitätsmodul, kp/cm²
ϱ — Dichte des Gurtmaterials, kp.s²/cm³
E' — dynamischer Elastizitätsmodul, bezogen auf 1 cm Einlagenbreite, kp/cm
B — Gurtbreite, cm
i — Einlagenzahl

q — Gesamt-Metergewicht des Gurtes einschliesslich Ladegut und angekoppelter Tragrollenmasse, kp/m

g — Erdbeschleunigung, m/s².

Aus den Untersuchungen von Keller und Blasi [9] und Vierling [10] geht harvor, dass E bezw. E' nicht konstant ist, sondern annähernd parabolisch mit der Last variiert. Ausserdem beschreibt der Modul während einer Be- und Entlastung nicht dieselbe Kurve, sondern eine Hysteresis-Schleife, welche der Materialdämpfung entspricht [10].

Für E' sind durch Versuche Werte zwischen 740 und 1330 kp/cm gefunden worden, am häufigsten jedoch Werte zwischen 1000 und 1200 kp/cm.

In den nachfolgenden Berechnungen wird für jeden Gurtförderer ein konstanter Mittelwert für E' zwischen 1000 und 1200 kp/cm angenommen, u.zw. der mit der praktisch im betreffenden Band gemessenen Wellen-Fortpflanzungsgeschwindigkeit am besten vereinbare Wert [8].

Als Masse der Antriebsstation wurde berücksichtigt:

— die Masse der Trommel und der auf den Trommelumfang reduzierten Getrieberäder, falls zwischen Getriebe und Motor eine hydraulische Kupplung eingeschaltet ist, welche die Schwingungen nicht weiterleitet (der Einfluss des Motor-GD² auf die Gurtschwingung bleibt also unwirksam);

— eine unendlich grosse Masse (entsprechend einer Einspannung des Gurtendes), falls der Motor durch eine Kupplung angeschlossen ist, welche die Schwingungen weiterleitet (in diesem Fall wirkt auch das Motor-GD², multipliziert mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses, also ein sehr grosser Wert).

Die Federsteifigkeit c des Gurtes ergibt sich für einen Gurtabschnitt aus dem Elastizitätsmodul auf Grund der Beziehung:

$$c = \frac{E' \cdot B \cdot i}{l} \text{ kp/m} \qquad (2)$$

worin: E' — dynamischer (Lagen)- Elastizitätsmodul, kp/cm

B — Gurtbreite, em

i — Einlagenzahl

l — Länge des berücksichtigten Gurtabschnittes, m.

Uber *die Dämpfung* b sind z. Zt. nur wenige Versuchsergebnisse bekannt. Vierling und Matting [10] bestimmen diese Dämpfung durch Ausmessen der Fläche der Hysteresis-Schleife während einer Be- und Entlastung, bezogen auf die Gesamfläche der Belastungskurve, und erhalten hierduch die sogenannte „relative Materialdämpfung", welche frequenzabhängig ist. Bilitschenko, Vysotschin und Zavgorodnij [8] gleichen hingegen die Dämpfung des Gurtes derjenigen einer zähen Flüssigkeit an und betrachten sie als frequenzunabhänzig und geschwindigkeitsproportional. Obwohl diese letztere Betrachtungsweise nicht so wirklichkeitstreu ist wie die erstere, reiht sie sich besser in das mathematische Modell ein, welches eine zähflüssige Dämpfung vor-

sieht. Es wurden deshalb in der vorliegenden Arbeit die Ergebnisse von Bilitschenko und Mitarb. verwendet.

Für die Dämpfung η, bezogen auf 1cm Lagenbreite und 1 m Länge, fanden Bilitscsenko und Mitarb. Werte zwischen 7,1 und 7,9 kp.s/cm, am häufigsten Werte zwischen 7,1 und 7,25 kp.s/cm. Für die Berechnung der Dämpfung b eines Gurtabschnittes von l m Länge wurde die Beziehung :

$$b = \frac{\eta \cdot B \cdot i}{l} \text{ kp. s/m} \tag{3}$$

angewendet, wobei der Wert $\eta = 7{,}2$ kp.s/cm eingesetzt wurde.

Ausser dieser (internen) Materialdämpfung treitt auch eine äussere Dämpfung auf, herrührend von dem Bewegungswiderstand des Gurtes, welcher einersteits bedingt ist durch die Reibung in den lagern und Labyrinthdichtungen der Tragrollen und andrerseits durch den Walkwiderstand und den Gurt-Eindrückwiderstand. Der Wert dieses Bewegungswiderstandes ist aus zahlreichen Forschungsarbeiten bekannt, neuerdings aus der Arbeit von Thormann [11] und kann, da annähernd geschwindigkeitsproportional, ebenfalls als zähflüssige Dämpfung in Rechnung gesetzt werden,entsprechend der Beziehung :

$$b' = \frac{q \cdot l \cdot w}{v} \text{ kp. s/m} \tag{4}$$

worin :

q — Metergewicht des Gurtes einschliesslich Anteil des Tragrollengewichtes und Ladegut, kp/m

l — länge des betrachteten Gurtabschnittes, m

w — spezifischer Bewegungswiderstand des Förderers bei Nenngeschwindigkeit in Kp/kp ; w hat den. Wert 0,02...0,04 kp/kp, abhängig von der Baurt und dem Zustand der Tragrollen

v — Nenngeschwindigkeit des Gurtförderers, m/s.

Es muss hervorgehoben werden, dass die Werte der Masen, Steifigkeiten und Dämpfungen mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet sind. Wird adrerseits das in Wirklichkeit nicht ganz lineare Verhalten der Federn und Dämpfungen berücksichtigt, so können Abweichungen von 15 bis 25% zwischen den berechneten und gemessenen Resultaten als annehmbar betrachtet werden. Abweichungen dieser Grössenordnung fallen übrigens nicht allzusehr ins Gewicht, wenn man in Betracht zieht, dass die Gurte gegenwärtig in Ermangelung dynamischer Rechenmethoden mit Sicherheitszahlen von 8...15 berechnet werden, was bei keinem anderen Maschinenelement geschieht.

Nachstehend wird die elektrische Analogie für die Berechnung der Anlaufdynamik eines Gurtförderers von 282 m Länge (Type KLS-1200, Fabrikat UdSSR) verwendet, an welchem ausführliche oszillografische Messungen der dynamischen Kräfte, sowie Bestimmungen der Wellen-Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, Anlaufbeschleunigungen usw. durch-

geführt worden sind [8], sodass ein Vergleich der Rechnungs und Messungsergebnisse möglich ist.

In Abb. 4 a ist ein Gesamtschema dieses horizontal verlaufenden Gurtförderes mitsamt Antriebs- und Spannstation wierdergegeben. In Abb. 4 b wird das mechanische Modell des Förderers gezeigt, wie es zur Bestimmung der Eigenfrequenz nach der Impedanz-Methode [2] verwendet wird.

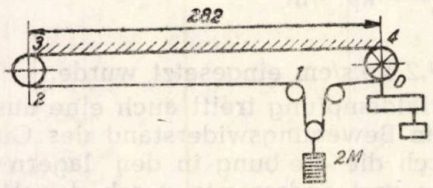


Abb. 4 a

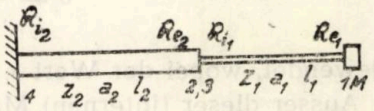


Abb. 4 b

Der Gurtförderer, dessen Antriebsmotor direkt (ohne hydraulische Kupplung) mit dem Getriebe gekuppelt ist, hat folgende technische Daten :

Länge des Förderers	$l_1 = l_2$	= 282 m
Förderleistung	Q	= 1600 Mp/h
Nenngeschwindigkeit des Gurtes	v	= 1,85 m/s
Gurtbreite	B	= 120 cm
Einlagenzahl (Baumwollgewebe)	i	= 6
Gesamstärke des Gurtes	s	= 22 mm
Dynamischer Elastizitätsmodul	E'	= 1000 kp/cm
Metergewicht des Gurtes	q_b	= 27,9 kp/m
Metergewicht des Ladegutes	q	= 210 kp/m
Leistung des Antriebsmotors	N	= 125 kW
Gew. der Spannvorrichtung einschl. Spanngewicht	G	= 3400 kp
Abstand der oberen Tragrollen	p	= 1,0 m
Gewicht des Drehteils der oberen Tragrollen	G_r	= 3 × 20,3 kp
Abstand der unteren Tragrollen	p'	= 2,0 m
Gewicht des Drehteils der unteren Tragrollen	G'_r	= 36,2 kp

a) *Anlauf ohne Last*

In diesem Falle ist die laut [8] gemessene Anlaufbeschleunigung 2,64 m/s² (gemessene Anlaufzeit t_d = 0,7 s).

Es wird zuerst die (Grund-) Eigenfrequenz des Gurtförderers nach der mechanischen Impedanz-Methode bestimmt.

Als Metergewicht des Förderers wird in Rechnung gesetzt:

— im unteren Trum: $q_1 = 27{,}9 + 0{,}75 \cdot \frac{36{,}2}{2} = 42$ kp/m

— im oberen Trum: $q_2 = 27{,}9 + 0{,}75 \cdot 3 \cdot 20{,}3 = 74$ kp/m

Gleichung (1) ergibt hiermit folgende Wellen-Fortpflanzungsgeschwindigkeiten:

— im unteren Trum: $a_1 = \sqrt{\frac{1000 \cdot 720 \cdot 9{,}81}{42}} = 410$ m/s

— im oberen Trum: $a_2 = \sqrt{\frac{1000 \cdot 220 \cdot 9{,}81}{74}} = 308$ m/s

Laut [8] wurden hirfür Werte von 480 bezw. 300 m/s gemessen.

Für die Bestimmung der Eigenwerte nach der mechanischen Impedanz-Methode wird in [2] für einen Gurtförderer der betrachteten Bauart folgende Beziehung abgeleitet:

$$1 - \frac{Z_1}{Z_2} \operatorname{tg} \frac{l_2 a_1}{l_1 a_2} \nu \cdot \operatorname{tg} \nu = \frac{a_1 M}{l_1 Z_1} \nu \left(\frac{Z_1}{Z_2} \operatorname{tg} \frac{l_2 a_1}{l_1 a_2} \nu + \operatorname{tg} \nu \right) \tag{5}$$

worin: ω — Eigen-Kreisfrequenz

$\nu = \frac{\omega}{a_1} l_1$ ein Rechenwert (Fortpflanzungskonstante)

$Z_i = \varrho \cdot a_i \cdot F_i$ charakteristische Impedanz des Gurt-Trums i ($i = 1$ für das Untertrum, $i = 2$ für das Obertrum)

ϱ — Dichte des Gurtes

F — Querschnittsfläche des Gurtes

M — $\frac{1}{2}$ · Spanngewichtsmasse.

Mit den angeführten Werten ergibt Gleichung (5):

$$1 - \frac{1}{1{,}33} \operatorname{tg} 1{,}33\, \nu \cdot \operatorname{tg} \nu = 0{,}144\, \nu \left(\frac{1}{1{,}33} \operatorname{tg} 1{,}33\, \nu + \operatorname{tg} \nu \right) \tag{6}$$

oder:

$$A = B$$

In Abb. 5 sind die Kurven $A = f_A(\nu)$ und $B = f_B(\nu)$ dargestellt, deren erster Schnittpunkt bei $\nu_1 = 0{,}69$ die Grund-Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{\nu_1 \cdot a_1}{l_1} = \frac{0{,}69 \cdot 410}{282} = 1{,}0 \text{ rad/s} \tag{7}$$

ergibt. Die entsprechende Periodendauer ist $T = 2\pi/1{,}0 = 6{,}28$ s.

Die gemessene Periodendauer [8] war 7,7...7,8 s, also 23% grösser als gerechnet.

Die gesamte Gurtlänge wird in vier Abschnitte von je 141 m Länge aufgeteilt, für welche sich nachstehende Werte ergeben :

— Masse einer Hälfte des Spanngewichtes : $m_1 = 1700 : 9{,}81 = 174$ kp.s²/m

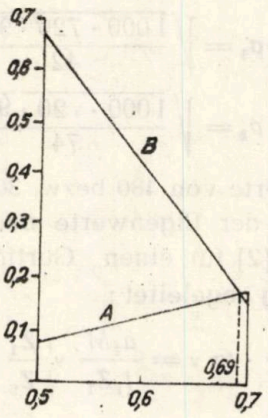


Abb. 5

— Masse einer Hälfte des unteren Trums : $m_2 = m_3 \dfrac{141 \cdot 42}{9{,}81} = 605$ kp.s²/m

— Masse einer Hälfte des oberen Trums : $m_4 = m_5 = \dfrac{141 \cdot 74}{9{,}81} = 1\,060$ kp. s²/m

— Federsteifigkeit lt. Gg (2) : $c = \dfrac{E' \cdot B \cdot i}{l} = \dfrac{1\,000 \cdot 120 \cdot 6}{141} = 5\,100$ kp/m

— innere Dämpfung des Gurt-Materials lt. Gg (3) : $b = \dfrac{\eta \cdot B \cdot i}{l} = \dfrac{7{,}2 \cdot 120 \cdot 6}{141} = 36{,}8$ kp. s/m

— äussere Dämpfung, entsprechend dem Bewegungswiderstand des Bandes laut Gg (4) :

— im unteren Trum : $b' = \dfrac{q_1 \cdot l \cdot w}{v} = \dfrac{42 \cdot 141 \cdot 0{,}02}{1{,}85} = 64$ kp. s/m

— im oberen Trum : $b'' = \dfrac{q_2 \cdot l \cdot w}{v} = \dfrac{74 \cdot 141 \cdot 0{,}02}{1{,}85} = 112{,}5$ kp. s/m

In der „Reziprok"-Analogie treten nachstehende elektrische Analog-Werte auf (lt. Tab. 1) :

$\omega = 1{,}0$

$$R = \frac{D^2}{b} = \frac{D^2}{36{,}8} = 27\,000 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp. s} \tag{8}$$

$$R' = \frac{D^2}{b'} = \frac{D^2}{64} = 15\,600 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp. s} \tag{9}$$

$$R'' = \frac{D^2}{b''} = \frac{D^2}{112{,}5} = 8\,900 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp. s} \tag{10}$$

$$L\omega = \frac{D^2\omega}{c} = \frac{D^2 \cdot 1{,}0}{5\,100} = 197 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp. s} \tag{11}$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{D^2}{\omega \cdot m_1} = \frac{D^2}{1{,}0 \cdot 1{,}74} = 5\,750 \cdot 10^{-6}\, D^2 \text{ m/kp. s} \tag{12}$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{D^2}{\omega \cdot m_{2(3)}} = \frac{D^2}{1{,}0 \cdot 605} = 1\,650 \cdot 10^{-6}\, D^2 \text{ m/kp. s} \tag{13}$$

$$\frac{1}{\omega C_5} = \frac{1}{\omega C_4} = \frac{D^2}{\omega \cdot m_{4(5)}} = \frac{D^2}{1{,}0 \cdot 1\,060} = 940 \cdot 10^{-6}\, D^2 \text{ m/kp. s} \tag{14}$$

Das mechanische Schaltbild des aus vier Abschnitten bestehenden Schwing-Gebildes ist in Abb. 6 ,das entsprechende elektrische Schaltbild in der „Reziprok"-Analogie ist in Abb. 7 gezeigt.

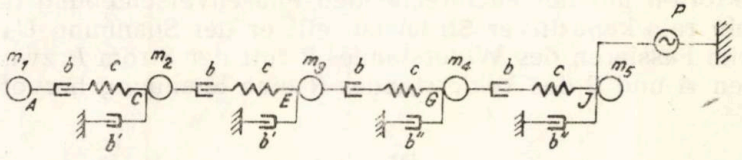


Abb. 6

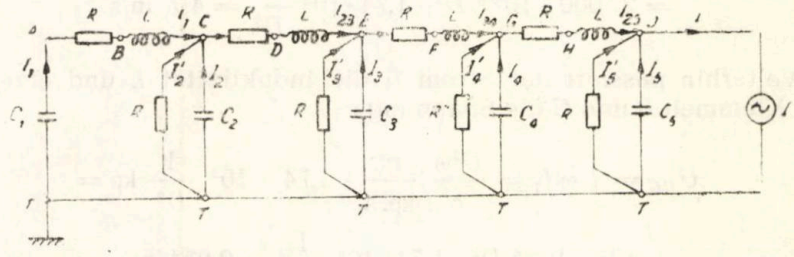


Abb. 7

In Abb. 6 erscheint die Wechselkraft-Quelle, *P*, welche das ganze Gebilde an dem mit der Masse m_5 behafteten Ende anregt; im elektrischen Analog-Schaltbild erscheint entsprechend die Wechselstrom-

quelle I, u.zw .gedacht ohne inneren Widerstand (also ohne inneren Spannungsverlust).

Im mechanischen sowie im elektrischen (Reziprok-) Analog-Schaltbild können die Dämpfungen b und Steifigkeiten c in Reihe (wie in Abb. 6 oder parallel (wie in Abb. 1) geschaltet werden („Maxwell-" bezw. „Voigt"-Schaltung [1]. Durch vergleichende Anwendung beider Schaltungen bei der Berechnung längsschwingender Fördergurte mittels elektrischer Analogie wurde festgestellt, dass die Reihenschaltung der Dämpfungen und der Federn zu Ergebnissen führt, welche der Wirklichkeit näher sind. Ein solches Modell stellt wahrscheinlich eine getreuere Wiedergabe der inneren Festigkeits-Armatur des Gurtes dar. Aus diesem Grunde wird weiter in den mechanischen und elektrischen Schaltbildern nur die „Maxwell"-Schaltung angewendet.

Das elektrische Schaltbild Abb. 7 wird graphisch-analytisch wie folgt berechnet (Abb .8) :

Zwischen T und A wird die Einheits-Wechselspannung :

$$U_{AT} \triangleq v_{AT} = 1 \text{ m/s}$$

gelegt ; in diesem Fall fliesst zwischen T und A ein Strom, dessen Stromstärke die Amplitude

$$I_1 = \frac{1}{1/\omega C_1} = \frac{1}{D^2/\omega\, m_1} = \frac{1}{5750 \cdot 10^{-6} \cdot D^2} \frac{\text{m/s}}{\text{m/kp. s}} = 1{,}74 \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{D^2} \text{ kp}$$

aufweist. In Abb. 8a sind die Spannungen und in Abb. 8b die Stromstärken vektoriell mit der entsprechenden Phasenverschiebung dargestellt. Da I_1 ein rein kapazitiver Strom ist, eilt er der Spannung U_{AT} um 90° vor. Beim Passieren des Widerstandes R ruft der Strom I_1 zwischen den Klemmen A und B des Widerstandes R eine Spannung hervor mit dem Wert :

$$U_{AB} = R \cdot I_1 = \frac{D^2}{b} \frac{m}{\text{kp. s}} \cdot 1{,}74 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} \text{ kp} =$$

$$= 27\,000 \cdot 10^{-6}\, D^2 \cdot 1{,}74 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} = 4{,}7 \text{ m/s}$$

Weiterhin passiert der Strom I_1 die Induktivität L und erzeugt an deren Klemmen B und C die Spannung :

$$U_{BC} = L\,\omega\, I_1 = \frac{D^2\omega}{c} \frac{m}{\text{kp. s}} \cdot 1{,}74 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} \text{ kp} =$$

$$= 197 \cdot 10^{-6}\, D^2 \cdot 1{,}74 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} = 0{,}034 \text{ m/s}$$

Die Ohmsche Spannung U_{AB} ist gleichphasig mit I_1 und hat infolgedessen einen Voreilwinkel von 90° vor U_{AT}. Die induktive Spannung U_{BC} hat einen Voreilwinkel von 90° vor I_1, eilt also um 180° vor U_{AT}. Da U_{BC} jedoch sehr klein im Verhältnis zu U_{AB} und im Dia-

gramm fast unsichtbar ist, wird U_{BC} vernachlässigt und $U_{AB} \sim U_{AC}$ angenommen. Die Spannungen U_{AT} und U_{AC} ergeben zeichnerisch, durch vektorielle Addition in beliebigem Masstab, Grösse und Richtung des Vektors $U_{CT} = 4{,}8$ m/s.

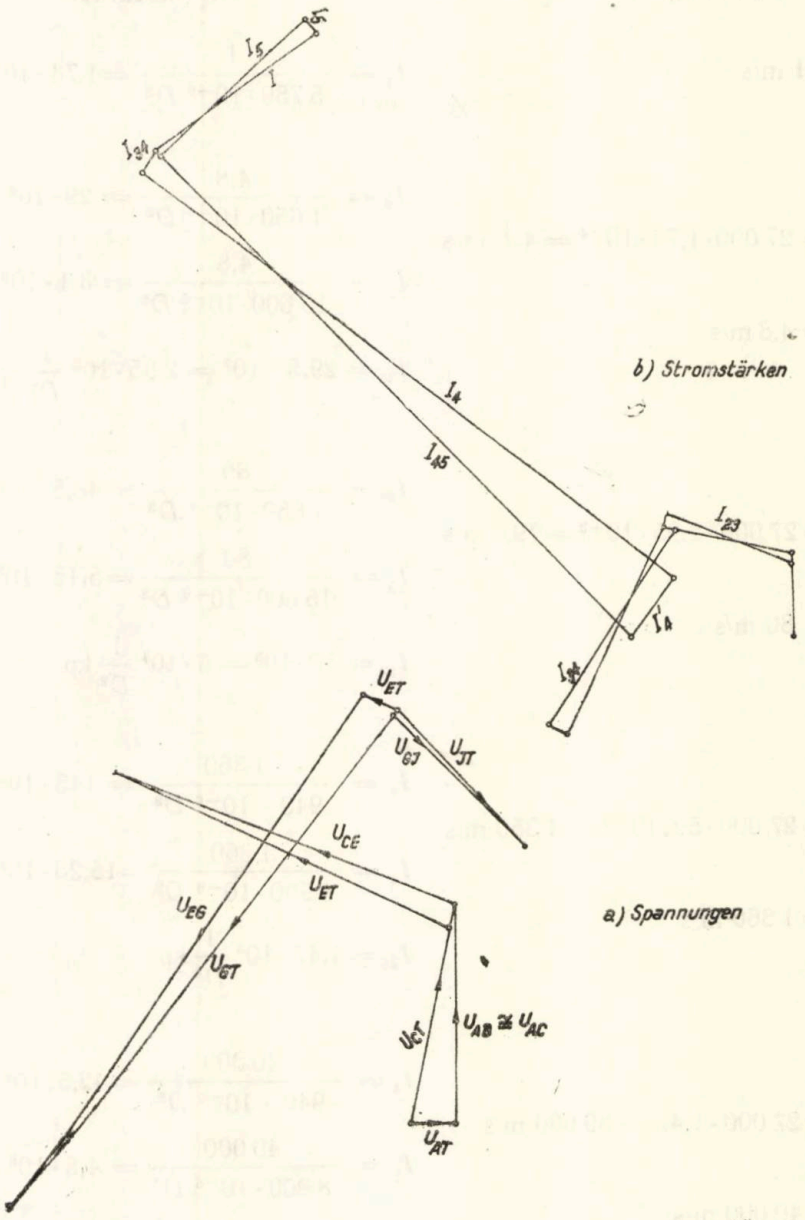


Abb. 8

Tabelle 2

Anlauf ohne Last (Abb. 8)

Spannungen	*Stromstärken*
$U_1 = 1$ m/s	$I_1 = \frac{1}{5750 \cdot 10^{-6} D^2} = 1{,}74 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2}$ kp
	$I_2 = \frac{4{,}8}{1650 \cdot 10^{-6} D^2} = 29 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{AC} = 27000 \cdot 1{,}74 \cdot 10^{-4} = 4{,}7$ m/s	$I'_2 = \frac{4{,}8}{15600 \cdot 10^{-6} D^2} = 3{,}1 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{CT} = 4{,}8$ m/s	$I_{23} = 29{,}5 \cdot 10^2 = 2{,}95 \cdot 10^3 \frac{1}{D^2}$ kp
	$I_3 = \frac{80}{1650 \cdot 10^{-6} D^2} = 48{,}5 \cdot 10^3 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{CE} = 27000 \cdot 2{,}95 \cdot 10^{-3} = 79{,}5$ m/s	$I'_3 = \frac{80}{15600 \cdot 10^{-6} D^2} = 5{,}15 \cdot 10^3 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{ET} = 80$ m/s	$I_{34} = 50 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4 \frac{1}{D^2}$ kp
	$I_4 = \frac{1360}{940 \cdot 10^{-6} D^2} = 145 \cdot 10^4 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{EG} = 27000 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 1350$ m/s	$I'_4 = \frac{1360}{8900 \cdot 10^{-6} D^2} = 15{,}25 \cdot 10^4 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{GT} = 1360$ m/s	$I_{45} = 1{,}47 \cdot 10^6 \frac{1}{D^2}$ kp
	$I_5 = \frac{40000}{940 \cdot 10^{-6} D^2} = 42{,}5 \cdot 10^6 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{GJ} = 27000 \cdot 1{,}47 = 39600$ m/s	$I'_5 = \frac{40000}{8900 \cdot 10^{-6} D^2} = 4{,}5 \cdot 10^6 \frac{1}{D^2}$ kp
$U_{JT} = 40000$ m/s	$I = 43 \cdot 10^6 \frac{1}{D^2}$ kp

Nachdem also die zwischen C und T bestehende Spannung bekannt ist, kann auf gleichem Wege bestimmt werden: Stromstärke I_2 im Kondensator C_2 und Stromstärke I_2' im Widerstand R':

$$I_2 = \frac{4{,}8 \text{ m/s}}{1/\omega C_2 \text{ m/kp.s}} = \frac{4{,}8}{D^2/\omega m_2} = \frac{4{,}8}{1\,650 \cdot 10^{-6} \cdot D^2} = 29 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} \text{ kp}$$

$$I_2' = \frac{4{,}8 \text{ m/s}}{R' \text{m/kp.s}} = \frac{4{,}8}{D^2/b'} = \frac{4{,}8}{15\,600 \cdot 10^{-6} \cdot D^2} = 3{,}1 \cdot 10^2 \frac{1}{D^2} \text{ kp}$$

Der Kapazitivstrom I_2 hat einen Voreilwinkel von 90° vor U_{CT}; der durch den Ohmschen Widerstand R' fliessende Strom I_2' ist gleichphasig mit U_{CT}. Im Punkt C erfolgt die vektorielle Addition der Ströme I_2, I_2' und I_1 und es entsteht entsprechend dem Kirchhoffschen Gesetz der Strom I_{23} zwischen C und E. In Abb. 8b wurde die vektorielle Addition von I_2, I_2', und I_1 durchgeführt und als Ergebnis $I_{23} = 2{,}95.10{,}3^3 \frac{1}{D^2}$ kp erhalten.

Da die Spannungs- und Stromamplituden von einem Knotenpunkt zum andern rasch anwachsen, wurde beim Übergang zu jedem der Punkte C, E, G und J (Abb. 8a und 8b) die Darstellung je 10 mal verkleinert, um die Zeichnung nicht allzu gross werden zu lassen. In Abb. 8 wurde angefangen mit dem Maasstab 1 m/s = 1 cm (U_{AT}) und 1 kp = 1 cm (I_1); weiter wurde der Darstellungs-Maasstab stufenweise je zehnmal kleiner genommen.

In gleicher Weise wurde fortgefahren mit der Behandlung der Knotenpunkte E, G und J. wobei die in Tabelle 2 angegebenen Werte gefunden wurden.

Entsprechend den Analogieen in Tabelle 1 besteht die Entsprechung $U \mathrel{\widehat{=}}$ D.v., also im Punkt J am angetriebenen Gurtende:

$$U_{JT} \mathrel{\widehat{=}} D \cdot v$$

Die Ableitung nach der Zeit der komplexen Amplitude U_{JT} ergibt sich durch Multiplizieren mit der Kreisfrequenz ω und Phasen-Vorverschiebung um 90°, also besteht in Absolutwerten die Beziehung:

$$| U_{JT} \cdot \omega | \mathrel{\widehat{=}} D \cdot \dot{v}$$

Die Werte der Kreisfrequenz und der Beschleunigung sind bekannt ($\omega = 1{,}0$ bzw. $\dot{v} = 2{,}64$ m/s²), also ergibt sich die Dualkonstante:

$$D = \frac{U_{JT} \cdot \omega}{2{,}64} = \frac{40\,000 \cdot 1}{2{,}64} = 15\,150$$

Laut Tabelle 1 besteht die Entsprechung $I \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{D} P$ und es wurde gefunden $I = 43.10^6 \frac{1}{D}$ kp; hieraus folgt die Amplitude der dynamischen Kraft:

$$P = D \cdot I = D \cdot \frac{43 \cdot 10^6}{D^2} = \frac{43 \cdot 10^6}{15\,150} = 2\,830 \text{ kp}$$

Diese Kraft im Punkte J entspricht einer stehenden Schwingung des Systems, bei welcher die Beschleunigung im Punkte J die Amplitude 2,64 m/s² hat. Praktisch erscheint dieser Scheitelwert der Kraft nur ein einziges mal, da die Beschleunigungs- (Anlauf-) Periode aufhört und danach die Schwingung abklingt.

Beim unbelasteten Anlauf des Gurtförderers KLS-1200 wurden durch direkte Messung im Auflaufpunkt des Gurtes auf der Antriebstrommel [8] folgende Gurtkräfte gemessen :

— Spannkraft vor dem Anlauf des Gurtes : $S_1 = 1\,620$ kp

— Höchstkraft während des Anlaufes : $S_{1\,max} = 4\,770$ kp

Es ergibt sich also eine dynamische Kraft von

$$4770 - 1620 = 3150 \text{ kp},$$

Welche den berechneten Wert um 11 % übertrifft.

b) *Anlauf mit Last*

In diesem Fall ändert sich der Wert einiger charakteristischen Daten des Gurtes uzw. :

— Metergewicht des oberen Trums : $q_2 = 74 + 210 = 284$ kp/m

— Wellen-Fortpflanzungsgeschwindigkeit im oberen Trum : $a_2 = \sqrt{\frac{1\,000 \cdot 720 \cdot 9{,}81}{284}} = 157$ m/s

(durch direkte Messung wurde gefunden $a_2 = 150$ m/s [8])

— Masse einer Hälfte des oberen Trums : $m_4 = m_5 = 141 \cdot 284/9{,}81 = 4\,080$ kp. s²/m

— äussere Dämpfung durch die Tragrollen des oberen Trums : $b'' = \frac{141 \cdot 284 \cdot 0{,}02}{1{,}85} = 433$ kp. s/m

Die Werte m_1, m_2, m_3, q_1, a_1, b und b', sowie c bleiben wie beim Anlauf ohne Last.

Bestimmung der Eigenfrequenz. Obige Werte in Gl. (5) eingeführt, ergeben :

$$1 - 0{,}383 \operatorname{tg} \nu \operatorname{tg} 2{,}61\,\nu = 0{,}144\,\nu\,(0{,}383 \operatorname{tg} 2{,}61\,\nu + \operatorname{tg} \nu)$$

$$A = B$$

Durch graphische Lösung der obigen Gleichung (Abb. 9) ergibt sich für die Grundschwingung $\nu_1 = 0{,}504$ und somit :

$$\omega = \frac{\nu \cdot a_1}{l_1} = \frac{0{,}504 \cdot 410}{282} = 0{,}73\ \text{s}^{-1}$$

woraus $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{0{,}73} = 8{,}6$ s folgt. Beim Anlauf mit Last wurde in Wirklichkeit eine Periodendauer von cca 9,7 s gemessen [8], also etwa 11 % grösser als berechnet.

Beim Anlauf mit Last ergeben sich folgende elektrische Analog-Werte :

$$R = 27\,000 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s (unverändert)}$$

$$R' = 15\,600 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s (unverändert)}$$

$$R'' = \frac{D^2}{b''} = \frac{D^2}{433} = 2\,310 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s} \qquad (15)$$

$$L\omega = \frac{D^2\omega}{c} = \frac{D^2 \cdot 0{,}73}{5\,100} = 143 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s} \qquad (16)$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{D^2}{\omega m_1} = \frac{D^2}{0{,}73 \cdot 174} = 8\,000 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s} \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{D^2}{\omega m_{2(3)}} = \frac{D^2}{0{,}73 \cdot 605} = 2\,270 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s} \qquad (18)$$

$$\frac{1}{\omega C_4} = \frac{1}{\omega C_5} = \frac{D^2}{\omega m_{4(5)}} = \frac{D^2}{0{,}73 \cdot 4\,080} = 336 \cdot 10^{-6} \cdot D^2 \text{ m/kp.s} \qquad (19)$$

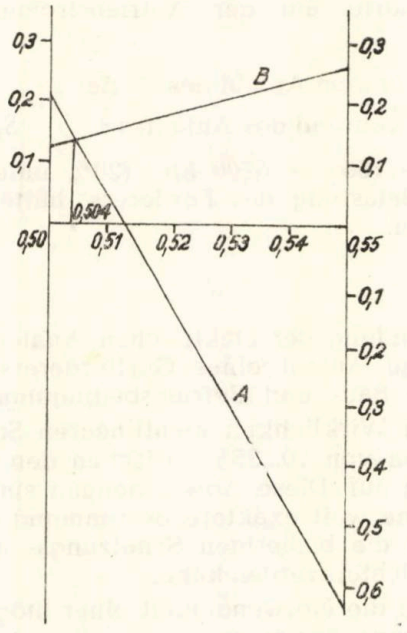


Abb. 9

Das mechanische und das elektrische Analog-Schaltbild bleibt unverändert, wie in Abb. 6 und 7 gezeigt.

In diesem Falle wird : $U_{JT} = 46{,}6 \cdot 10^3$ m/s und

$$I = 140{,}5 \cdot 10^6 \frac{1}{D^2} \text{ kp.}$$

Auf Grund der obigen Methode wird die Dual-Konstante berechnet, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Anlaufzeit mit Last 0,95 s, also die Beschleunigung 1,85 : 0,95 = 1,95 m/s² ist :

$$D = \frac{U_{JT} \cdot \omega}{1{,}95} = \frac{46{,}0 \cdot 10^3 \cdot 0{,}73}{1{,}95} = 17\,450$$

Hieraus folgt die Amplitude der dynamischen Kraft :

$$F = D \cdot \frac{I}{D^2} = \frac{140{,}5 \cdot 10^6}{17\,450} = 8\,050 \text{ kp}$$

In der Arbeit [8] wird über eine dynamische Kraftmessung am Förderer KLS-1200 berichtet, bei welcher der Gurt eine Meterlast von 210 kp/m nur auf einer Länge von 230 m hatte (also nicht auf der ganzen Gurtlänge von 282 m, wie in obiger Rechnung angenommen). Am Auflaufpunkt des Gurtes auf der Antriebstrommel wurden folgende Kräfte gemessen :

— Spannkraft vor dem Anlauf des Gurtes : $S_1 = 1\,660$ kp

— Höchstkraft während des Anlaufes : $S_{1\,max} = 7\,860$ kp

also $S_{dyn} = 7860 - 1660 = 6200$ *kp* (23% unter dem berechneten Wert). Bei voller Belastung des Förderers hätte sich eine kleinere Abweichung ergeben.

Schlussfolgerungen

1) Durch Anwendung der elektrischen Analogie können die dynamischen Kräfte beim Anlauf eines Gurtförderers unter Berücksichtigung verschiedener Bau- und Betriebsbedingungen bestimmt werden.

2) Wegen des in Wirklichkeit nichtlinearen Schwingungsverhaltens treten Abweichungen von 10...25% zwischen den gemessenen und den berechneten Werten auf. Diese Abweichengen sind jedoch annehmbar, da in jedem Fall eine weit exaktere Bestimmung der Gurtkräfte ermöglicht wird und auf die bisherigen Schätzungs- und Überdimensionierungsverfahren verzichtet werden kann.

3) Es ergibt sich die Notwendigkeit einer möglichst genauen experimentellen Bestimmung der mechanischen Kennwerte der Fördergurte, insbesondere des dynamischen Elastizitätsmoduls und der Materialdämpfung.

Lehrstuhl Maschinen — Elemente
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bukarest

LITERATUR

1. *Crede-Harris*, — Vibration Handbook, Vol. II, New York, 1962, Mc Graw — Hill Book Co.

2. *Segal Hugo*, — Vibrația longitudinală a transportoarelor cu bandă în perioada de pornire. In : Construcția de Mașini, nr. 12/1968, S. 702—709.

3. *Segal Hugo*, — Asupra forțelor dinamice din perioada de pornire a benzilor transportoare. In : Construcția de Mașini, nr. 1/1969, S. 1—6.

4. *Hecht, H.*, — Schaltscemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde, Leipzig 1939,, Johann Ambrosius Barth.

5. *Hübner, E.*, — Technische Schwingungslehre, Berlin 1957, Springer-Verlag.

6. *Hähnle, W.*, — Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, Bd.XI-1 (1932), S. 1-23.

7. *Spivakowski-Potapow-Kotow*, — Kariernii konveiernii transport, Moskau 1965, Izd. „Nedra".

8. *Bilitschenko-Vysocin-Zavgorodnii*, — Exploatationii regimii lentocinih konveierov, Kiev 1964, Gos. Izd. Tehn. Lit.

9. *Keller-Blasi*, — Artikelserie in der Bergbautechnik, nr. 11/1953, 7/1955 und 4/1956.

10. *Vierling, P. u. Matting, A.*, — Zum dynamischen Verhalten von Gummifördergurten mit Gewebeeinlagen, in : Fördern und Heben, nr. 5 und 6/1962.

11. *Thormann, D.*, — Vergleichende Betrachtung von Verfahren zur Berechnung der Antriebsleistung von Gummigurtförderern, in : Fördern und Heben Nr. 8/1966.

C.Z. : 621.3.016 : 4

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

REȚELE ELECTRICE

ȘOCURILE DE PUTERE PRODUSE DE CONSUMATORII INDUSTRIALI ȘI MĂSURI DE REDUCERE A EFECTELOR LOR

I. IORDĂNESCU, GH. IACOBESCU

1. Considerații generale

Trăsătura caracteristică a dezvoltării industriale în perioada actuală o constituie apariția de mari întreprinderi și combinate industriale, care, prin specificul utilajelor și instalațiilor necesitate de fluxul tehnologic, pun o serie de probleme noi pentru alimentarea cu energie electrică. Astfel de probleme care influențează atît instalațiile proprii ale consumatorilor cît și restul sistemului energetic sînt :

a) șocurile de putere reactivă produse de laminoare, de cuptoarele electrice cu arc, de motoarele mari asincrone la pornire și de cele sincrone de mare putere în perioada de pornire în asincron.

b) șocurile de putere activă produse în deosebi de laminoare și de cuptoarele cu arc.

c) asimetriile și deformarea curbei de curent și tensiune datorită redresoarelor, cuptoarelor cu arc, tracțiunii electrice etc.

Condițiile de alimentare cu energie electrică și de funcționare a acestor consumatori sînt pe de altă parte influențate și de caracteristicile sistemului electroenergetic în nodul de racordare prin :

a) caracteristicile generatorului echivalent al sistemului ;

b) siguranța alimentării pe care o poate asigura sistemul energetic în nodul respectiv.

c) domeniul variațiilor lente de tensiune în regim normal de funcționare.

d) caracteristicile variațiilor bruște de tensiune determinate de mărimea și frecvența șocurilor de putere reactivă și de mărimea puterilor de scurtcircuit.

În materialul de față se vor examina problemele privind producerea șocurilor de putere activă și reactivă și în continuare se va insista asupra aspectelor specifice legate de șocurile de putere reactivă.

2. Caracteristicile șocurilor de putere activă și reactivă

Elementele caracteristice ale șocurilor de putere privesc forma generală a curbei de variație a șocului, panta de creștere, valoarea maximă, durata și frecvența de producere.

* Manuscris predat la redacție la 26 octombrie 1968.

Fiecare dintre aceste mărimi diferă în funcție de instalația care produce șocurile.

În ceea ce privește laminoarele alimentate prin intermediul redresoarelor, acestea produc șocuri de putere activă și reactivă ale căror curbe caracteristici și poziție reciprocă sînt indicate în fig. 1. Din această figură se constată că cele două șocuri se produc practic în același timp și iau forma curbelor foarte asemănătoare.

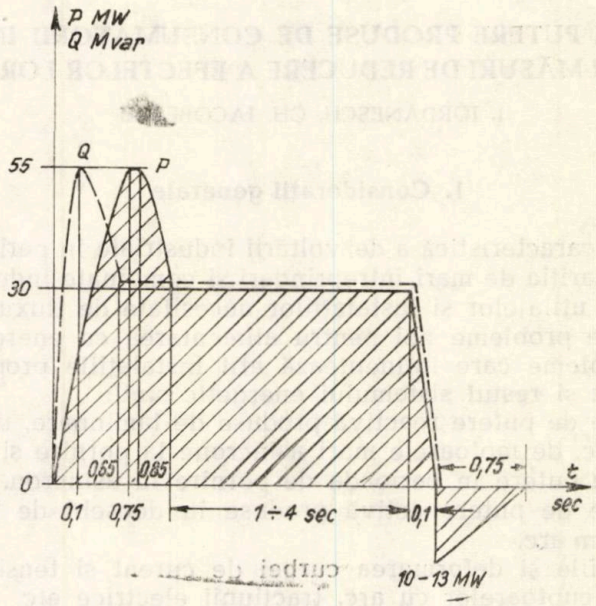


Fig. 1

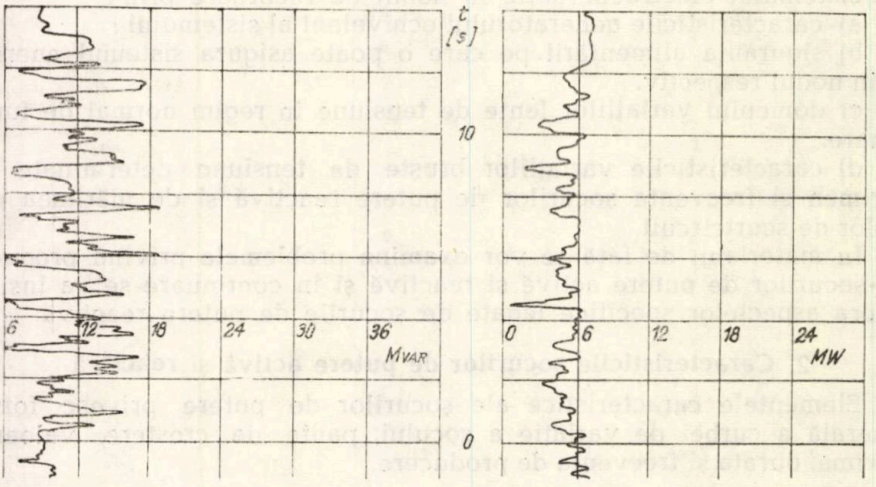


Fig. 2

Ambelor curbe le este caracteristică o viteză foarte mare de creştere, respectiv de cca 300 MW/s pentru şocul de putere activă şi cca 500 MVAr/s pentru cel de putere reactivă.

Atît din fig. 1cît şi din fig. 2, în care se reprezintă curbele ridicate prin măsurători efectuate la un laminor, se constată că în general şocul are două trepte. Valoarea şocului corespunzătoarea primei trepte are o valoare cel puţin dublă faţă de treapta a doua.

Frecvenţa de producere a acestor şocuri este cuprinsă între 10 şi 30 pe minut.

În cazul cuptoarelor electrice cu arc şocurile se produc în perioada de topire a materialului şi au valori maxime în momentele cînd electrozii vin în contact direct cu metalul, datorită scurtcircuitelor care apar.

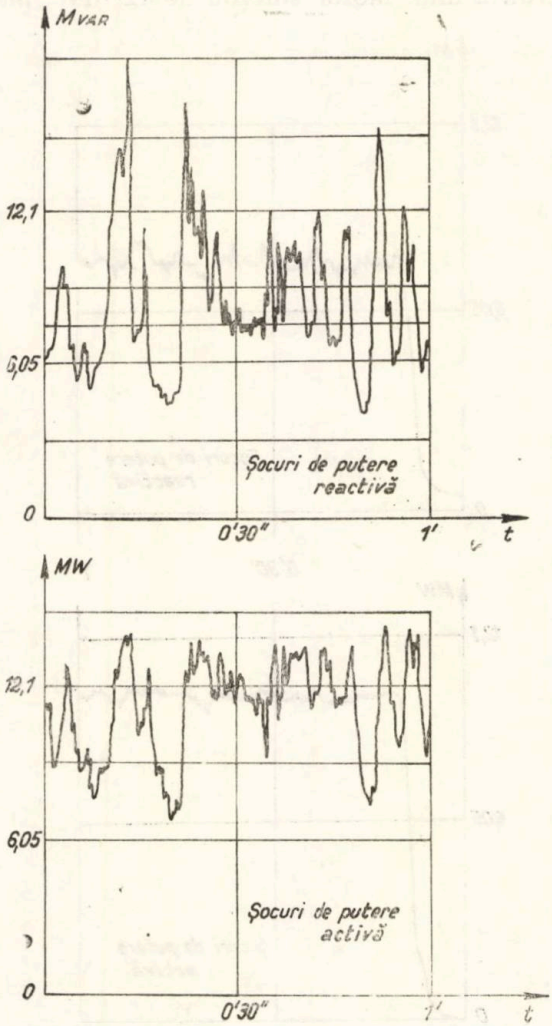


Fig. 3

Din fig. 3 în care se redau curbele înregistrate pentru un cuptor cu arc de 50 t în perioada de topire se constată că panta de creştere a şocurilor nu este constantă, valorile maxime diferă foarte mult ca mărime, variind între 100%—200% faţă de puterea de bază, iar ca frecvenţă se produc 20—30 pe minut.

Fenomenul este mult atenuat, aşa cum rezultă din fig. 4, în perioada de afinare, caracterizată prin valori foarte reduse ale şocurilor, atît de putere activă cît şi reactivă.

Şocuri de putere reactivă apar şi la pornirea motoarelor asincrone de mare putere cu rotorul în scurtcircuit precum şi la pornirea în asincron a motoarelor sincrone de mare putere.

Ca exemplu de mărime a unui astfel de şoc se menţionează că la pornirea în asincron a unui motor sincron de 12 MW, puterea reactivă

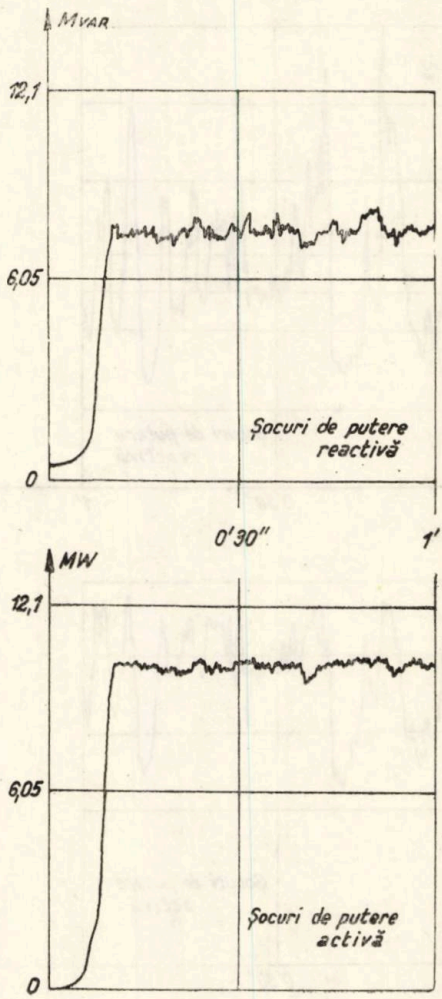


Fig. 4

absorbită la 6 kV este de cca 30 MVAr, iar la barele de 110 kV, după un transformator de 40 MVA folosit pentru pornire şocul este de cca. 65 MVAr.

Frecvenţa acestor şocuri este desigur rară, deoarece pornirea unor astfel de motoare, în mod normal, se face la perioade lungi de timp.

3. Efectele şocurilor de putere reactivă

Şocurile de putere reactivă, care vor fi examinate în continuare, au ca efect variaţii bruşte de tensiune la barele la care sînt racordaţi consumatorii care le produc.

În funcţie de mărimea şi frecvenţa şocurilor de putere reactivă şi de puterea de scurtcircuit în nodul respectiv, variaţiile de tensiune care apar, pot să fie mari şi să perturbe funcţionarea normală a celorlalte receptoare alimentate de la aceeaşi bară. Astfel, variaţiile de tensiune produse în timpul pornirii în asincron a motoarelor sincrone de mare putere racordate direct pot să atingă valori foarte ridicate, de 20—30%, din tensiunea nominală la bare.

Aceste variaţii importante de tensiune nu pun în general probleme pentru funcţionarea permanentă a consumatorilor, deoarece acestea se produc la perioade mari de timp. Influenţează însă receptoarele de forţă racordate la aceleaşi bare şi în deosebi motoarele asincrone ,al căror cuplu variază cu pătratul tensiunii.

La aceste motoare cuplul activ maxim corespunzător tensiunii nominale este cca 2 (în unităţi relative), iar cel rezistent 1. Dacă tensiunea ajunge, în cazul unei porniri în asincron, la 0,70 U_n momentul maxim se reduce la jumătate, adică la 1, devenind deci aproximativ egal cu momentul rezistent al mecanismului antrenat. In cazul cînd acesta are caracteristica m_r = const, respectiv moment rezistent constant, independent de turaţie, scăderea tensiunii sub 0,7 U_n poate conduce la oprirea motoarelor asincrone respective.

Deranjarea celorlalţi consumatori (lumină, radio etc.) la o astfel de frecvenţă a şocurilor poate să nu fie luată în considerare.

Ca exemplu, în fig. 5 se redă oscilograma efectuată cu ocazia pornirii în asincron a unui motor sincron de 12 MW, folosind o bobină de reactanţă bloc cu un transformator de 110/6 kV. Puterea de scurtcircuit la barele de 110 kV a fost de 400 MVA. După cum se constată din diagramă, tensiunea la barele de 6 kV scade în momentul pornirii la 4,125 kV, respectiv 0,69 U , iar la bornele motorului, după bobina de reactanţă, 2,4 kV reprezentînd 0,4 U_n.

Se menţionează că aceste valori ale tensiunilor în cele două puncte pot fi considerate ca minimale pentru asigurarea menţinerii funcţionării motoarelor racordate la bara de 6 kV şi pentru pornirea motorului sincron antrenînd un mecanism cu caracteristică de tip ventilator.

În ceea ce priveşte variaţiile de tensiune produse de laminoarele alimentate prin redresoare, acestea se produc cu o frecvenţă de 10—30 pe minut, corespunzătoare şocurilor, iar ca valoare se situează între 4 şi 12%, în funcţie de puterea de scurtcircuit în nodul considerat şi de valoarea şocului de putere reactivă. Variaţii de tensiune de acest ordin de mărime şi frecvenţă deranjează permanent iluminatul, aparatele de

radio, de televiziune, consumatori de forță care nu admit variații de tensiune ș.a.

În general, cînd fluctuațiile de tensiune cunoscute sub denumirea de flicker depășesc 1% se produc pîlpîri la iluminat, și care dăunează

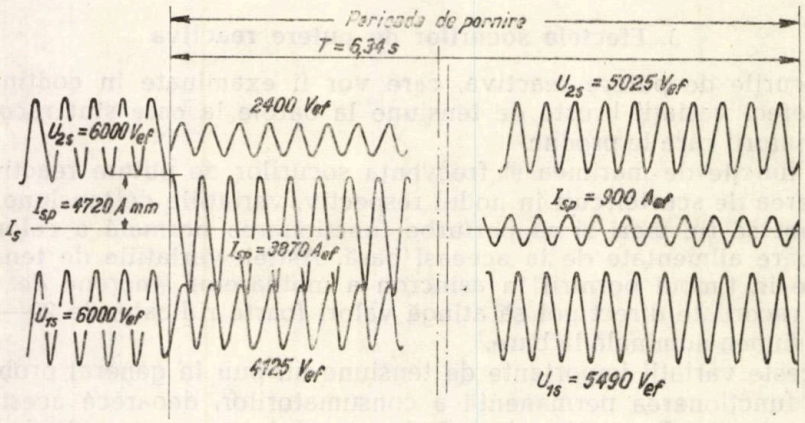


Fig. 5

foarte mult vederii. Pentru ca fenomenul să apară este de asemeni necesar ca variația intensității luminoase să aibă loc cu o perioadă mai mare de $\frac{1}{30}$ s.

Cuptoarele electrice produc de asemeni variații de tensiune, dar, întrucît în general valoarea șocurilor este mai mică decît în cazul laminoarelor, sînt în general de ordinul a 1% din U_n.

4. Calculul variațiilor de tensiune

Ne ocupăm în primul rînd de cazul pornirii în asincron a unui motor sincron. Cunoscînd caracteristicile motorului de pornit și puterea

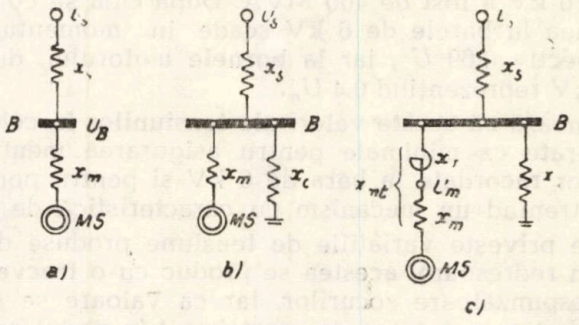


Fig. 6

de scurtcircuit în nodul B de racordare (fig. 6a) se pot determina reactanţele :

x_s — reactanţa sistemului
x_m — reactanţa motorului

valoarea tensiunii u_B în momentul pornirii este dată de relaţia :

$$u_B = \frac{U_s \cdot x_m}{x_s + x_m} \tag{1}$$

În cazul cînd la bara B mai sînt racordaţi alţi consumatori (fig. 6b), se determină reactanţa acestora x_c şi reactanţa echivalentă motor-consumatori

$$x_e = \frac{x_c \cdot x_m}{x_c + x_m} \tag{2}$$

iar relaţia (1) devine :

$$u_B = \frac{U_s \cdot x_e}{x_s + x_e} \tag{3}$$

Pentru ca pornirea motorului considerat să nu deranjeze celelalte motoare racordate la bara B este necesar ca $U_B \geqslant 0{,}7\ U_{nB}$. Dacă $U_B < 0{,}7\ U_{nB}$ în serie cu motorul de pornit se prevede o bobină de reactanţă, care să asigure condiţia de tensiune necesară (fig. 6c). În acest caz în relaţia (2) se înlocuieşte x_m cu :

$$x_{tm} = x_m + x_r \tag{4}$$

unde x_r — reactanţa bobinei.

Din relaţia (1) pusă sub forma :

$$U_B = 0{,}7\ U_{nB} = \frac{U_s \cdot x_{tm}}{x_{tm} + x_s} \tag{5}$$

se scoate x_{tm} iar din relaţia (4) se determină x_r.

Bobina de reactanţă trebuie să asigure condiţii de pornire şi pentru motorul considerat. Pentru aceasta trebuie să se verifice ca tensiunea U_m la bornele motorului să satisfacă relaţia :

$$U_m \geqslant 0{,}4\ U_{mn}$$

În cazul şocurilor de putere reactivă produse de laminoare şi de cuptoarele electrice cu arc se pot de asemeni determina variaţiile de tensiune la barele de unde sînt alimentate.

În general, se cunoaşte mărimea şocului şi puterea de scurtcircuit la bara respectivă. Cu aceste mărimi se poate determina cu aproximaţie suficientă pentru practică valoarea variaţiei de tensiune, ΔU, folosind relaţia :

$$\Delta U = \frac{\Delta Q}{S_{sc}}$$

unde :

ΔQ = mărimea şocului

S_{sc} = puterea de scurtcircuit în nod.

Pentru a nu se produce fenomenul de flicker este necesar ca

$$\Delta U \leqslant 0{,}01\, U_n$$

5. Măsuri de luat în scopul limitării variaţiilor de tensiune

Prin măsurile care se iau, se urmăreşte asigurarea condiţiilor normale de funcţionare permanentă a consumatorilor deranjaţi de variaţiile de tensiune şi în deosebi evitarea fenomenului de pîlpîire a iluminatului. Acest fenomen există în centrele de consum unde sînt consumatori laminoare şi cuptoare electrice cu arc şi valorile variaţiilor de tensiune depăşesc 1 %.

Măsurile respective depind de caracteristicile şocurilor, respectiv de mărimea, viteza de creştere şi de frecvenţa lor, precum şi de rigiditatea nodului în care sînt racordaţi astfel de consumatori. Aceasta este exprimată în general prin puterea de scurtcircuit minimă.

Ca măsuri posibile de luat sînt următoarele :

a) realizarea unei scheme de alimentare corespunzătoare ;
b) folosirea generatoarelor din centralele electrice locale ;
c) montarea de compensatoare sincrone cu caracteristici speciale ;
d) montarea de condensatoare serie pe circuitul principal de alimentare al consumatorului cu şocuri.

Prima categorie de măsuri (a) constă din separarea consumatorilor cu şocuri de consumatorii liniştiţi, trecîndu-i pe o secţie de bare separată. Realizarea acestei măsuri depinde de posibilitatea separării în staţie a unei secţii de bare pe care să debiteze un transformator separat.

Aceasta poate conduce la utilizarea neraţională a secţiei de bare şi a transformatorului, în cazul cînd consumatorii liniştiţi necesită o putere redusă în raport cu capacitatea instalaţiilor separate, precum şi la o micşorare a siguranţei în alimentarea tuturor consumatorilor. Evitarea acestor dezavantaje se poate realiza prin montarea unui transformator în plus în staţie, numai pentru consumatorii cu şocuri, ceea ce din punct de vedere tehnico-economic poate să nu fie indicat.

Cea de-a doua măsură (b) poate fi aplicată în cazurile cînd în cadrul consumatorului care produce şocuri, din motive tehnologice se justifică şi construirea unei centrale electrice locale. În această situaţie este necesar ca puterea grupurilor generatoare să fie suficientă pentru acoperirea şocurilor. Măsura constă din echiparea generatoarelor cu sisteme de excitaţie şi reglaj de tensiune foarte rapide şi sensibile şi care să poată acoperi ca mărime şi viteză de creştere, şocurile produse de consumatori.

Astfel de performanţe se pot obţine numai folosind sisteme de excitaţie şi reglaj moderne, cu elemente semiconductoare.

A treia măsură (c), privind montarea compensatoarelor sincrone speciale, poate fi justificată în cazul şocurilor de putere cu frecvenţă

mare şi cînd nu există o centrală electrică locală corespunzător echipată. Aceste compensatoare au caracteristici speciale în comparaţie cu compensatoarele obişnuite şi anume : o putere permanentă, o putere maximă, (de vîrf), panta de creştere a puterii produse, reactanţe reduse. Ele sînt alese pe baza calculelor efectuate avînd în vedere specificul consumatorului şi al nodului reţelei de alimentare.

O măsură eficientă în scopul limitării variaţiilor de tensiune, o constituie şi montarea de baterii de condensatoare serie pe circuitul principal de alimentare a consumatorilor cu şocuri (d).

În general această măsură, care se adoptă în urma unui calcul tehnico-economic, rezultă mai indicată atunci cînd şocurile de putere reactivă, care urmează a fi compensate, nu sînt prea mari şi deci nu se justifică montarea compensatoarelor sincrone speciale.

Prin montarea bateriilor de condensatoare serie se obţine o reducere a pierderii de tensiune şi o limitare a domeniului de variaţie a tensiunii, practic simultan cu producerea şocului. Aceasta întrucît nu intervine nici o constantă de timp, aşa cum este cazul compensatoarelor sincrone, care să micşoreze promptitudinea de intervenţie.

În fig. 7 se prezintă cazul montării unei baterii de condensatoare serie în circuitul de alimentare al unui consumator care produce un şoc de putere reactivă de 100% respectiv de la Q la 2Q. Se consideră că se compensează 50% din reactanţa anterioară a circuitului.

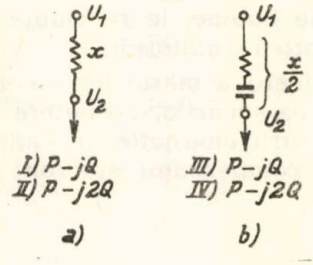


Fig. 7

Considerînd determinantă componenta longitudinală a pierderii de tensiune şi neglijînd rezistenţa se obţine pentru fiecare caz în parte :

a) necompensat fără şoc : $\Delta U_I = \frac{QX}{U_2}$

b) necompensat cu şoc :

$$\Delta U_{II} = \frac{2\,QX}{U_2} = 2\,\Delta U_I$$

c) compensat fără şoc :

$$\Delta U_{III} = \frac{QX}{2.U_2} = \frac{\Delta U_I}{2}$$

d) compensat cu şoc :

$$U_{IV} = \frac{2.QX}{2\,U_2} = \Delta U_1$$

Reprezentînd fazorial aceste rezultate, în ipoteza U_1 = const, rezultă (fig. 8)că, în ipotezele de calcul considerate, prin montarea bateriei de condensatoare serie, atît căderea de tensiune cît şi domeniul de variaţie a tensiunii s-a redus la 50% faţă de situaţia necompensată.

În ceea ce priveşte măsurile care se pot lua pentru limitarea căderii de tensiune la pornirea motoarelor mari asincrone sau a celor sincrone în asincron, acestea constau, aşa cum s-a justificat mai sus

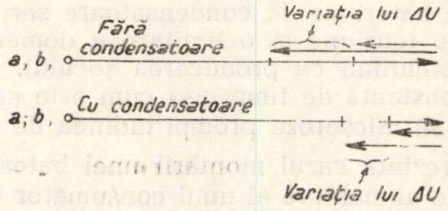


Fig. 8

(par. 3) din montarea de bobine de reactanţă special dimensionate în serie cu înfăşurarea statorică a motorului.

Ca exemplu de aplicare a măsurilor de limitare a variaţiilor de tensiune prin compensarea şocurilor de putere reactivă ,se menţionează faptul că în sistemul nostru energetic, în cadrul unui comb nat metalurgic, s-a prevăzut un compensator sincron special cu următoarele caracteristici :

Puterea permanentă	: 20 MVA
Puterea maximă (de vîrf)	: 60 MVA
Panta (viteza) de creştere a puterii produse	: 500 MVA/s

Reactanţe : $x''_d = 13\,\%$; $x'_d = 21\,\%$; $x_d = 134\,\%$

Tensiunea nominală 6 kV.

6. Concluzii

În dezvoltarea actuală a sistemelor energetice, prin apariţia marilor combinate metalurgice, chimice, etc. în cadrul cărora funcţionează consumatori ca : laminoare, cuptoare electrice cu arc, motoare mari asincrone şi sincrone se pun noi probleme care trebuiesc rezolvate pentru asigurarea unei alimentări normale cu energie electrică. Dintre aceste probleme sînt şi cele legate de şocurile de putere activă şi reactivă produse de instalaţiile respective. Efectele acestor şocuri şi în deosebi a celor de putere reactivă, pe care le-am examinat în materialul de faţă, constau în apariţia unor variaţii inadmisibile de tensiune

la barele la care sînt racordate, care deranjează restul consumatorilor, liniștiți de pe aceleași bare și în deosebi iluminatul.

Aceste dificultăți care apar, pot fi evitate prin prevederea de măsuri eficiente (compensatoare sincrone speciale, baterii de condensatoare serie etc.) care prin alegerea și dimensionarea corespunzătoare să readucă variațiile de tensiune în limite admisibile pentru toți consumatorii.

Catedra de rețele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. * * * — Alimentarea cu energie electrică a întreprinderilor industriale. Editura tehnică — București, 1965.

2. *Sîrmiatnicov, I. A.* — Rejimî rabotî asinhronîh electrodvigatelei Gosenergoizdat — Moscova, 1955.

3. *Fedoorv, A. A.* — Electrosnabjenie promîsleniîh predpriatii Gosenergoizgat — Moscova, 1961.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

MAŞINI UNELTE

C.Z.: 621.65

STUDIUL PIERDERILOR VOLUMICE DIN POMPELE CU PISTOANE AXIALE CU DISTRIBUŢIE SFERICĂ *

A. OPREAN, I. GHEGHEA, N. STAN, L. MĂSALAR

Acţionările hidrostatice au căpătat o largă răspîndire în ultima vreme în construcţia de maşini datorită avantajelor importante pe care le prezintă faţă de alte sisteme de acţionare. Se poate afirma cu certitudine că aproape nu există maşină modernă care să nu folosească aceste acţionări, indiferent dacă este vorba de maşini auto, locomotive Diesel, maşini agricole, escavatoare, avioane, rachete, sau maşini unelte.

Unul din cele mai importante elemente componente ale acestor sisteme de acţionare este generatorul de presiune hidrostatică. În cadrul numărului mare de tipuri de generatoare hidraulice un loc important îl ocupă pompele cu pistonaşe axiale, care datorită unor calităţi deosebite, cum sînt compactitatea şi randamentul ridicat, sînt larg răspîndite. Aceste generatoare hidraulice se folosesc în diverse variante: cu debit constant sau reglabil, cu disc sau cu bloc înclinabil, ca pompe sau ca motoare.

Lucrarea de faţă are ca obiect studiul pierderilor volumice prin jocurile pompelor cu pistonaşe axiale cu distribuţie sferică fabricate la noi în ţară pentru diverse scopuri avînd perspective de folosire şi la maşinile unelte şi presele fabricate în ţară.

Aceste pompe sînt de înaltă presiune, deci cu diferenţă mare de presiune între cele două camere active, ceea ce favorizează pierderile volumice şi în consecinţă reducerea debitului real furnizat de pompă. În cele ce urmează se vor determina analitic pierderile volumice care au loc prin jocurile pompei, neglijîndu-se pierderile din conducta şi camera de aspiraţie, precum şi cele care apar datorită umplerii incomplete a „cupelor" datorită vîscozităţii lichidului şi vitezei mari de rotaţie.

Avînd în vedere construcţia pompei reprezentată în fig. 1, pierderile totale prin jocurile pompei pot fi determinate prin însumarea pierderilor la pistonaşele 1 şi la distribuitorul 2 cu relaţia:

$$\Delta Q_t = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 + \Delta Q_5 \qquad (1)$$

* Lucrare comunicată la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1—3 noiembrie 1968.

a) **Calculul pierderilor de lichid la pistonașe** (ΔQ_1)

Avînd în vedere prezența canalelor circulare de etanșare și echilibrare a presiunilor radiale, caracterul curgerii peliculei de lichide se modifică, însă dat fiind dimensiunile mici ale acestor canale (R = 0,7 mm) modificarea poate fi neglijată. După un timp oarecare de funcționare, dimensiunea acestor canale care au și rolul de colector se

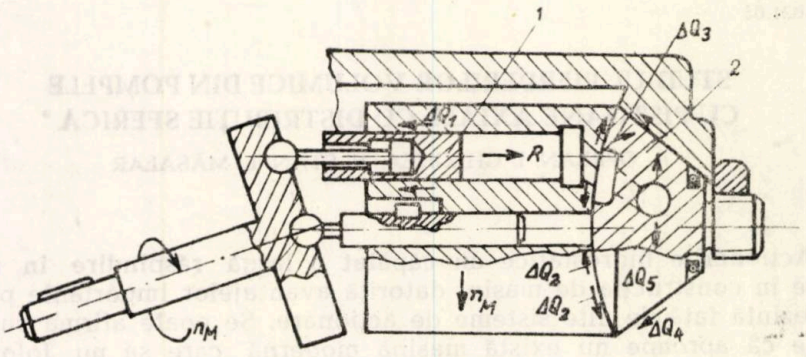


Fig. 1

micșorează și mai mult datorită incluziunilor mecanice, a precipitațiilor chimice și fenomenului de adsorbție din lichidul de lucru. Se consideră de asemenea un joc diametral uniform ,facilitat de prezența canalelor circulare.

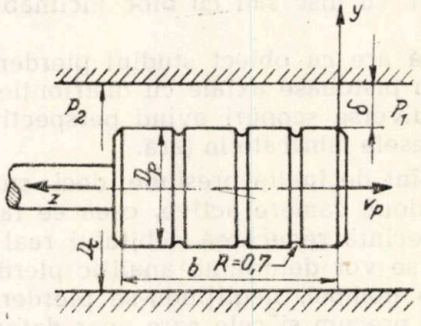


Fig. 2

Debitul de lichid ΔQ_1 ce curge în direcție axială prin fanta formată între pistonaș și locașul acestuia (fig. 2) se poate calcua ținînd cont de numărul de pistonașe $\frac{z}{2}$ care refulează simultan cu relația [1, 2]:

$$\Delta Q_1 = \left(\frac{\Delta p \, \delta^3}{12 \eta b} + \frac{v_p \delta}{2} \right) \pi \cdot D_p \cdot \frac{z}{2} \qquad (2)$$

unde :

$\Delta p = p_1 - p_2$ — căderea de presiuni în fantă în kgf/cm²

$\delta = \frac{D_e - D_p}{2}$ — grosimea fantei în cm.

b — lungimea pistonașului în cm.

η — vîscozitatea dinamică a uleiului în kgfs/cm²

v_p — viteza pistonașului în cm/s.

D_p — diametrul pistonașului în cm.

z — nr. de pistonașe al pompei.

b) Calculul pierderilor de lichid prin fanta sferică a elementului de distribuție (ΔQ_2 și ΔQ_3)

Calculul debitului ce trece printre două suprafețe sferice care se găsesc în mișcare relativă una față de alta (fig. 3) (sfera exterioară se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei Z, iar cea interioară este fixă) se poate efectua pornind de la ecuația de mișcare a lichidelor vîscoase [3], care în coordonate sferice (fig. 4) considerînd vîscozitatea constantă și neglijînd forțele de inerție și masice se poate scrie sub forma următoarelor trei ecuații scalare :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\eta}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi \sin\theta)\right)\right]\right\} \tag{3a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\eta}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}(r v_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r v_\theta)\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\right]\right\} \tag{3b}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{\eta}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\sin\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi \sin\theta)\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r v_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r v_\theta)\right)\right]\right\} \tag{3c}$$

și ecuația de continuitate care în cazul cînd, densitatea lichidului este considerată constantă devine :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{4}$$

Aceste ecuații se vor rezolva în două cazuri de curgere a lichidului în direcția unghiului θ prin fanta cu unghiul $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ și grosime $\delta_0 = R_2 - R_1$, și în direcția unghiului φ prin fanta cu unghiul $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ și grosime $\delta_0 = R_2 - R_1$. Cunoscînd relațiile pentru debitele de lichid în aceste două direcții se poate determina și cantitatea de lichid totală ce se pierde în distribuitorul pompei cu pistonașe axiale.

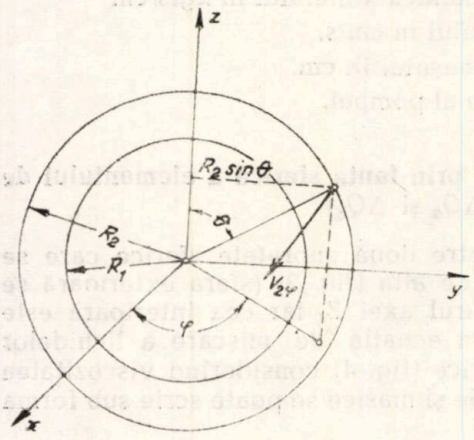


Fig. 3

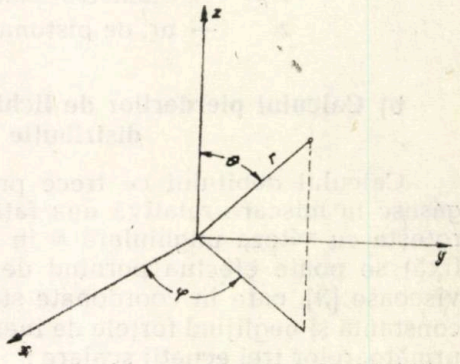


Fig. 4

În primul caz întrucît $v_r = 0$ și $v_\varphi = 0$ iar v_θ depinde numai de r și θ ecuațiile (3) și (4) se reduc la :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\eta}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta)\right] \tag{5a}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{\eta}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta)\right] \tag{5b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0 \tag{5c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0 \tag{6}$$

Avînd în vedere că $r_{max} = R_1 + \delta_0$ (unde R_1 — raza sferei interioare și δ_0 grosimea fantei) iar $\delta_0 \ll R_1$ se poate înlocui r cu R_1 în relația (5). Cunoscînd de asemenea $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ relațiile (5a) și (5b) devin :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) = 0 \tag{7a}$$

$$\frac{1}{R_1}\,\frac{\partial p}{\partial\theta} = \eta\,\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial^2 r} \tag{7b}$$

Din ecuația (7b) se obține expresia vitezei v_θ care după determinarea constantelor de integrare din condițiile ca pe conturul fantei aceasta să fie nulă este :

$$v_\theta = \frac{1}{2\eta R_1} \frac{dp}{d\theta}(r - R_1)(r - R_2) \tag{8}$$

Introducînd valoarea vitezei v_θ din relația (8) în relația (6) se obține :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dp}{d\theta}\right) = 0 \tag{9}$$

Integrînd și punînd condiția ca în fanta cu unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ să existe o cădere de presiune $\Delta p_\theta = p_{1\theta} - p_{2\theta}$ se obține :

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\Delta p_\theta}{\sin\theta} \frac{1}{ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}} \tag{10}$$

Înlocuind $\frac{dp}{d\theta}$ din expresia (10) în expresia (8) se obține viteza sub forma :

$$v_\theta = \frac{\Delta p_\theta}{2\eta R_1 \sin\theta} \frac{(r - R_1)(r - R_2)}{ln \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2}} \tag{11}$$

Se observă că viteza v_θ dată prin relația (11) verifică și ecuația (7 a).

Debitul de lichid prin fanta de grosime $\delta = R_2 - R_1$ avînd $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ și $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ se determină cu relația :

$$\Delta Q_\theta = \int_{R_1}^{R_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R_1 v_\theta \sin\theta \, d\varphi \, dr = \frac{\Delta p_\theta \Delta\varphi \delta_0^3}{12\eta ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}} \tag{12}$$

Cînd curgerea lichidului are loc în direcția unghiului φ pentru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 =$ constant, $v_r = 0$ $v_\theta = 0$ iar v_φ depinde numai de r și θ și ecuațiile (3) și (4) devin :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{13 a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \tag{13 b}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \eta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r v_\varphi \sin\theta)\right]\right\} \tag{13 c}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{14}$$

Făcînd aceiași aproximație ca în primul caz adică înlocuind r cu R_1 ecuația (13 c) devine :

$$\frac{1}{R_1 \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \eta\left\{\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\varphi \sin\theta)\right]\right\} \tag{15}$$

Soluția ecuației (15) este :

$$v_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{2\eta R_1}\frac{dp}{d\varphi} r^2 + c_1 r + c_2\right) \tag{16}$$

Determinînd constantele C_1 și C_2 din condiția ca pentru $r = R_1$, $v_\varphi = v_{1\varphi} = R_1 \omega \sin\theta$ și pentru $r = R_2$, $v_\varphi = 0$ se obține din (16) pentru v_φ relația :

$$v_\varphi = \frac{1}{2\eta R_1}\frac{dp}{d\varphi}\frac{(r-R_1)(r-R)_2}{\sin\theta} \pm \frac{R_2 \omega \sin\theta}{\delta}(r - R_1) \tag{17}$$

unde :

ω — viteza unghiulară a sferei exterioare.

Semnul plus înaintea termenului doi corespunde cazului cînd viteza sferei exterioare este îndreptată în sensul măririi presiunii iar semnul minus în sens invers.

Introducînd în (14) expresia lui v_φ din (17) se obține :

$$\frac{d^2 p}{d\varphi^2} = 0 \tag{18}$$

Integrînd relația (18) și punînd condiția ca în fanta cu unghiul la centru $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ să existe o cădere de presiune $\Delta p_\varphi = p_{2\varphi} - p_{1\varphi}$ se obține :

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{\Delta p_\varphi}{\Delta \varphi} \tag{19}$$

Înlocuind expresia (19) în relația (17) se obține expresia vitezei, cu ajutorul căreia se procedează ca în cazul precedent determinîndu-se debitul de lichid ce curge prin fanta sferică în direcția unghiului φ :

$$\Delta\theta_\varphi = \int_{R_1}^{R_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} R_1 v_\varphi \, d\theta \, dr = \frac{\Delta p_\varphi \cdot \delta^3}{12\eta \Delta\varphi} ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}} \pm \frac{R_2 R_1}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{20}$$

Semnele duble din fața ultimului termen au aceiași semnificație ca în cazul lui v_φ.

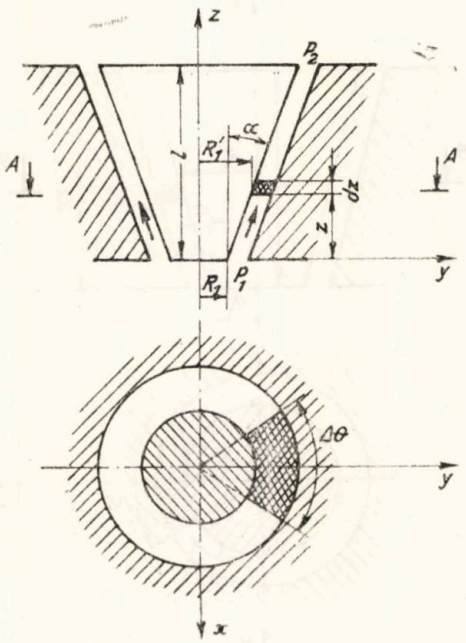
c) **Calculul pierderilor de lichid prin fanta conică a disribuitorului** ΔQ_4 și ΔQ_5

Pentru determinarea lui ΔQ_4 și ΔQ_5 se pornește de la debitul pentru fante cilindrice. În acest sens se consideră pentru calculul lui ΔQ_4 (debitul în direcția axială) un element de grosime dz și cu unghiul la centru $\Delta\theta$ (fig. 5).

Debitul lichidului ce curge prin fanta conică cu unghiul la centru $\Delta\theta$ este același în oricare secțiune a fantei perpendiculară pe ax numai că presiunea nu va depinde liniar de z ci după o altă lege.

Întrucît dz este foarte mic debitul de lichid ce trece prin acest element de fantă se obține cu relația pentru fanta cilindrică [1, 2] unde l se înlocuiește cu dz și Δp cu dp ;

$$\Delta\theta_z = \frac{dp\,\Delta\theta\,\delta^3 R_1'}{12\,\eta\,dz} \tag{21}$$



Secțiune A-A

Fig. 5

Înlocuind în (21) R'_1 cu relația :

$$R_1' = R_1 + z\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{22}$$

dedusă conform figurei 4 se poate obține :

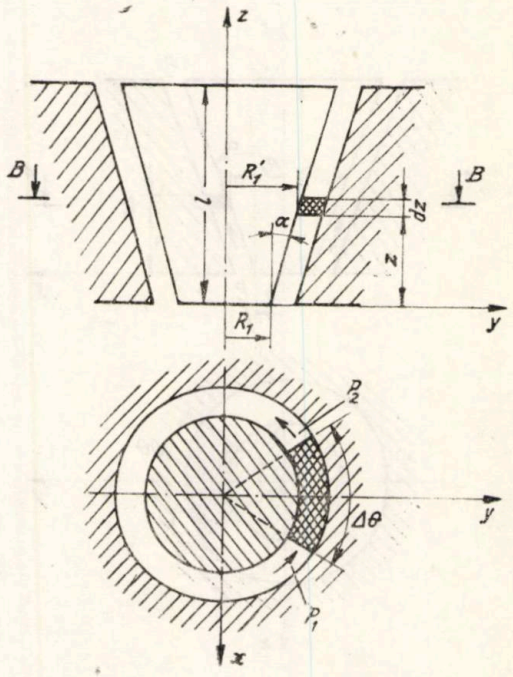
$$dp = \frac{12\,\eta\,\Delta\theta_z}{\Delta\theta\,\delta^3} \cdot \frac{dz}{R_1 + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{23}$$

Integrînd și punînd condiția ca pe lungimea $z = l$ să existe o cădere cu presiune Δp_z găsim expresia debitului :

$$\Delta Q_4 = \frac{\Delta p\,\overline{\Delta}\theta\,\delta^3}{12\,\eta} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{ln\left(1 + \frac{l}{R_1}\mathrm{tg}\,\alpha\right)} \tag{24}$$

Pentru obţinerea debitului de lichid ce curge în direcţie tangenţială printr-o fantă conică se porneşte de la debitul prin fantă cilindrică în direcţia tangenţială [1] care în cazul cînd cele două suprafeţe din care e formată fanta nu se rotesc se poate scrie :

$$\Delta Q_\theta = \frac{\Delta p}{12\eta}\ \frac{\delta^3}{\Delta\theta}\ \frac{l}{R_1} \tag{25}$$



Secţiune B-B

Fig. 6

Considerînd de asemenea o fantă de grosime dz şi avînd unghiul la centru $\Delta\theta$ (fig. 6) debitul elementar în direcţie tangenţială este dat de relaţia

$$dQ_\theta = \frac{\Delta p\,\delta^3}{12\eta\Delta\theta}\ \frac{dz}{R_1 + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{26}$$

Integrînd se obţine :

$$\Delta Q_\theta = \frac{\Delta p\,\delta^3}{12\eta\Delta\theta}\ \frac{ln\left(1+\frac{l}{R_1}\mathrm{tg}\,\alpha\right)}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{27}$$

Din formulele (24) și (27) se observă că debitul ce trece prin fanta conică în direcție longitudinală scade odată cu creșterea lui α la aceiași grosime a fantei și a razei R_1, iar cel în direcție tangențială crește. Aceasta se datorește faptului că în primul caz lungimea fantei se mărește cu creșterea unghiului și deci crește rezistența hidraulică, iar în cel de al doilea caz lungimea medie a fantei scade.

În finale se poate scrie relația teoretică a pierderilor volumice prin jocurile pompei sub forma

$$\Delta Q_t = \left(\frac{\Delta p\,\delta^3}{12\eta b} + \frac{v_p\,\delta}{2}\right)\pi D_c \frac{z}{2} + \frac{\Delta p_\theta\,\Delta\varphi\,\delta^3}{12\eta\, ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}} +$$

$$+ \frac{\Delta p_\varphi\,\delta^3}{12\eta\Delta\varphi} ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}} + \frac{R_2 R_1\,\delta\omega}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \frac{\Delta p.\Delta\theta\,\delta^3}{12\eta}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{ln\left(1+\frac{l}{R_1}\operatorname{tg}\alpha\right)} + \frac{\Delta p\,\delta^3}{12\eta\Delta\theta}\,\frac{ln\left(1+\frac{l}{R_1}\operatorname{tg}\alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha} - \theta \qquad (28)$$

d) **Determinarea experimentală a pierderilor volumice.**

Pentru verificarea relațiilor teoretice obținute și confruntarea acestora cu pierderile reale, efective, măsurate experimental în laborator, s-a folosit o instalație reprezentată în fig. 7. Pentru încărcarea pompei s-a folosit droselul D_R, cu care s-au realizat diverse presiuni, iar măsurarea debitului real pentru fiecare presiune s-a realizat cu debitmetrul D. Separat s-au măsurat și acele pierderi care se acumulau în carcasa pompei printr-o conductă specială de scurgeri.

Lichidul folosit a fost ulei de turbină Tb-5005, iar încercările s-au efectuat la o temperatură de regim de 50—55°C.

Rezultatele experimentale sînt prezentate sub formă de diagramă în fig. 8 (curba *E*). Pe același grafic a fost trasată și curba teoretică *(T)*, pe baza formulelor analitice prezentate în lucrare.

D'n compararea celor două curbe se constată o abatere mai pronunțată a curbei experimentale de cea teoretică între valurile de presiune 20—80 kgf/cm² și după valoarea de 120 Kgf/cm².

Aceste abateri se explică atît prin variația unor parametri în timpul experimentării cum sînt temperatura și vîscozitatea lichidului

care în calcul au fost luate constante, cît şi mai ales faptul să în condiţiile concrete de curgere a lichidului prin fante mici se schimbă regimul de curgere devenind turbulent, în timp ce în calcul s-a considerat laminar.

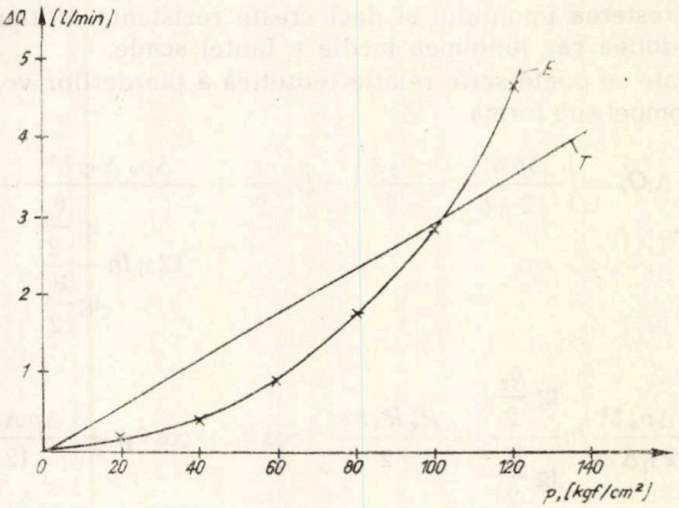


Fig. 7

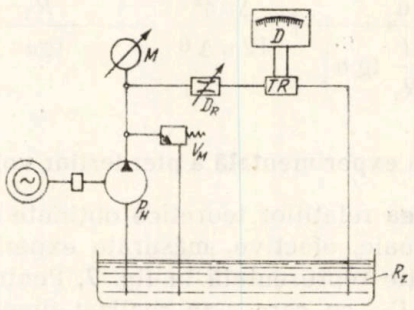


Fig. 8

e) **Concluzii**

În urma studiului teoretic şi experimental al pierderilor volumice din pompa cu pistonaşe axiale cu distribuţie sferică fabricate în R.S.R. se pot trage următoarele concluzii :

1. În cadrul lucrării s-au studiat fenomenele de curgere a lichidului prin fante sferice şi conice în cadrul unei construcţii speciale a elementului de distribuţie la pompele cu pistonaşe axiale construite în R.S.R. reuşindu-se să se aplice ecuaţiile generale din dinamica lichidelor vîscoase, în aceste cazuri speciale, obţinîndu-se nişte relaţii finale accesibile pentru calculele obişnuite necesare cercetării şi proiectării.

2. Verificările experimentale confirmă justețea relațiilor teoretice obținute, mai ales în domeniul de presiuni de 80—100 Kgf/cm², presiuni la care se folosesc de regulă în acționarea hidraulică a mașinilor unelte aceste pompe.

3. Pompele cu pistonașe axiale construite la noi în țară au un randament volumic ridicat, fapt pentru care pot fi recomandate și pentru folosirea în acționarea hidraulică a mașinilor unelte și preselor.

Catedra de mașini unelte
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Gheghea* — Calculul pierderilor volumice în fante cilindrice subțiri Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, nr. 3/1969.

2. *B. P. Guriev* — Gbidravliceschie obiomnie peredaci ed. Mașinostroienie Moscova 1964.

3. *N. Tipei* — Hidro-aerodinamica lubrificației — Ed. Academiei R.S.R. București 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

METALURGIE

C.Z.: 669.184.1 : 621.359

STUDIUL EFECTELOR ELECTROCAPILARITĂŢII ASUPRA PROCESELOR DE ELABORARE A OŢELULUI ŞI ASUPRA PURITĂŢII ACESTUIA

IOSIF TRIPŞA

Într-o lucrare anterioară [3] s-a studiat fenomenul de electrocapilaritate în cazul sistemului format din zgură şi baia metalică în cuptoarele electrice cu arc folosite la elaborarea oţelului. După cum se ştie, fenomenele electrocapilare se datoresc formării unui strat electric dublu la suprafaţa interfazică zgură-baie metalică în toate procesele metalurgice. Apariţia acestui strat electric dublu se explică prin adsorbirea pe suprafaţa băii metalice a anionilor, de exemplu de O^{2-}, ceea ce face ca zgura să se încarce pozitiv, iar baia metalică — negativ. Ca de obicei, sarcinile electrice au tendinţa de a se situa la suprafaţa fazelor şi, fiind de sens opus, se atrag între ele, ceea ce duce la aranjarea lor de o parte şi de alta a limitei dintre cele două faze.

Pe de altă parte, se cunoaşte că la suprafaţa dintre două faze acţionează forţele tensiunii interfazice care tind să micşoreze aria suprafeţei de separare. În stratul electric dublu, din cauza respingerii electrostatice dintre particulele cu aceeaşi sarcină, aria suprafeţei de separare dintre faze are tendinţa de a se mări. Cu alte cuvinte, sarcinile electrice existente tind să micşoreze tensiunea interfazică, fapt exprimat de relaţia lui Lippman :

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = -\varepsilon$$

în care :

σ — este tensiunea interfazică ;
φ — potenţialul electric ;
ε — densitatea sarcinilor electrice pe suprafaţa băii metalice.

Dacă în acest caz se aplică din exterior un potenţial electric, care să neutralizeze sarcinile existente la limita dintre cele două faze, tensiunea interfazică trebuie să crească pînă la un maxim corespunzător neutralizării tuturor sarcinilor electrice din strat. Creşterea în continuare a potenţialului electric aplicat va conduce la micşorarea tensiunii interfazice.

* Manuscris predat la redacţie la 3 martie 1969.

Fenomenul electrocapilar descris a fost studiat mai întîi pe diferite sisteme cuprinzînd electroliţi, inclusiv săruri topite. Ulterior, fenomenul a fost pus în evidenţă şi în sisteme metalurgice. Astfel, determinînd roentgenografic forma şi dimensiunile picăturii aliajelor de fier-carbon-fosfor, aflată la 1350—1500°C sub zgură compusă din CaO, Na_2O, Al_2O_3 şi SiO_2, s-a evidenţiat variaţia tensiunii interfazice în funcţie de tensiunea electrică aplicată [1].

În lucrările mai noi [2], acest fenomen a fost pus în evidenţă în celule de măsurare cu capilar în care s-a menţinut fontă lichidă la 1430—1480°C sub zgure sintetice CaO-SiO_2-Al_2O_3 cu compoziţia asemănătoare celor de furnal. În toate cazurile s-au obţinut curbe electrocapilare tipice. Unele din ele sînt prezentate în fig. 1.

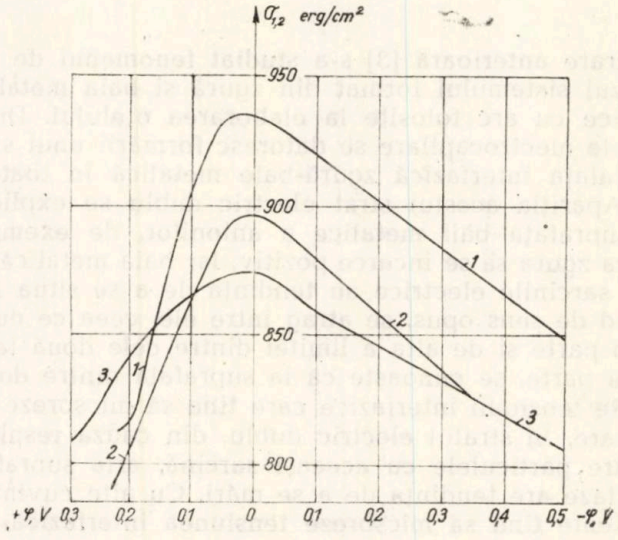


Fig. 1. Curbe electrocapilare pentru temperaturile de 1450—1480°C în sistemul fontă-zgură, cu următoarea compoziţie molară (%)

1.	50,3 CaO ;	38,6 SiO_2 ;	11,1 Al_2O_3 ;
2.	49,2 CaO ;	43,5 SiO_2 ;	7,2 Al_2O_3 ;
3.	48,4 CaO ;	46,2 SiO_2 ;	5,3 Al_2O_3 ;

Pe baza acestor date s-a tras concluzia că fenomenul electrocapilar se manifestă la suprafaţa interfazică zgură-baie metalică ori de cîte ori se aplică în sistem o tensiune electrică din exterior şi s-a presupus că fenomenul are loc şi în cuptoarele electrice trifazate cu arc folosite la elaborarea oţelului. În ultimul caz, tensiunea electrică este însă alternativă şi nu continuă ca în experienţele prezentate anterior. Aceasta înseamnă că potenţialul electric aplicat sistemului zgură-baie metalică de fiecare electrod în parte, variază cu frecvenţa industrială între valoarea maximă pozitivă şi cea negativă, trecînd de un număr dublu de ori prin valoarea zero, sau prin oricare altă valoare cu excepţia

minimului și maximului. Prin urmare, potențialul electric aplicat sistemului trece de un număr de două ori mai mare decît frecvența curentului prin valoarea care compensează în întregime sarcinile din stratul electric dublu aflat la limita zgură-baie metalică. De fiecare dată, tensiunea interfazică va avea în aceste momente valoarea maximă. Valoarea minimă a tensiunii interfazice se va înregistra în momentul atingerii minimului și maximului potențialului electric aplicat, așa cum rezultă din fig 2. S-a presupus de asemenea că variația în timp a tensiunii interfazice duce la varierea formei și dimensiunii suprafeței de separare zgură-baie metalică, provocînd formarea și propagarea unor ondulații, asemănătoare valurilor, avînd ca centru pe fiecare din cei trei electrozi ai cuptorului.

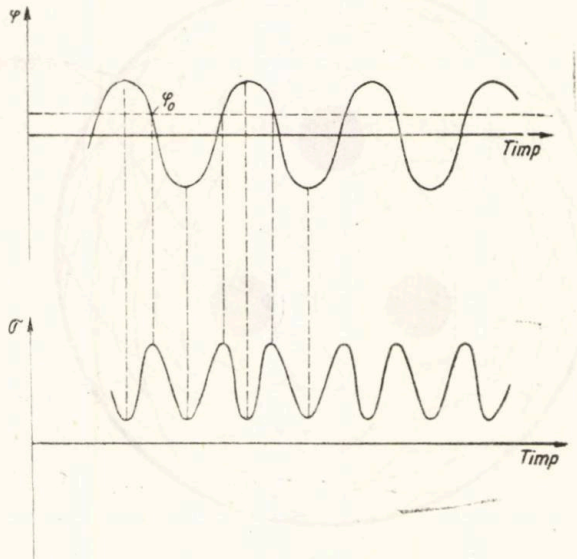


Fig. 2. Variația potențialului electric (φ) aplicat sistemului zgură-baie metalică și a tensiunii interfazice (σ) în funcție de timp

φ_0 — potențialul electric corespunzător compensării totale a sarcinilor stratului electric dublu.

Defazarea cu 120° a potențialului electric momentan dintre cei trei electrozi face ca ondulațiile suprafeței interfazice provocate de fiecare electrod în parte să nu se anuleze în urma interferării, ci să se propage pînă la peretele cuptorului. S-a ajuns astfel să se formuleze ipoteza că la suprafața de separare zgură-baie metalică în cuptoarele electrice cu arc se produce un complex fenomen oscilatoriu schițat în fig 3, ipoteză ce a fost verificată pe model în care baia metalică a fost reprezentată de mercur, iar zgura de o soluție molară de NaCl.

Ulterior, fenomenul electrocapilar descris [3] a fost studiat cu ajutorul cinematografiei de mare viteză și apoi oscilografiat.

În fig. 4 se prezintă oscilogramele obținute cu ajutorul modelului electrolitic în diferite condiții experimentale. Porțiunile reproduse ale oscilogramelor corespund unei durate de înregistrare de 0,1 s și sînt comparate cu oscilograma variației tensiunii electrice aplicate sistemului, care are o frecvență de 50 Hz (curba O).

Studiul oscilogramelor obținute dovedește că valurile care se formează la suprafața de separare dintre cele două faze au în general o frecvență dublă (2×50 Hz), iar curba lor I este decalată cu circa 1,5 ms față de curba tensiunii electrice aplicate. În condițiile experimentale date (diametrul interior al vasului de 88 mm, diametrul cercului electrozilor de 34 mm) lungimea de undă a valurilor staționare este de circa 1,8 mm.

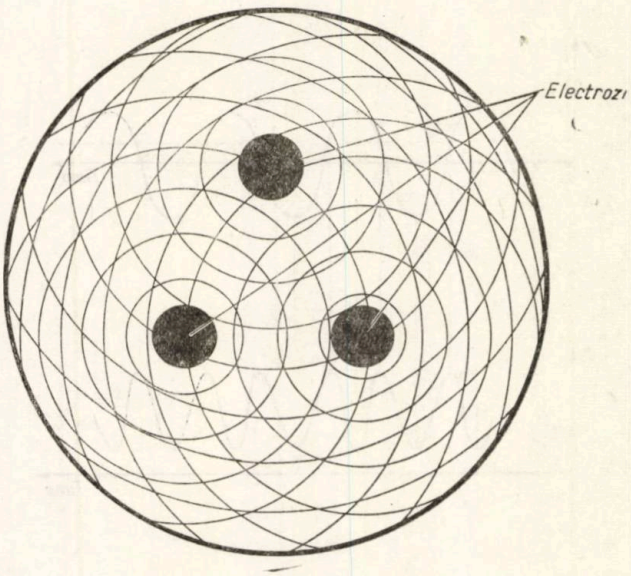


Fig. 3. Formarea și propagarea ondulațiilor la suprafața interfazică zgură-baie metalică în cuptoare electrice cu arc.

Creșterea tensiunii electrice aplicate pînă la o anumită valoare are ca efect creșterea amplitudinii valurilor, care sînt deformate din ce în ce mai puternic datorită interferenței lor. Aceasta duce la mărirea complexității fenomenului ondulatoriu (curbele II și III). Mărirea distanței dintre electrozi (la un diametru al cercului electrozilor de 54 mm) are aceleași urmări, mărind complexitatea fenomenului ondulatoriu ca urmare a interferenței (curbele IV și V). În ultimul caz apare și o oscilație mai lentă care modulează oscilațiile cu frecvența de 100 Hz și care are o perioadă de circa 1,5 s. Oscilația lentă se accentuează (curba IV) și în cele din urmă deformează în mare măsură fenomenul, căruia îi schimbă frecvența (la 50 Hz — curba VII — și apoi la 25 Hz — curba VIII). Se constată, în același timp, o legătură strînsă între scăderea frecvenței valurilor și creșterea amplitudinei lor.

Aceleași concluzii se pot trage din examinarea înregistrării cinematografice cu viteză mărită a fenomenului descris.

Fenomenul prezentat este important pentru explicarea mecanismelor proceselor fizico-chimice care au loc la elaborarea oțelului în cuptoare electrice, deoarece rezultă că suprafața interfazică zgură-baie metalică are în aceste cuptoare o arie de cîteva ori mai mare, decît în alte agregate de elaborare. În plus, datorită ondulării continue a suprafeței de separare, se înnoiesc în permanență porțiile de zgură și baie metalică ce intră în contact. Aceasta duce la accelerarea proceselor de

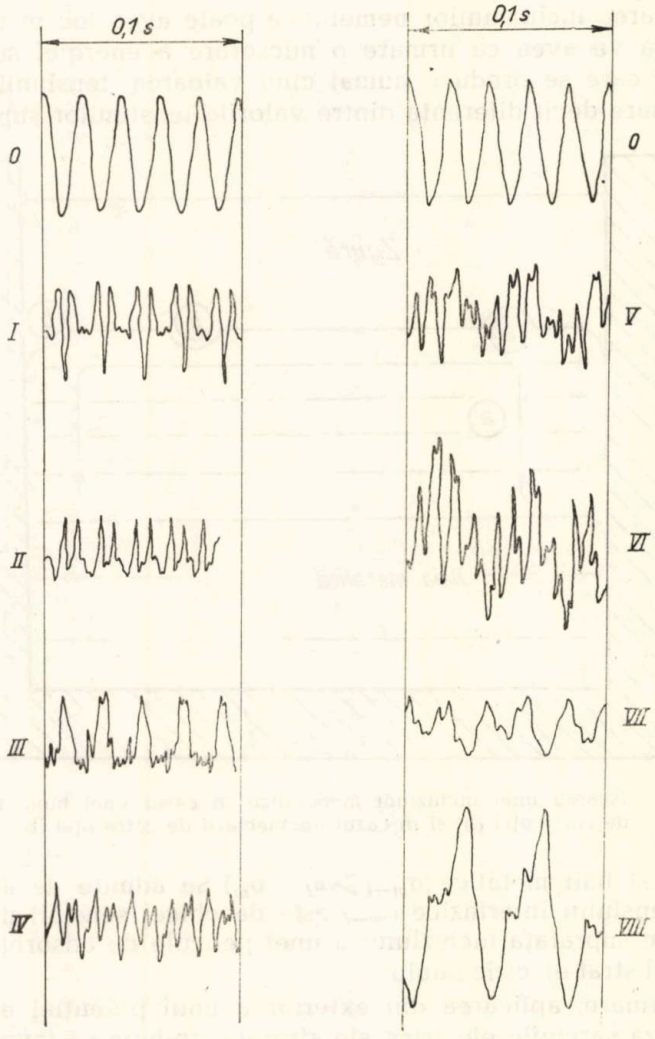


Fig. 4. Oscilograme obținute la modelul electrolitic:
curba 0 — variația tensiunii electrice în rețeaua de 50 Hz;
curba I—VIII — ondulațiile suprafeței interfazice în diferite condiții experimentale.

oxidare a elementelor însoțitoare, la accelerarea desulfurării și dezoxidării oțelului. Se grăbește de asemenea trecerea incluziunilor nemetalice din oțel în zgură, deoarece fenomenele de suprafață joacă un rol hotărîtor în procesul de eliminare a incluziunilor solide și lichide din baia metalică .Astfel, s-a arătat [4] că incluziunea care se apropie de suprafața oțelului lichid (fig. 5) poate fie să rămînă sub această suprafață și să nu se elimine (este cazul unei bune umectări a inciziunii de către oțel), fie să se elimine (în cazul neumectării ei de către oțelul lichid). În primul caz, incluziunea poate fi ușor antrenată din nou în interiorul băii metalice de către curenții descendenți.

Eliminarea incluziunilor nemetalice poate avea loc în mod spontan numai dacă va avea ca urmare o micșorare a energiei superficiale a sistemului, care se produce numai cînd valoarea tensiunii interfazice este mai mare decît diferența dintre valorile tensiunilor superficiale ale

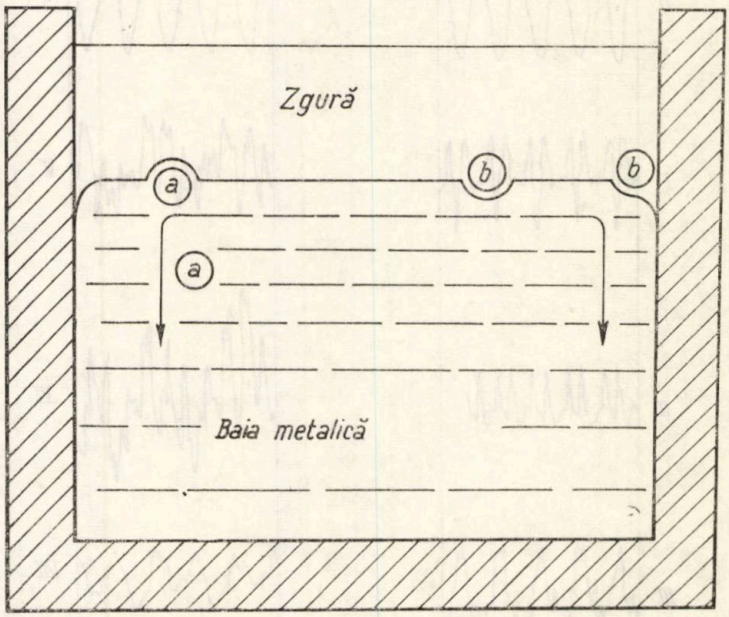


Fig. 5. Mișcarea unei incluziuni nemetalice în cazul unei bune umectări de către oțel (a) și în cazul neumectării de către oțel (b).

incluziunii și băii metalice ($\sigma_{m-i} > \sigma_i - \sigma_m$) Se admite de asemenea că valoarea tensiunii interfazice σ_{m-i} este de obicei sensibil micșorată de formarea pe suprafața incluziunii a unei pelicule de adsorbție Fe^{+2}/O^{2-} adică a unui strat electric dublu.

Prin urmare, aplicarea din exterior a unui potențial electric care neutralizează sarcinile electrice ale stratului trebuie să favorizeze creșterea valorii tensiunii interfazice baie metalică-incluziune și, prin intermediul acestui fenomen, eliminarea avansată a incluziunilor nemetalice din oțel.

Această concluzie a fost de asemenea verificată pe modelul prezentat mai sus. Într-adevăr, la începutul fiecărei operații pe model s-a constatat trecerea unui mare număr de incluziuni nemetalice din mercur în „zgură". Studiind mai amănunțit acest mod de îndepărtate a impurităților s-a ajuns la concluzia că el permite creșterea sensibilă a gradului de puritate a mercurului.

Pe baza rezultatelor obținute s-a emis ipoteza că în cuptoarele electrice cu arc, eliminarea incluziunilor nemetalice se produce mai rapid și mai complet decît în alte cuptoare de elaborare a oțelului și că în momentul evacuării sale din cuptorul electric oțelul are un grad mai mare de puritate decît la evacuarea din alte agregate, ceea ce trebuie să aibe o influență favorabilă asupra calității sale. Într-adevăr, în general, calitatea oțelului electric este superioară altor tipuri de oțeluri, dar la aceasta contribuie mulți factori, inclusiv gradul mai înalt de aliere.

Pe de altă parte, se constată că cea mai mare parte din incluziunile nemetalice din oțelul produs în orice agregat se formează sau se cumulează în timpul evacuării oțelului din cuptor și turnării sale în lingotiere sau forme, ceea ce duce la micșorarea gradului de puritate existent înaintea evacuării oțelului din cuptor.

Pentru obținerea unor oțeluri de puritate înaltă cerute de progresul tehnic al unor ramuri hotărîtoare ale economiei se folosesc metode, dintre care unele costisitoare cum sînt retopirea repetată sub zgură, cu jet de electroni sau în arc și vid. Mai puțin costisitoare pare a fi îndepărtarea incluziunilor nemetalice din oțel cu ajutorul fenomenului electrocapilar provocat în mod special în agregatul de elaborare, în oala de turnare, în lingotiere sau forme de turnare. Eficiența acestor noi metode de mărire a purității oțelului a fost dovedită experimental prin micșorarea substanțială a punctajului maxim de incluziuni nemetalice determinat prin metoda metalografică standardizată.

Cercetările întreprinse vor fi continuate pentru definitivarea parametrilor tehnologici optimi ai noilor metode de eliminare a incluziunilor nemetalice din oțel, precum și a domeniilor de aplicare rațională.

Catedra de siderurgie
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. O. *A. Esin, I. P. Nikitin, S. I. Popel* — Dokladî Akademii Nauk SSSR 83, 431, 1952.

2. *B. V. Patrov* — În culegerea Poverhnostnîe iavlenia v metallurghiceskih protessah — Metallurghizdat Moscva 1963, 150—155.
Borderou de Figuri

3. *I. Tripșa* — Modelarea suprafeței de separare oțel-zgură din cuptoarele electrice trifazate cu arc. Metalurgia, 19 (1967. nr. 6, 308—310.

4. *P. Kozakevitch* — Rôle des phénomènes de surface dans l'élimination d'inclusions solides d'un bain de métal liquide. IRSID, 1968.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXI — 1969. Numărul 6

ELECTRONICĂ

C.Z.: 621.391

SENSUL ŞI GENERALITATEA CONEXIUNII INVERSE ÎN REŢELELE ELECTRICE *

Cibernetica şi procesul dezvoltării) **

PAUL POSTELNICU

1. Generalităţi şi scopul lucrării

Conexiunea inversă, împreună cu transmisia informaţiei, pot fi socotite ca ideile de bază ale ciberneticii. În unele lucrări, sînt denumite chiar principiile de bază ale acestei noi ştiinţe. Conexiunea inversă este caracteristică pentru funcţionarea multor dispozitive sau maşini electrice, mecanice etc., precum şi pentru comportarea organizmelor vii [1], [2], [3], [4].

Între procesele care se dezvoltă în sistemele cu conexiuni inverse şi transmisiune de informaţie — care pot fi mecanice, electrice, electromecanice, biologice, sociale, economice etc. — se remarcă o serie de analogii sau similitudini, ceea ce permite nu numai o tratare generală şi sintetică a acestor procese, dar poate genera noi idei, noi căi de cercetare. Succesul ciberneticii constă tocmai în exploatarea acestor analogii sau similitudini.

Cibernetica însă nu foloseşte încă toate analogiile dintre sistemele tehnice şi cele biologice. Ea se ocupă de sistemele capabile să recepţioneze, să conserve şi să prelucreze informaţia, precum şi să o folosească în *comandă şi reglaj*. În aceste sisteme, prin conexiunea inversă se poate realiza un reglaj prin care se menţin practic constanţi o serie de parametri esenţiali în funcţionarea sistemului.

În funcţionarea unor dispozitive electronice importante, un rol esenţial îl joacă o conexiune inversă specifică, denumită reacţie. Datorită reacţiei pozitive, în aceste dispozitive poate apare un fenomen de amorsare a oscilaţiilor electrice, deci un regim tranzitoriu cu o creştere a semnalelor. Analogia dintre procesele tranzitori din sistemele electrice sau mecanice cu conexiune inversă şi unele fenomene evolutive sau de autodezvoltare din alte sisteme (biologie, sociale, econo-

* Termenul de conexiune inversă, curent utilizat în lucrările de cibernetică, reprezintă o generalizare a noţiunii de reacţie din electronică.

** Lucrare comunicată la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1—3 noiembrie 1968.

mice etc.) în care conexiunea inversă joacă un rol esențial, nu a fost încă exploatată în cibernetică.

În lucrarea [5] pe care am elaborat-o în anul 1944, și care a circulat ca manuscris printre ingineri, fizicieni, medici, biologi am atras atenția asupra generalității conexiunii inverse, asupra rolului esențial pe care aceasta îl are în deosebi în apariția și evoluția vieții, precum și în dezvoltarea, funcționarea și adaptarea organismelor vii, plecînd de la anologia cu sistemele electronice cu reacție [6, 7]. Recent lucrarea a fost prezentată și analizată în revista de filozofie a Academiei R.S.R. [7] și textul a fost publicat integral în revista Telecomunicații [5], cu ocazia unor aniversări.

Pentru a se exploata cît mai fructuos analogia între sistemele electrice și alte sisteme cu conexiune inversă este necesar în primul rînd un studiu de sinteză al sistemelor electrice cu conexiune inversă. Această sinteză este utilă de asemenea pentru o mai bună înțelegere și aprofundare a fenomenelor fizice din rețelele electrice, ceea ce constituie un prin scop al lucrării. Analogiile și similitudinile dintre procesele tranzitorii din sistemele electrice, privite prin prisma conexiunii inverse și procesele evolutive sau de autodezvoltare din alte sisteme (biologice, sociale, economice etc.), permit în primul rînd o mai bună înțelegere a acestora din urmă, la creerea unei noi optici în considerarea de către filozofie a anumitor fenomene care apar în procesul dezvoltării. Este de subliniat că ideia din vechea lucrare [5] asupra rolului conexiunii inverse în apariția vieții a fost perfect confirmată de recentele lucrări de microbiologie, însă se pare că această latură a scăpat observației științifice.

De asemenea, unele lucrări mai noi de cibernetică [8], [9] se ocupă de legătura între evoluția biologică și dezvoltarea capacității de prelucrare a informației de către organismele vii.

Dacă automatica a servit ca punct de plecare pentru lucrările ciberneticii, pentru analogia menționată (în procese evolutive), pot servi rețelele electrice liniare.

În încheierea acestui punct, îmi permit să citez unele aprecieri și concluzii din referatul întocmit pentru publicarea vechii lucrări în revista Telecomunicații [5] de conf. dr. ing. Mariana Beliș, întrucît socot că aceste aprecieri și concluzii sînt importante atît pentru lucrarea de față cît și pentru cercetarea științifică în general :

„Prin — „ipoteza complexului vicios" — prof. P. Postelnicu a enunțat într-o formă clară, cu toate că terminologia nu era poate cea mai adecvată, conceptele de bază ale ciberneticii, așa, cum avea să le enunțe cîțiva ani mai tîrziu, cel care este considerat azi părintele ciberneticii, N. Wiener... Desigur idei de o atare îndrăsneală suscită numeroase obiecțiuni și întîmpină scepticismul oamenilor de știință „cu picioarele pe pămînt. De aceea se cere o deosebită perseverență din partea celor care emit astfel de idei, precum și un fundament științific-matematic ridicat pentru a se impune. Desigur că pentru aceasta este nevoie de un colectiv puternic ; aproape întotdeauna încercările de avangardă izolate au rămas în umbră și au fost dezgropate după ani de zile, cînd nivelul științific general le-a ajuns din urmă. Așa s-a întîm-

plat cu cercetările asupra entropiei informaționale făcute de Szilard și Hartley, în 1928, cu principiul laserului, descoperit de Einstein prin 1920 etc.".

Observațiile din lucrarea dr. doc. V. Săhleanu [7], referatul amintit, precum și aprecierile altor specialiști în cibernetică, m-au încurajat să încerc să dezvolt în lucrarea de față unele din ideile emise în lucrarea din 1945 [5], privind rolul conexiunii inverse în procesele evolutive. Le aduc vii mulțumiri pe această cale.

2. Sensul și caracterul univesal al conexiunii inverse ca factor specific în procese staționare, homeostatice, evolutive și de autodezvoltare

Procesele care au loc într-un sistem material oarecare nu sînt independente unul de altul, între ele existînd diferite legături (conexiuni). Între aceste legături, o clasă importantă o formează legăturile cauzale. Acestea se manifestă, în general, sub forma unui lanț cauzal, fiecare efect fiind cauză pentru alt fenomen. O categorie de lanțuri cauzale, care joacă un rol esențial în sistemele cibernetice și în procesele evolutive, o formează lanțurile cauzale închise [5]. Un lanț cauzal închis este format dintr-un număr de fenomene, care pot fi notate cu *A,B,C,... M,N*. în care *A* este cauza lui *B*, *B* și a lui *C*,...*M* a lui *N* și *N* a lui *A*, așa cum se arată schematic în figura 1, a. Fiecare din fenomenele enumerate poate fi format la rîndul său dintr-un lanț cauzal închis și de asemenea, lanțul cauzal considerat *(A, B...N)* poate constitui o verigă dintr-un lanț cauzal mai complex [5]. Interconexiunea cu alte sisteme este reprezentată în figura 1, b.

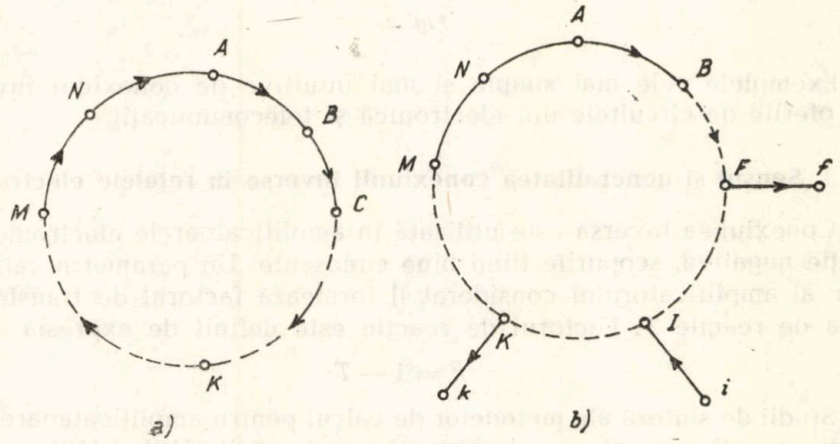


Fig. 1

Diagramele ca cele din exemplele, din fig. 1, pot fi denumite în general, grafe sau diagrame ale fluxurilor cauzale. Așa cum se va arăta, diagramele de circulația semnalelor sau pe scurt, diagramele de semnal, folosite în calculul rețelelor electrice, formează un caz particular,

În cazul rețelelor electrice cu reacție (amplificatoare, generatoare electrice etc.), canalele folosite de fluxurile cauzale (fluxurile de semnale), pot apare sub formă de bucle materiale (lanț de cuadripoli închis), ceea ce a făcut ca ideia de conexiune inversă să apară mai întîi în acest domeniu. În general însă, diagramele fluxurilor cauzale formează niște modele sau reprezentări topologice, ale unor legături concrete sau abstracte.

Cel mai simplu lanț cauzal închis este format dintr-un fenomen A — cauză — și un fenomen B — efect —, acesta din urmă fiind cauză pentru A. Exemple de astfel de conexiuni cauzale simple se întîlnesc la tot pasul în fizică, tehnică etc. și pot fi citate : acțiunea și reacțiunea de mecanică, legea lui Lenz din electromagnetism, legile sau ecuațiile lui Maxwell privind cîmpul electromagnetic, reacția la radiație sau frînarea prin radiație în cazul unui electron în mișcarea accelerată, fenomenul de ecou din acustică sau telecomunicații, reacția din circuitele electronice (cu o singură buclă de reacție), relațiile de reciprocitate ale lui Onsager din termodinamică etc. În lucrarea „Problema cauzalității în fizica modernă", la capitolul „Acțiunea efectului asupra cauzei", se spune : „Avînd în vedere cele arătate mai sus, o astfel de acțiune a efectului asupra cauzei trebuie considerată drept o proprietate generală a legăturilor cauzale" [10]. Aceeași observație este făcută și de J. Guillamand în lucrarea [11]. Lanțul cauzal închis menționat poate fi reprezentat ca în figura 2.

Fig. 2

Exemplele cele mai simple și mai intuitive de conexiuni inverse sînt oferite de circuitele din electronică și telecomunicații.

3. Sensul și generalitatea conexiunii inverse în rețelele electrice.

Conexiunea inversă este utilizată în amplificatoarele electronice cu reacție negativă, scopurile fiind bine cunoscute. Un parametru caracteristic al amplificatorului considerat îl formează factorul de transfer pe bucla de reacție T. Factorul de reacție este definit de expresia

$$F = 1 - T \tag{1}$$

Studii de sinteză ale metodelor de calcul pentru amplificataoarele cu reacție negativă se găsesc, de exemplu, în lucrările [12] și [13]

Dacă se neglijează transferul de putere în sens direct prin cuadripolul de reacție, factorul de transfer al amplificatorului cu reacție este dat de expresia

$$G' = \frac{G}{1 - T} \tag{2}$$

Ecoul telefonic care se simte pe circuitele foarte lungi este datorit unei reacții parazite. Pentru simplificarea schemei, se consideră ca în fig. 3, un circuit de frecvență vocală.

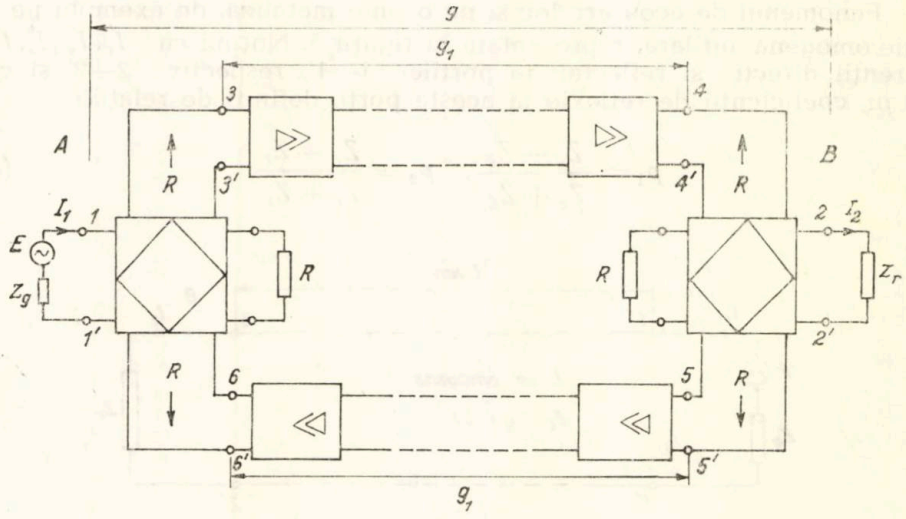


Fig. 3

În figura 4 este reprezentată diagrama de semnal a sistemului din fig. 3, ținîndu-se seama că transferul de semnale între porțile ce trebuiesc decuplate se face prin reflexie la porțile *A* și *B* [14], [15]. În această diagramă, I_1', I_1'', I_2', I_2'', reprezintă curenții direcți și reflectați la porțile *A*, respectiv *B*, la care coeficienții de reflexie sînt dați de relațiile.

$$p_1 = \frac{R - Z_g}{R + Z_g}, \qquad p_2 = \frac{R - Z_r}{R + Z_r} \tag{3}$$

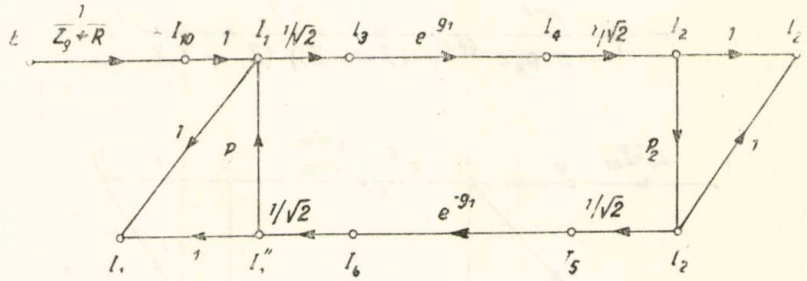


Fig. 4

Ținînd seama de notațiile de pe figura 4, rezultă pentru factorul de transfer pe bucla de reacție, expresia

$$T = p_1 p_2 e^{-2g} \tag{4}$$

și pentru factorul de reacție

$$F = 1 - T = 1 - p_1 p_2 e^{-2g} \tag{5}$$

Fenomenul de ecou are loc și pe o linie metalică, de exemplu pe o linie omogenă bifilară, reprezentată în figura 5. Notînd cu I_1', I_1'', I_2', I_2'', curenții direcți și reflectați la porțile 1—1', respectiv 2—2' și cu p_1, p_2, coeficienții de reflexie la aceste porți, definiți de relațiile

$$p_1 = \frac{Z_c - Z_g}{Z_c + Z_g}, \quad p_2 = \frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r} \tag{6}$$

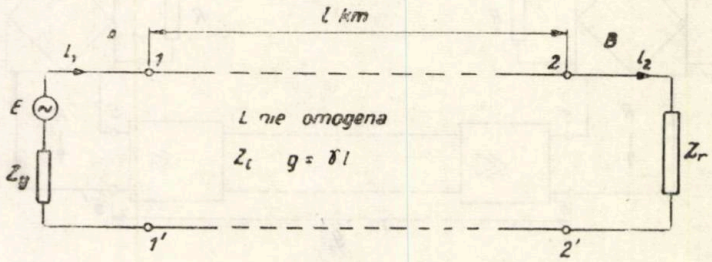


Fig. 5

rezultă diagrama de semnal din figura 6. Aplicînd formula lui Mason, se deduce relația

$$G' = \frac{I_2}{E} = \frac{\dfrac{1}{Z_g + Z_c} e^{-g} + \dfrac{1}{Z_r + Z_c} e^{-g}}{1 - p_1 p_2 e^{-2g}} = \tag{7}$$

$$= \frac{e^{-g}}{1 - p_1 p_2 e^{-2g}} \cdot \frac{2 Z_c}{(Z_g + Z_c)(Z_r + Z_c)}$$

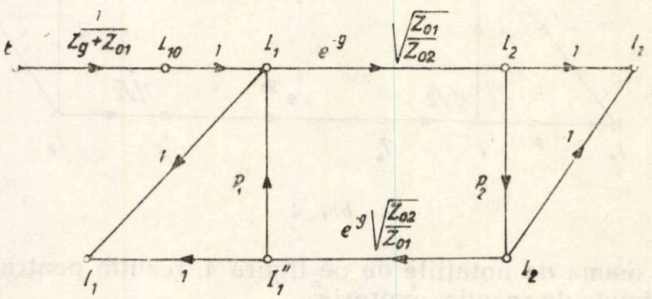


Fig. 6

Rezultă pentru exponentul de transfer compus, expresia bine cunoscută

$$g_c = ln \frac{E}{2 I_2 \sqrt{Z_g Z_r}} = ln \frac{1}{G' \sqrt{Z_g Z_r}} =$$

$$= g + ln \frac{Z_s + Z_g}{2\sqrt{Z_c Z_g}} + ln \frac{Z_c + Z_r}{2\sqrt{Z_c Z_r}} + ln (1 - p_1 p_2 e^{-2g}) \quad (8)$$

În cazul unui cuadripol pasiv oarecare cu impedanțele imagine Z_{01}, Z_{02} și exponentul de transfer g, rezultă diagrama de semnal din figura 7. Aplicînd formula Mason, se obțin relațiile (7) și (8) generalizate.

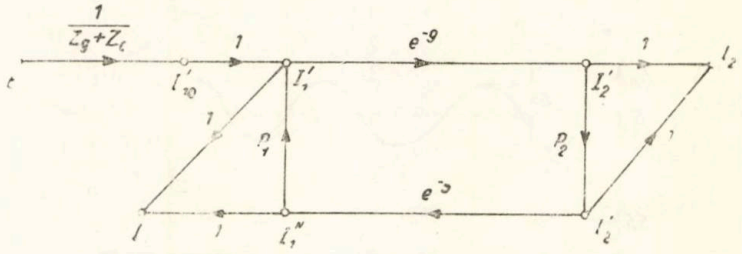


Fig. 7

Exemplele date, ilustrează analogia între fenomenul de reacție din amplificatoare și fenomenul de reflexie. Interpretarea menționată a fenomenului de ecou în cazul circuitului telefonic pe patru fire, reprezentat în figura 3, permite o interpretare a acestei analogii [14], [15]. Atît în cazul cuadripolului activ cu reacție (parazită) din figura 3, cît și în cazul unui cuadripol pasiv oarecare, factorul de reacție are forma

$$F = 1 - T = 1 - p_1 p_2 e^{-2g} \quad (9)$$

așa cum rezultă din relațiile (5), (7). Atenuarea de interacțiune, din cuadripolii pasivi reciproci este deci dată de relația

$$a_i = ln |F| \quad (10)$$

și reprezintă deci adîncimea reacției. Termenul de interacție este deci echivalent cu cel de reacție, referindu-se la același fenomen. Factorul de transfer e dat de relația generală [2].

Distorsiunile de atenuare datorite atenuării de interacție din cuadripolii pasivi au aceeași formă ca și distorsiunile de cîștig reprezentate în fig. 8, amplitudinea lor fiind dată de aceeași relație [15].

De asemenea, în calculul impedanței la intrare a cuadripolilor pasivi se pot folosi diagramele de semnal din figura 6 sau 7 și formula lui Mason sau formula generală din teoria amplificatoarelor cu reacție.

Se obține astfel :

$$Z_{in} = Z_{10} \frac{(F)_{Z_{g=0}}}{(F)_{Z_{g=\infty}}} = Z_{10} \frac{(1 - p_1 p_2 e^{-2g})_{p_1=1}}{(1 - p_1 p_2 e^{-2g})_{p_1=-1}} = Z_{10} \frac{1 - p_2 e^{-2g}}{1 + p_2 e^{-2g}} \quad (11)$$

Paralelismul dintre unele formule deduse în cazul amplificatoarelor cu reacție și formulele din teoria cuadripolilor pasivi, se explică prin structurile asemănătoare ale buclelor de reacție din diagramele de semnal.

În toate cele trei exemple : amplicatoare cu reacție, circuit telefonic pe patru fire (cu reacție parazită), linii neadaptate la extremități, apare clar conexiunea inversă între cauză și efect. Ca să apară o buclă de reacție în cazul liniei din fig. 5 este nevoie ca $p_1 \neq 0$ și $p_2 \neq 0$. Apare un efect de ecou atît la emisie cît și la recepție, care pune în evidență lanțul cauzal închis. Nu totdeauna efectul are deci influență asupra cauzei și o conexiune inversă sau o reacție nu apare decît dacă se realizează o buclă închisă în diagrama fluxurilor cauzale (diagrama de semnal).

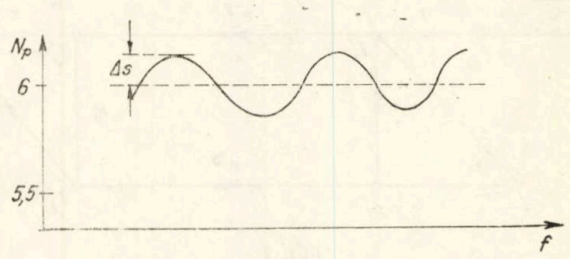


Fig. 8

În cazul liniei din figura 5 curenții la porțile A și B pot fi calculați însumînd diferitele componente ce apar prin reflexiile succesive la aceste porți ale undei directe date de generator. Acești curenți apar ca suma unor componente ce descresc în progresie geometrică cu rația $T = p_1 p_2 e^{-2g}$. Această interpretare sugerează următoarea generalizare în cazul unei diagrame de semnal, de exemplu cu o singură buclă, ca în figura 2, pentru care se notează cu t_{aA}, t_{aB} etc., factorii de transmisiune între diferitele noduri (între variabilele a, A etc.). Semnalul la nodul A de exemplu se obține din însumarea semnalului direct $A_1 = a\, t_{aA}$ și a semnalelor ce se obțin prin parcurgerea succesivă a buclei de reacție : $A_1 = A_0 T$, $A_2 = A_1 T$ etc. Se obține :

$$A = A_0 (1 + T + T^2 + \dots) = \frac{a\, t_{aA}}{1 - T}$$

și (12)

$$G'_{aA} = \frac{A}{a} = \frac{G_{aA}}{1 - T}$$

În cazul diagramei din figura 6, se pot obține prin această metodă, de exemplu, curenții I'_2 și I''_2, iar prin însumarea lor rezultă expresia (7) a curentului I_2.

În cazul liniei omogene considerate, $|T| < 1$. Dacă pe linie se introduce un repetor cu impedanță negativă, și $|T| > 1$, componentele men-

ționate cresc în progresie geometrică cu rația T (circuitul este instabil). Dacă se aplică de către generator un impuls, mărimea impulsurilor ce apar prin reflexii succesive la cele două extremități ale liniei, variază în progresie geometrică cu rația T.

Factorul de reacție $F = 1—T$, care apare în cazul cînd diagrama de flux cauzal conține o buclă de reacție închisă, poate fi interpretat deci ca numitorul unei serii în progresie geometrică cu rația T.

De asemenea, interpretarea fizică dată arată că în regim tranzitoriu semnalele variază în progresie geometrică sau după funcții exponențiale.

Conexiunea inversă poate fi pusă în evidență atît în cazul cuadripolilor pasivi, cît și în cazul amplificatoarelor cu reacție, cu ajutorul teoremei receptorului echivalent, care arată că se pot înlocui, de exemplu, impedanțele Z_g și Z_r din figura 5 prin impedanța de adaptare Z_c, în serie cu tensiunea electromotoare, $I_1(Z_g - Z_c)$ respectiv $I_2(Z_r - Z_c)$, ceea ce reprezintă o transferare a cauzei (curentul), în efect (tensiunea electromotoare).

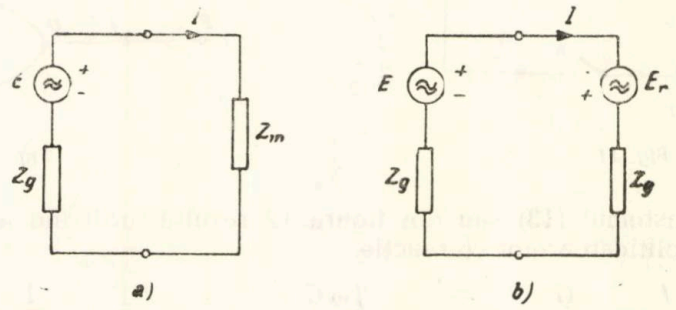


Fig. 9

În general, orice reflexie reprezintă o conexiune inversă. Astfel, în cazul unui generator (echivalent) care debitează pe un receptor (echivalent), așa cum se arată în figura 9 a, ținîndu-se seama de schema echivalentă din figura 9 b, se deduce diagrama de semnal din figura 10.

În exemplele date, apare o conexiune inversă între porțile unui cuadripol (între semnalele de la aceste porți). În cele ce urmează, se va analiza alt tip de conexiune inversă, și anume între tensiunile și cu-

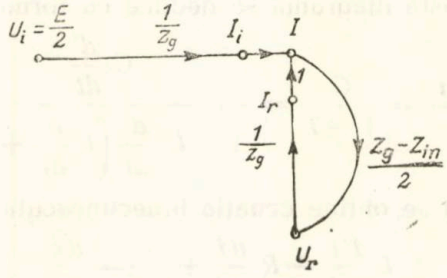


Fig. 10

renții dintr-o rețea pasivă liniară, cu elemente reactive. Pentru punerea în evidență și analiza acestui fenomen, se poate pleca de la exemplu simplu al unui dipol cu elementele R, L, C, conectate în serie, reprezentat în figura 11.

În regim permanent, considerînd $e=E \sin \omega t$ tensiunea U la bornele condensatorului și curentul I, rezultă din sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} U &= E-(R+j\omega L)I \\ I &= j\omega C U \end{aligned} \tag{13}$$

care reprezintă legătura cauzală directă (I spre U) și inversă (U spre I), așa cum se vede și din diagrama de semnal, reprezentată în figura 12.

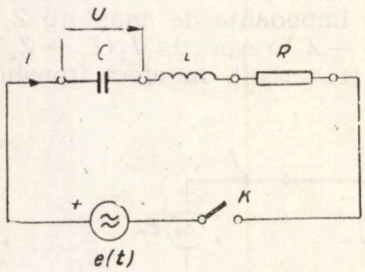


Fig. 11

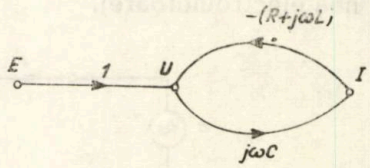


Fig. 12

Din sistemul (13) sau din figura 12 rezultă, utilizînd notațiile din teoria amplificatoarelor cu reacție.

$$G'=\frac{I}{E}=\frac{G}{1-T}=\frac{j\omega C}{1+j\omega C(R+j\omega L)}=\frac{1}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

Este interesant să se examineze lanțul cauzal și în regim tranzitoriu. În acest caz, tensiunea u, la bornele condensatorului și curentul i, rezultă din sistemul de ecuații diferențiale :

$$i=C\frac{du}{dt}\,;\quad u=e-L\frac{di}{dt}-Ri \tag{14}$$

Diagrama de semnale corespunzătoare este reprezentată în figura 13 a. Din această diagramă se deduce cu formula lui Mason :

$$G'=\frac{i}{e}=\frac{G}{1-T}=\frac{C\dfrac{d}{dt}}{1+C\dfrac{d}{dt}\left(L\dfrac{d}{dt}+R\right)} \tag{15}$$

Din relația (15) se obține ecuația binecunoscută :

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{c}=\frac{de}{dt} \tag{16}$$

sau

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0 \qquad (17)$$

dacă se presupune $e(t) = E$ sau $e(t)=0$.

Ecuația (17) se poate obține și din diagrama de semnal din figura 13 b (fără nod sursă), utilizîndu-se în loc de relația (15), corespunzătoare formulei lui Mason, relația

$$(1-T)i = Ge = 0 \qquad \text{sau} \qquad \left[1+C\frac{d}{dt}\left(L\frac{d}{dt}+R\right)\right]i=0 \qquad (18)$$

care poate fi ușor generalizată.

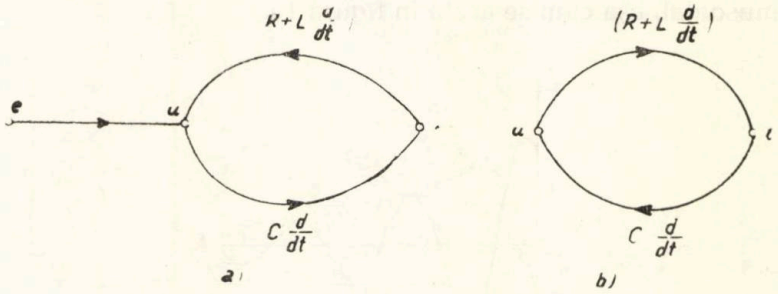


Fig. 13

Presupunînd $L=0$, $e=0$ și condensatorul încărcat, la închiderea comutatorului K, descărcarea condensatorului (cauza) produce curentul i (efect). La rîndul său, curentul i (cauza), produce descărcarea condensatorului (efect). Această conexiune inversă este exprimată de sistemul de ecuații (14) sa ude diagrama din figura 13, b, în care se consideră $L=0$. În acest caz, integrarea ecuației (17) duce la soluția

$$i = I_0 e^{-\alpha t} \qquad (19)$$

în care $\alpha=1/RC$. Curentul scade deci exponențial, așa cum se arată în figura 14, a. Dacă $e=E$, la închiderea comutatorului K, tensiunea u, la bornele condensatorului este dată de relația

$$u = E(1-e^{-\alpha t}) \qquad (20)$$

ea crescînd așa cum se arată în figura 14, b.

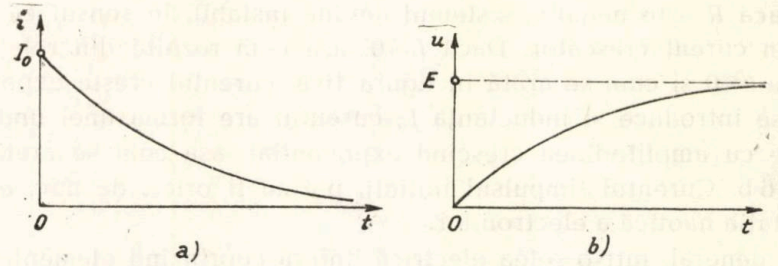


Fig. 14

Un fenomen analog are loc dacă se consideră $C = \infty$ și $L \neq 0$ (dipol R, L serie). Conexiunea inversă ce apare în acest caz este analizată în lucrarea [10], din punctul de vedere al acțiunii efectului asupra cauzei.

În cazul unei amortizări mici a circuitului R, L, C ($R^2 < 4\ L/C$), integrala ecuației (17) are forma :

$$i = I\, e^{-at} \cos(\omega_1 t - \varphi) \tag{21}$$

în care $a = R/2L$.

Relația (21) reprezintă descărcarea oscilatorie a condensatorului, curentul avînd forma unei unde sinusoidale cu amplitudinea descrescînd sinusoidal, așa cum se arată în figura 15.

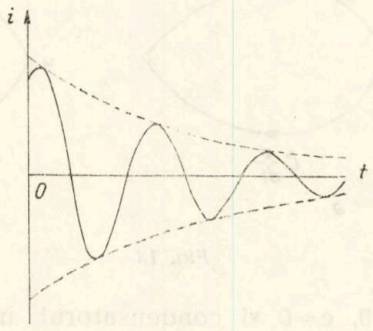


Fig. 15

Dacă $R = 0$, sistemul de ecuații (14) în care se presupune $e = 0$, capătă forma :

$$i = C\frac{du}{dt}, \qquad u = -L\frac{di}{dt}$$

care pune în evidență de asemenea o conexiune inversă corespunzînd unui regim permanent ($\alpha = 0$). În acest caz, în diagrama de semnal din figura 13, $T = 1$.

Dacă R este negativ, sistemul devine instabil, în sensul că ia naștere un curent crescător. Dacă $L = 0$, așa cum rezultă din relația (19), în care $\alpha < 0$ și cum se arată în figura 16 a, curentul crește exponențial. Dacă se introduce și inductanța L, curentul are forma unei unde sinusoidale cu amplitudinea crescînd exponențial, așa cum se arată în figura 16 b. Curentul (impulsul inițial), putînd fi oricît de mic, este dat de agitația haotică a electronilor.

În general, într-o rețea electrică liniară cuprinzînd elementele concentrate pasive și active (tuburi electronice sau tranzistoare), curentul

într-un braț, în care se aplică la momentul $t=0$, tensiunea electromotoare E, este dat de formula dezvoltării (a lui Heaviside) :

$$i = \frac{E}{Z(0)} + E \sum_k \frac{e^{p_k t}}{p_k \left(\frac{dZ}{dp}\right)_{p_k}}$$

În cazul că cel puțin unul din parametrii σ_k (partea reală a polului p_k) este pozitiv, sistemul este instabil, curentul crescînd ca și în cazul simplu considerat al unui dipol R, L, C, în care R este negativ.

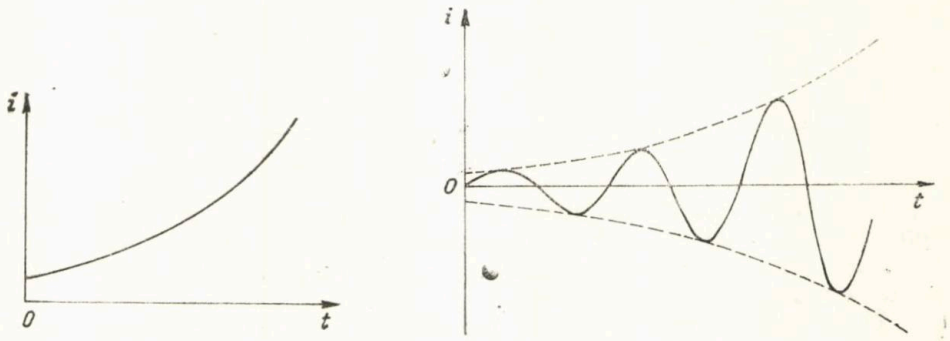


Fig. 16

Realizarea unei impedanțe negative (a unei impedanțe cu partea reală negativă) sau a unor parametri σ_k pozitivi, se poate obține printr-o buclă de reacție pozitivă cu elemente active, așa cum arată exemplul din figura 17.

În cazul considerat al unui dipol $R.L.C.$ cu rezistența R constantă și negativă, curentul crește teoretic spre infinit. În generatoare, se realizează o limitare, fie prin elemente active fie pasive de exemplu termistor, bec de rezistență, diodă pasivă etc. În cazul dipolului R,L,C cu $R<0$, limitarea și stabilizarea curentului, se poate face, de exemplu, așa cum se arată în figura 18, în care se presupune $R=R_1—R_2$, negativ printr-o rezistență r, a cărei valoare crește cu intensitatea curentului (de exem-

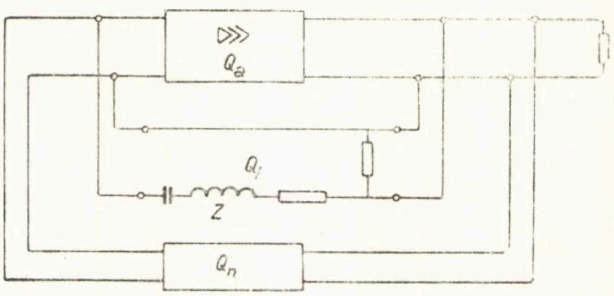


Fig. 17

plu un bec de rezistenţă). În cazul că limitarea se face prin neliniaritatea elementelor active (a rezistenţei — R_2), curentul este limitat la valoarea la care $R_1—R_2=0$. Apare în acest caz o conexiune inversă negativă (în sensul ciberneticii) care stabilizează curentul la valoarea la care $R+r=0$

Limitarea se poate realiza şi printr-o buclă de conexiune inversă negativă, aşa cum se arată în exemplul din figura 17 al unui generator. În acest caz, apare bucla de reacţie pozitivă (în sensul electronicii) prin cuadripolul Q_f, care întreţine oscilaţia şi stabilizează frecvenţa şi o buclă de conexiune inversă negativă (în sensul ciberneticii), prin cuadripolul Q_n ,care limitează şi stabilizează nivelul la ieşire.

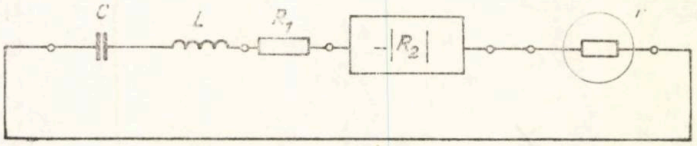


Fig. 18

Circuitele basculante formează de asemenea un exemplu interesant de conexiuni inverse, în care apare creşterea sau descreşterea în avalanşă (exponenţial) a frontului impulsurilor, datorită unei reacţii pozitive şi fenomenul de limitare.

În cazul propagării undelor, ecuaţiile lui Maxwell şi ecuaţiile telegrafiştilor, pun în evidenţă fenomene în care conexiunea inversă apare între cîmpul electric şi cîmpul magnetic sau între tensiuni şi curenţi.

Variaţia exponenţială cu temperatura a rezistenţei unui semiconductor, ambalarea termică a tranzistoarelor, stabilizarea punctului de funcţionare al acestora, sînt fenomene tipice în care apar conexiuni inverse sau reacţii.

În reglajul automat de nivel al repetoarelor telefonice, în compandoarele dinamice, apar de asemenea conexiuni inverse, în sensul ciberneticii (procese de reglaj automat).

Concluzii

Aşa cum s-a arătat, conexiunea inversă apare în reţelele electrice sub următoarele două tipuri principale :

a) sub forma unei bucle de reacţie, canalul de întoarcere fiind distinct de cel de ducere, ca în generatoarele şi amplificatoarele electronice, circuitele telefonice pe 4 fire etc., sau aceleaşi, ca în linia bifilară, sau, mai general, în orice cuadripol pasiv neadaptat la extremităţi ;

b) sub forma unor reacţii între tensiuni şi curenţi, datorită elementelor reactive *L, C*.

În ambele cazuri, curenţii sau tensiunile în regim liber variază în timp după funcţii exponenţiale sau funcţii sinusoidale, cu amplitudinea crescînd sau descrescînd exponenţial.

Dacă în reţea există şi elemente active (tuburi electronice sau tranzistoare), reţeaua poate fi instabilă, curenţii sau tensiunile crescînd

exponențial sau oscilatoriu exponențial. În acest caz apar în rețea reacții pozitive (în sensul electronicii). Limitarea și stabilizarea curenților și tensiunilor se poate face fie prin intrarea elementelor active în zona neliniară, fie prin elemente pasive neliniare, realizîndu-se astfel o conexiune inversă negativă (în sensul ciberneticii).

În cazul rețelelor instabile, apare deci o automișcare, care nu are nevoie de un impuls extern sau de o cauză. Ea apare de la sine dacă găsește condiții favorabile, luîndu-și impulsul inițial din micile variații haotice (agitația electronilor). Generalizînd acest rezultat, se poate spune că „Ciclul cu conexiunea inversă progresiv, introduce deci infinitul mic, nu ca o variație, ci ca un fenomen incipient" [5].

Amorsarea de oscilații, presupune prezența elementelor reactive, prin care se face o selecție a frecvențelor (condiția de fază).

Denumirea de elemente reactive ar justifica generalizarea termenului de reacție la cele două tipuri de conexiune inversă menționate a și b). Mai greu s-ar putea generaliza acest termen în cazul conexiunii inverse, care apare în procesele de reglaj automat. De altfel nici termenul corespunzător din limba franceză (réaction) nu a fost generalizat

Așa cum s-a spus la punctul 1 al lucrării, analiza conexiunii inverse din rețelele electrice este utilă și prin analogiile sau similitudinile cu alte sisteme în care apar conexiuni inverse. În primul rînd, ca și în sistemele electrice, în sistemele mecanice apar elemente disipative (frecarea etc.) și elemente reactive (masa și elasticitatea). Conexiunea inversă de tipul b, este deci un fenomen general în fizică și în tehnică, așa cum se subliniază și în lucrarea [5]. Factorul comun — conexiunea inversă — permite o serie de sinteze, de analogii între sisteme de aceeași natură sau de natură diferită, deosebit de utile, precum și o tratare matematică unitară, a unei clase de fenomene, utilizînd în deosebi metoda diagramelor de flux cauzal (a diagramelor de semnal, de exemplu).

În cazul circuitelor electrice, așa cum s-a arătat, conexiunea inversă (prin factorii T sau $F=1-T$) permite să se stabilească o serie de analogii și formule de calcul comune între cuadripoli reciproci și cuadripoli nereciproci, pasivi sau activi.

În cazul unui sistem de ecuații algebrice liniare, corespunzător unor fenomene din sisteme tehnice, biologice, economice etc., prezența de bucle închise în diagrama sau graful care reprezintă aceste ecuații, indică o conexiune inversă, cu consecințele arătate. În cazul unui sistem de ecuații diferențiale liniare, cu coeficienți constanți, conexiunile inverse sînt relevate de bucle de reacție ce apar în graful sau diagrama ce reprezintă aceste ecuații.

În cazul unor elemente R,L,C, distribuite și în cazul propagării libere a undelor, pot apare în diagramele de semnal, ca factor de transmisiune, pe lîngă operatorul d/dt sau $\partial/\partial t$, operatorii rot, div etc.

Diagramele de semnal, ca cele din figurile 6, 7, 10, în care apar bucle de conexiune inversă, pun în evidență unele avantaje ale parametrilor de repartiție. Ele permit nu numai să se deducă pe o cale mai intuitivă și uneori mai simplă, formule cunoscute dar și găsirea unor noi relații.

Întrucît metoda diagramelor de semnal, generalizată în sensul arătat, poate fi folosită în rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare, sau de ecuații diferențiale liniare cu coeficienții constanți etc., conceptul de conexiune inversă poate fi util și în matematică.

Catedra de telefonie și telegrafie
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Wiener, N.* — Cibernetica. București. Ed. Științifică, 1966
2. *Anohin, K. P.* — Fiziologia și cibernetica — principiile generale ale ciberneticii și dezvoltarea lor. În : Probleme teoretice ale ciberneticii. București. Ed. Științifică, 1963, p. 239—246
3. *Wiener, N.* — The Human Use of Human Beings. Cybernetics and Society. Eyre and Spotteswoode. 1954.
4. *Ross Ashby, N.* — Introduction to Cybernetics. Londra. Chapman and Hall, 1956 și traducerea în limba rusă, Moscova II, M, 1959, p. 8.
5. *Postelnicu, P.* — Ipoteza complexului vicios (a sistemelor cu conexiune inversă) În Telecomunicații, 12 (1968), nr. 12, p. 455—458. (Textul lucrării trimisă spre publicare în 1944 la Rev. Șt. V. Adamachi ; figurează la rubrica articolelor primite spre publicare în vol. XXI, nr .1—2, ian., iunie 1945.
6. *Sahleanu, V.* — Fenomenul „viață" în fața cercetătorilor : ieri, azi, mîine. Societatea „Amicii științelor naturii". București, 24 februarie, 1945.
7. *Sahleanu, V.* — Cu priivre la preistoria ciberneticii. În : Revista de filozofie. Ed. Acad. RSR, tom 14, nr. 8, 1967, p. 931—936.
8. *Belis, M.* — Les systèmes éducables. In : Cybernetica, nr. 3, 1966.
9. *Belis, M.* — La cybernetique et l'évolution. In Cybernetica, nr. 2, 1968, p. 88—98.
10. — Problema cauzalității în fizica modernă. București. Ed. Științifică, 1963, p. 90.
11. *Guiliaumaud, J.* — Cibernetica și materialismul dialectic. București. Ed. Științifică, 1967.
12. *Postelnicu, P.* — Metodele generale folosite în calculul amplificatoarelor cu reacție negativă. În Telecomunicații, 12, (1968), nr. 2, p. 64 — 69.
13. *Sinnreich, H.* — Diagrame de semnal. In : Telecomunicații, 8, 1964, nr. 6, p. 259—270.
14. *Postelnicu, P.* — Interpretarea atenuării de echilibrare a sistemelor diferențiale din circuitele telefonice ca o atenuare de ecou. In Telecomunicații, 8, 1964, nr. 1.
15. *Postelnicu, P.* — Sisteme de transmisiuni telefonice, vol. I, Ed. Didactică și Pedagogică. București, 1964, p. 82.

SUMMARY OF THE 1969 REVIEWS

ECONOMIC ENGINEERING

St. Bîrlea, T. Homoş, Stanca Costoiu — Considerations on the Cybernetic Modelling of the Production Processes in Machine Building (3—1969)

MATHEMATICS

Mariana Craiu, M. N. Roşculeţ — Contributions to the Study of Equations with Parabolic Type Partial Derivatives (1 — 1969).
I. M. Miu — Functional Polynoms (1 — 1969)
M. St. Botez — About an Involutive Birational Transformation (1 — 1969).
N. Mirescu — On a Monge Epure Simplification (1 — 1969).
Har. P. Ionescu — On Some Differential Equations (2 — 1969).
D. Filipescu — Some Geonetrical Transformations in S. I. Optics (2 — 1969).
A. Tănăsescu — Prospective Study of Equiresultant Straight Lines (2 — 1969).
C. Ionescu-Bujor — Centred Translations of the Plan (4 — 1969).
M. St. Botez — On the Plücker Conoid Generating Manner (5 — 1969).
D. V. Ionescu — On Identity and the Integral Representation of a Linear Operator. (6 — 1969).

PHYSICS

Diana Moisil — On the Determination of Ellipsometric Quantities, in Laser Radiation (1 — 1969).
I. Drăghici, M. Petrescu, I. Spînulescu — The Electrical Properties of PbFe Thin Films (2 — 1969)
Candida Gheorghiţă-Oancea, Liliana Barbici, Maria Popa-Milea, P. Cristea — On the Photovoltaic Effect at the Contact of Thin Tellurium Layers with Zinc (3 — 1969).

CHEMISTRY

Gr. Teodorescu, Ileana Niculescu, Ana Maria Lupu, Florica Popescu — Conductometric Study of the Ph-Ion Precipitation Reaction with Phosphorous Acid (2 — 1969).
Gr. Teodorescu — The Method of Determination for 6 Methoxy — 2 Aminobenzothiazole — (3 — 1969).
Gr. Teodorescu — Method of N-phenil-morpholin Determination (4 — 1969).
Gr. Teodorescu — Method of Determination for Amino-guanidine Bicarbonate (5 — 1969).

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. C. Răducanu, Ecaterina Tucan — Dependence of the Cobalt-phosphorus Alloy Upon the Electrolysis Conditions (1 — 1969).
T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu — The Ionitic Natural Substances — Raw-materials for Obtaining Some New Assortments of Mineral Fertilizers (2 — 1969).

Gh. Ioniță, D. Grigorescu, S. Dima — Disemulsification of Gas-oil by Means of Ion Exchangers (2 — 1969).

Gh. Constantinescu — Hydrolysis of Annual Plants in View of Obtaining Furfurol and Complex Organic-mineral Fertilizers (3 — 1969).

E. A. Bratu, Fr. Gothard — Rectification in Columns with Vibrated Filling Bodies (A new possibility of reaching high rectification degrees) (4 — 1969).

Agneta Cerbu — Laboratory Instrument for Producing Hydrogen Sulphide and other gases Used in the Half-microchemical Analysis (4 — 1969).

T. Ionescu, I. Gh. Constantinescu — Ammonium Adsorption and Potassium Fixing in Bentonites (5 — 1969).

Cornelia Bejan — Influence of the Strength of Capillary — active Substances on the Liquid — liquid Extraction (5 — 1969).

Fl. Daneș — New Criterion for Optimizing the Separation Processes (5 — 1969).

Th. Bădescu, L. Papahagi — Concerning Certain Aspects of the Ink-and water Equilibrium within the Offset Printing Process by Means of Copper and-crome Bimetal Plates (6 — 1969).

Gh. Constantinescu — Technical Moistening of the Annual Plants (6—1969).

MECHANICS

C. Guță — Considerations on the Optimum Rocket Climbing Regime (3 — 1969).

C. Guță — Optimum Ascent Regim of Multistage Rockets (4 — 1969).

N. I. Manolescu, Gabriela Iarca — One Method for the Kinetostatic Determinations by Means of the Change of the Reducing Force-point (other reducing moment-link) (4 — 1969).

C. Guță — Heating and Overloads Appearing on Rockets or Spaceships at Re-entry into the Atmosphere. (6 — 1969).

HYDRAILICS

Gh. Zidaru — The Linear Lattice of Thin Profiles with Small Curvature in the Potential Motion (2 — 1969).

STRENGTH OF MATERIALS

D. Voiculescu — Some Applications of the Theory of Distributions in the Strength of Material (1 — 1969).

Gh. Rusiu — Lateral Displacement of the Railway Unter the Action of Lateral Movable Forces (1 — 1969).

I. Mincă — Contributions to the Calculation of the Stresses in Nonuniformly Heated Thick Walled Cylinders (2 — 1969).

M. Radeș — Viscoelastic Layers as Antivibration Isolators (3 — 1969).

A. Petre, Vasilica Cosac — Forced Vertical Vibrations of Pendular Beams (4 — 1969).

D. Voiculescu — Contributions to Distortion and Stress Determination Throngh the Initial Parameter Method with a Straight — bar or Constant and of Step Variable Cross-section (5 — 1969).

THERMODYNAMICS

C. Stamatescu, Marieta Grigoriu, T. Duicu — The Study of the Exergetic Efficiency of Real Refrigerating Processes by Vapours Compression (1 — 1969).

Tr. Nicolescu, Al. Dănescu, Vs. Radcenco — The Thermodynamical Analysis of the Gas Exchange Processe in the Internal Combustion Engine Cylinder (3 — 1969).

HEAT ENGINE

N. Apostolescu — Combustion of Fuel Drop at High Pressure (1 — 1969).
G. Bărănescu — Some Problems Concerning the Equilibration of the External Moment of First Order Terms on the in Line Two-stroke Engine, Having an Even Number of Cylinders and Uniformly Distributed Ignitions (2 — 1969).
M. Postelnicescu — On the Minimum Exhaust Temperature of the Boiler Fuel Gases (2 — 1969).
G. Bărănescu — Balancing of the Inertia Forces Onter Moments oi Masses Having a Translation Motion in the In-line Engine, Having Non-uniform Destributed Ignitions and Equal Distances Between Consecutive Cylinders (3 — 1969).
B. Grünwald, N. Apostolescu — Calculation of the Internal Energy of the Gases Considering the Therma Non-homogeneity of the Gas Mixture in the Engine Cylinder During the Combustion (3 — 1969).
N. Apostolescu, B. Grünwald, D. Taraza — Determination of the Combustion Law of an Internal Combustion Engine by Means of Digital Computers Using the Indicated Diagram (4 — 1969).
Rodica Manițiu — A Construction of Graphical Determination of the Piston Displacement of the Normal and Excentric Connecting rod Assembly (4—1969).
N. Apostolescu — Calculation of the Rate of Heat Release in the Direct-injection Diesel Engine (5 — 1969).

DETAILS OF MACHINES

T. Mladinescu — Experimental Determination of the Dynamic Coefficient in Cylindrical Toothed Wheels with Straight Toothing (4 — 1969).
T. Demian — On the Theory, Calculation and Testing of Point Bearing (5 — 1969).
Gh. Manea, M. Pascovici — The Influence of Plastic Bushing Improving Additions of the Temperature Film — Field — (6 — 1969).
H. Segal — Applyng the Electric Analogies to the Determination of the Dynamic Forces within the Belt Conveyors, During the Starting Period. (6 — 1969).

MACHINE BUILDING TECHNOLOGY

I. Gherghea — The Calculation of Volume Losses Through thin Cylindrical Slots (3—1969).
A. Oprean — Study of Volumetric Losses from Pumps with Small Axial Plungers with Spherical Distribution (6 — 1969).

ELECTRIC POWER

D. Cristescu, M. Budașcă — Study on the Model of the Deformation of Impulse Waves Under the Action of the Corona Effect (4—1969).

ELECTRICAL NETWORK

A. Carabulea — Contribution to the Study of Electric Network Influence on Telecommunication Circuits (5 — 1969).
I. Iordănescu, Gh. Iacobescu — Power Shocks Caused by the Industrial Consumers and Steps for the Decreasing of Their Effects (6 — 1969).

METALLURGY

I. Tripșa — Study of the Electrocapillarity Effect Upon the Steel-making Processes and Upon its Purits (6 — 1969).

ELECTRONICS

C. *Bulucea, S. Cserveny* — The Non-constancy of the Quasi-Fermi Potentials Across the Transitions Region of a Reverse Biased p^+-n Junction and its Implications in Transition Region Capacitance Calculation (2—1969).
P. Postelnicu — Sense and Generality of the Feedback within the Electric Networks (6 — 1969).

TRANSPORT

Al. Popa — Contributions to the Determination of Optimum Speeds and Tonnage of Goods Trains Towed by Electric 060EA Engines (6 — 1969).
Gh. Frăţilă — Concerning the Additional Loading of Transmission in Automobiles Provided with Two Axles (4 — 1969).
P. Frîncu, S. Raicu — Study of the Railway Crossing Solicitation (5 — 1969).

I. P. „Grafica Nouă" II — c. 12655

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1970 JUN 16